АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3360—4283

*

№ 4 1959

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Директор института профессор *А. И. Михайлов*

Главные редакторы серий: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), профессор *В. Ю. Ломоносов* (Электротехника), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Е. В. Шпольский* (Физика)

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 2
Преподавание математики 3
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 11
Алгебра 19
Многочлены и линейная алгебра 20
Группы 22
Поля, кольца и структуры 29
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 35
Теория функций действительного переменного . . 45
Теория множеств 51
Приближение функций полиномами и их обобщениями 53
Теория функций комплексного переменного . . . 55
Дифференциальные уравнения 75
Обыкновенные дифференциальные уравнения 75
Уравнения в частных производных 85
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . —
Интегральные уравнения 98
Приложения интегральных уравнений . . . . —
Вариационное исчисление 104
Анализ (другие вопросы) 105
Числовые ряды 109
Специальные функции 111
Интегральные преобразования и операционное исчисление 111
Приложения общих методов математического анализа 113
Функциональный анализ 115
Теория вероятностей 127
Математическая статистика 136
Теория игр, исследование операций и математическая экономика . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов . . . . . —
Геометрия 144
Приложения геометрии 145
Элементарная геометрия 147
Аналитическая геометрия 149
Проективная геометрия 150
Начертательная геометрия 152
Геометрия *n*-мерного пространства 154
Теория относительности 159
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 161
Метрические методы в геометрии 163
Выпуклые многообразия 166
Численные и графические методы 171
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . —
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 185

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL
INSTITUTE OF THE SCIENTIFIC INFORMATION
ACADEMY OF SCIENCE OF THE USSR
Director of the Institute professor *A. I. Mikhailov*

Editors of series: corresponding member *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V. Afpatov* (Biologiya), professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *V. Y. Lomonosov* (Electrotekhnika), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodéziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya), candidate of technical science *V. Z. Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika).

CONTENTS

General 1
History. Personalia 2
Teaching of mathematics 3
Foundations. Mathematical logic 6
Theory of numbers 11
Algebra 19
Polynomials, linear algebra 20
Groups 22
Fields, rings, lattices 29
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . —
Topology 35
Theory of functions of real variables 45
Theory of sets 51
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 53
Theory of functions of complex variables 55
Differential equations 75
Ordinary differential equations 75
Partial differential equations 85
Applications to physics, technology and natural sciences . . . . . —
Integral equations 98
Applications of integral equations . . . . . —
Calculus of variations 104
Analysis (other aspects) 105
Numerical series 109
Special functions 111
Integral transforms, operational calculus 111
Applications of general methods of mathematical analysis 113
Functional analysis 115
Theory of probability 127
Mathematical statistics 136
Theory of games, operational research, mathematical economics . . . . . —
Applications of probabilities and statistical methods . . . . . —
Geometry 144
Applications of geometry 145
Elementary geometry 147
Analytical geometry 149
Projective geometry 150
Descriptive geometry 152
Geometry of *n*-dimensional space 154
Theory of relativity 159
Global theory of differentiable manifolds . . . 161
Metric methods in geometry 163
Convex manifolds 166
Numerical and graphical methods 171
Tables . . . . . —
Computers and mathematical devices . . . . . —
Application of computer devices . . . . . —
Author index 185

Editorial office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

14 р. 40 к.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 3360—4283 № 4 Апрель 1959 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

3360. 40-летие советской математики. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 3—7

3361. Общее собрание Академии наук УССР 17—18 апреля 1958 г. (Загальні збори Академії наук УРСР, 17—18 квітня 1958 р.), Вісник АН УРСР, 1958, № 5, 12—17 (укр.)

3362. Июньское общее собрание Отделения технических наук Академии наук СССР (Рассмотрение научных докладов). Соломонов М. С., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 9, 157—160

Собрание состоялось в Москве 16—17 июня 1958 г. Заслушаны два доклада: Петров Г. И., Проблема движения реального газа со скоростями, существенно превышающими скорость звука; Пугачев К. С., Новые методы определения оптимальных систем для обнаружения и воспроизведения сигналов в присутствии помех. Резюме докладов приводятся.

3363. Заседания Московского математического общества (12 ноября—17 дек. 1957 г.). Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 229—246

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях Московского математического общества в ноябре — декабре 1957 г. Приведены резюме докладов:

12 ноября 1957 г. В. Б. Лидский, Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов с дискретным спектром. Л. Л. Гаркави, О приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими рядами. М. М. Гейдельман, Теория конгруэнций плоскостей неевклидовых пространствах.

26 ноября 1957 г. М. Л. Расулов, Вычетный метод решения краевых и смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений и связанные с ним формулы разложения. Г. Х. Синдаловский, Некоторые вопросы непрерывности и дифференцируемости.

3 декабря 1957 г. Д. А. Райков, Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств. Сунь Юн-шен, О наилучшем приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами.

10 декабря 1957 г. О. А. Ладыженская, О решении в целом задачи Коши для плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости и о теореме единственности для простейшей системы газовой динамики.

17 декабря 1957 г. Н. М. Коробов, О границе нулей функции Римана $\zeta(s)$. А. А. Мучник, Изоморфизм систем перечислимых множеств с эффективными свойствами.

3364. Пространство и число. Рейдемейстер (Raum und Zahl. Reidemeister Kurt), Naturwissenschaften, 1958, **45**, № 11, 253—255 (нем.)

Автореферат книги «Пространство и число» (Raum und Zahl, Berlin—Göttingen—Heidelberg. Springer, 1957, VII, 151 S.). Темой книги (по определению автора) является пространственное представление и наглядность геометрии. Точнее, в книге разбирается вопрос, основывается ли математическое познание на пространственном представлении. Автор считает этот вопрос весьма спорным. Для выяснения сути спора Рейдемейстер формулирует ряд тезисов о сущности математики как науки. В одном из тезисов, например, он говорит, что математическое изобретение заключается в изобретении новых понятий, с помощью которых успешно завершается очередное доказательство, что математическое исследование состоит в опробовании различных конструкций для получения доказательств, наконец, что результатом таких исследований является полученное доказательство.

Рейдемейстер считает, что его тезисы позволяют свести спор о том, является ли пространственное представление источником геометрического познания, к спору о смысле доказательств, так как наглядность позволяет описывать, но не доказывать.

Н. Н. Брушлинский

3365. Является ли математика языком? Лоренцен (Ist Mathematik eine Sprache? Lorenzen Paul), Synthese, s. a., **10**, 181—186 (нем.)

Цель статьи — критика взгляда, что математика представляет собой язык. Основная функция всякого языка заключается в описании действительности. Автор считает, что математика описывает действительность только в области технических приложений.

Основной функцией математики он считает разработку техники оперирования знаками, которую он неправомерно отрывает от действительности, впадая в очевидное противоречие.

С. К. Шаумян

3366. Математика, рассматриваемая в качестве живого языка. Кроз (La mathématique considérée comme langue vivante. Crozes Y.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1958, **37**, № 188, 142—144 (франц.)

Если рассматривать математику как живой язык, то обучение математике должно иметь два аспекта: 1) сообщение определенного математического словаря, со-

стоящего из математических терминов и символов, и 2) обучение правилам оперирования этими терминами и символами. При этом преподаватель должен исходить из структуры элементов родного языка учащихся. Например, берется схема простого предложения.

a	*R*	*b*
подлежащее	глагол	образ

Опираясь на данную схему, можно перейти к анализу математических отношений. Для этого символ *R* в данной схеме заменяется символами математических отношений: $=, \in, \rightarrow, \leftrightarrow$. С. К. Шаумян

3367. Закон отрицания отрицания в математике. Минков (Законът за отрицание на отрицанието в математиката. Минков Н.), Матем. и физика (Бълг.), 1958, **1**, № 1, 3—7 (болг.)

3368 К. Доклады и сообщения на научной конференции профессорско-преподавательского состава по итогам научно-исследовательской работы за 1956 год. Уч. зап. Смоленского гос. пед. ин-та, вып. 4, ч. I. Смоленск, Книгоиздат, 1957, 159 стр., беспл.

В сборнике в математической части помещены тезисы сообщения: Г. И. Аргунов, Понятие площади треугольника и многоугольника.

3369 К. Сначала было число. Основные проблемы математики в общедоступном изложении. Мюллер (Im Anfang war die Zahl. Grundprobleme d. Mathematik gemeinverständlich dargestellt. Müller Fritz. Stuttgart, Kohlhammer, 1957, 463 S., ill., 22.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 9, 602 (нем.)

3370 Ж. Научные доклады высшей школы. Физико-математические науки. М-во высш. образования СССР. М., «Сов. наука». Двухмесячный, 60 р. в год.

Первый номер журнала вышел в 1958 г.

3371 Ж. Научные доклады высшей школы. Радиотехника и электроника. М-во высш. образования СССР. М., «Сов. наука». Квартальный, 56 р. в год.

Журнал начал выходить с 1958 г.

3372 Ж. Метрика. Журнал теоретической и прикладной статистики (Metrika. Zeitschrift für theoretische und angewandte Statistik. Hrsg. Anderson O., Winkler W. Würzburg, Physica—Verl., 3 Mai jährlich, 18 DM pro Jahr) (нем.)

Журнал начал выходить в 1958 г.

3373 Ж. Математический журнал Иллинойса (Illinois journal of mathematics. University of Illinois, Urbana, Quarterly, 9 doll. per year) (англ.)

Первый номер вышел в марте 1957 г.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

3374. Диофантовы уравнения и планетные периоды в индийской астрономии. Ван-дер-Варден (Diophantische Gleichungen und Planetenperioden in der indischen Astronomie. Van der Waerden B. L.), Vierteljahrsschr. naturforsch. Ges. Zürich, 1955, **100**, № 3, 153—170 (нем.)

См. РЖАстр, 1956, 3450.

3375. Математические турниры эпохи Возрождения. Мондини (Giostre di matematici nel Rinascimento. Mondini Alberto), Sapere, 1958, **47**, № 559-560, 167—168 (итал.)

Краткое вступление о «математических нравах» эпохи и популярный рассказ об открытии решения уравнений третьей степени и связанных с этим открытием состязаниях и спорах. И. Б. Погребысский

3376. Об «Определении величины круга» Христиана Гюйгенса. Конте (Il «de circuli magnitudine inventa» di Cristiano Huygens. Conte Luigi), Archimede, 1958, **10**, № 1, 44—47 (итал.)

Продолжение перевода на итальянский язык названного сочинения Гюйгенса (начало см. РЖМат, 1958, 5371). И. Н. Веселовский

3377. Об «Analysis situs» Лейбница. Политано (Sull' «Analysis situs» di Leibniz. Politano Maria Luisa), Archimede, 1957, **9**, № 4-5, 178—180 (итал.)

Автор рассматривает Лейбница как зачинателя топологических исследований и анализирует его определение подобия геометрических фигур. И. Б. Погребысский

3378. Универсальный язык и формализация наук. Неизданный фрагмент Кондорсе (Langue universelle et formalisation des sciences. Un fragment inédit de Condorcet), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 3, 197—219 (франц.)

«Очерк об универсальном языке» Кондорсе является продолжением «Эскиза исторической картины прогресса человеческого разума», написанного им же в 1793 г. (русский перевод вышел в 1936 г.). Кондорсе представлял себе «универсальный язык» как некоторое логическое исчисление. Идея «универсального языка» Кондорсе перекликается с аналогичной идеей Лейбница. В предисловии, написанном Гранже, утверждается, что обе эти идеи возникли и развивались независимо друг от друга. Публикуемый текст можно разделить на следующие пять глав: 1. Знаки общих операций; 2. Знаки объектов и алгебраических операций; 3. Саморазвитие универсального языка; 4. Эскиз геометрического, механического и астрономического словаря; 5. Эскиз языка естественных наук.

Публикуются полностью первые три главы. Две последние — только частично. Н. Н. Брушлинский

3379. Как был найден документ о рождении математика Н. И. Лобачевского (Воспоминания старого краеведа). Богодин (Як быў знойдзен дакумент аб нараджэнні матэматыка М. І. Лабачэўскага (Успаміны старога краязнаўцы). Багодзін С.) Весці АН БССР, Сер. фіз-техн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1958, № 1, 121—122 (белорусск.)

Рассказ о том, как летом 1929 г. была найдена метрическая запись о рождении Н. И. Лобачевского. Сообщение об обнаружении этого документа впервые появилось в газете «Нижегородская коммуна» от 26 сентября 1929 г. А. А. Гусак

3380. Геометрия и тригонометрия Г. Асаки. Кымпан (Geometria si trigonometria lui Gh. Asachi. Cîmpan Fl.), An. stiint. Univ. Iasi, 1956, sec. I, **2**, № 1, 2, 333—340 (рум.)

Подробный разбор первых румынских учебников по геометрии и тригонометрии. Первым начал преподавать геометрию на румынском языке Г. Асаки в 1816 г., по учебнику Безу. В библиотеке академии Румынской Народной Республики хранятся рукописи, по которым преподавал Г. Асаки. В 1838 г., в Яссах, Г. Асаки напечатал оригинальный учебник геометрии. Годом раньше, в 1837 г., в Бухаресте, была напечатана «Элементарная геометрия по Лежандру», являющаяся дословным переводом геометрии Лежандра, выполненным П. Поенару. А. Н. Гливич

3381. К истории счетных инструментов в России в XIX в. Беспамятных Н. Д., Уч. Зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 43—54

Обзор усовершенствований в счете в XIX в. в России. Упоминаются арифмометры В. Я. Буняковского и П. Л. Чебышева. Более подробно рассмотрен арифмометр В. Т. Однера; приведены чертежи конструкций 1878 и 1890 гг. Кратко описаны некоторые машины для решения специальных задач: машина для интегрирования дифференциальных уравнений А. Н. Крылова, логарифмометр Н. В. Берви и др. Библ. 20 назв. Л. Е. Майстров

3382. Статистические общества в Соединенных Штатах в девятнадцатом столетии. Фиц-Патрик (Statistical societies in the United States in the nineteenth century. Fitz Patrick Paul J.), Amer. Statistician, 1957, **11**, № 5, 13—21 (англ.)

В XIX в. в США было предпринято шесть попыток организации статистических обществ. Отмечается, что

только одно общество—Американская статистическая ассоциация—оказалось удачным. Все остальные общества быстро распадались или сливались с другими научными обществами. Наиболее действенной оказалась такая общенациональная форма объединения статистиков, которая была построена на самом широком представительстве различных разделов статистики. Местные статистические общества, организованные в некоторых городах и штатах, испытывали материальные затруднения и вскоре после организации распадались.

Попытки объединения статистиков, работающих в какой-либо одной узкой области приложений, также оказались неудачными. Не имея достаточных оснований для самостоятельного существования, эти общества со временем теряли статистический характер. Так, например, Американское географическое и статистическое общество, основанное в 1851 г., через 20 лет было преобразовано в Американское географическое общество. Библ. 40 назв. Л. Н. Большев

3383. К истории векторного исчисления. Крамар Ф. Д., Уч. зап. Казахск. ун-та, 1957, **30**, вып. 5, 99—106

Критикуется концепция Ф. Клейна, что родоначальниками векторного исчисления являются Грассман (1809—1877) и Гамильтон (1805—1865), которые пришли к нему в середине XIX в. в поисках обобщения комплексных чисел на 3- и n-мерное пространство. Показано, что необходимо еще принимать в расчет борьбу за внедрение в XIX в. в математику и механику геометрических исчислений. Дан разбор сочинения И. И. Сомова «Об ускорениях различных порядков» как пример самостоятельной разработки нового в то время векторного исчисления, незаслуженно обойденный Ф. Клейном. Тенденциозность и неполнота историко-математических высказываний последнего известна и многократно подвергалась критике в печати. К. А. Рыбников

3384. Карл Фридрих Гаусс. Крафт (Carl Friedrich Gauß. Krafft M.), Nuovo cimento, 1955, **2**, Suppl. № 5, 1221—1255 (нем.)

3385. Казанский математик Александр Федорович Попов. Бычков В. П., Уч. зап. Тираспольск. гос. пед. ин-та, 1957(1958), вып. 5, 143—150

Ученик Н. И. Лобачевского и его преемник на кафедре чистой математики Казанского университета А. Ф. Попов (1815—1878) свою научную деятельность посвятил преимущественно гидродинамике, в особенности теории волн на поверхности жидкостей, а также связанным с гидродинамикой разделам математической физики, теории упругости и теории звука. Список сочинений 53 назв. Имеются опечатки и разногласия в датах.

3386. Эмми Нетер — выдающаяся женщина-математик. Рыхлик (Emmy Noetherová—nejvýznamnější žena matematička. Rychlík Karel), Mat. škole, 1958, **8**, № 4, 234—238 (чешск.)

Краткие сведения о жизни и научных трудах Эмми Нетер (1882—1935) в связи с недавно исполнившимся 75-летием со дня ее рождения. Автор делит научную деятельность Э. Нетер на три периода: 1907—1919—работы, вызванные влиянием Жордана и Гильберта, 1920—1926—исследования в области теории идеалов, с 1927 г. — занятия некоммутативными алгебрами. В заключение автор сравнивает Эмми Нетер с Софьей Ковалевской (1850—1891). Г. Ф. Рыбкин

3387. Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825—1912). Грацианская (Михайло Егорович Ващенко-Захарченко (1825—1912). Грацiанська Л. М.), Наук. щорічник Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956, Київ, 1957, 511—513 (укр.)

3388. Михаил Григорьевич Попруженко (1854—1917). Больсен Е. М., Матем. в школе, 1958, № 5, 59—61

Очерк жизни и деятельности М. Г. Попруженко—преподавателя математики и методиста, известного своей борьбой за введение в курс средней школы элементов математического анализа, автора первоклассных учебников.

3389. Чжоу Хун-цзинь. Бозанкет (Hung Ching Chow. Bosanquet L. S.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 383—384 (англ.)

Некролог профессора Тайваньского университета Чжоу (1902—1957). Научные работы (около 20) посвящены преимущественно теории суммирования степенных рядов и рядов Фурье.

3390. Ганс Людвиг Гамбургер. Гримшоу (Hans Ludwig Hamburger. Grimshaw M. E.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 377—383 (англ.)

Очерк жизни и деятельности профессора Кёльнского (ФРГ) университета Гамбургера (1889—1956). Библ. 48 назв.

3391. Список трудов Михая Фекете (1886—1957) (Fekete Mihály munkáinak jegyzéke), Mat. lapok, 1958, **9**, № 1-2, 1—5 (венг.)

3392. Список статей Павла Эрдёша, лауреата премии имени Кошута за 1958 г. (Az 1958. évi Kossuth-díjjal kitüntetett Erdös Pál dolgozatainak jegyzéke). Mat. lapok, 1958, **9**, № 1-2, 136—147 (венг.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

3393. Характерные черты советской математики и ее преподавания. Махатова (Charakteristické rysy sovětské matematiky a jejího vyučování. Machátová Jiřina), Mat. škole, 1958, **8**, № 3, 129—133 (чешск.)

Указывается на известную преемственность между советской математикой и прогрессивными традициями русской дореволюционной науки и отмечается влияние на развитие советской математики трудов Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева и др.

Основными характерными чертами советской математики автор считает: 1) овладение методом диалектического материализма, 2) плановость в работе, основанная на единстве теории и практики, 3) сочетание коллективности в работе с максимальным развитием своеобразия и таланта каждого ученого в отдельности, 4) демократичность, связанная с демократическим характером организации и содержания советского образования. В заключение автор останавливается на развитии советской методики математики, отмечая большое влияние прогрессивных педагогов дореволюционной России (А. И. Страннолюбский, А. Н. Острогорский, М. Г. Попруженко и др.) Г. Ф. Рыбкин

3394. Воспитательные элементы в математике. Пич (Výchovné prvky v matematice. Píč Josef), Mat. škole, 1958, **8**, № 6, 321—327 (чешск.)

На отдельных примерах автор показывает, как учитель математики может на уроках математики использовать идейно-воспитательный материал, заимствованный из отдельных областей социалистического хозяйства. Г. Ф. Рыбкин

3395. Согласование иностранных языков и математики. Дюваль (Coordination langues vivantes—mathématiques. Duval), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 188, 146—148 (франц.)

Рассматриваются вопросы связи преподавания живых иностранных языков с преподаванием математики. Автор предлагает внедрять в преподавание иностранных языков математическую терминологию и математические выражения. Кроме того, он указывает на аналогии между переводом с одного иностранного языка на другой и переводом с одного математического языка на другой, например, с языка алгебры на язык геометрии и обратно. С. К. Шаумян

3396. Обсуждение новых стабильных учебников по математике, Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 195—209

3397. О книге «Методика преподавания математики» под общей редакцией С. Я. Ляпина (ч. 2). Черт-

ков **И. Я., Голуб А. М.,** Матем. в школе, 1958, № 5, 79—83

3398. О новом школьном учебнике тригонометрии С. И. Новоселова, Буданцев П. А., Уч. зап. Чкаловск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 123—134

3399. О новом учебнике алгебры А. Н. Барсукова, ч. I. Буданцев П. А., Уч. зап. Чкаловск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 93—121

3400. Об опасности формализма и вербализма в преподавании алгебры. Крыговская (Sul pericolo del formalismo e del verbalismo nell'insegnamento dell'algebra. Krygowska A. Zofia), Archimede, 1957, **9**, № 4-5, 165—177 (итал.)
См. РЖМат, 1959, 2223, 2224.

3401. Несколько замечаний к введению отрицательных и дробных чисел. Кирш (Einige Bemerkungen zur Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen. Kirsch Arnold), Math.-phys. Semesterber., 1957, **5**, № 3-4, 281—284 (нем.)

Расширение множества натуральных чисел до множества всех целых чисел, с одной стороны, и до множества положительных рациональных чисел, с другой, может рассматриваться с алгебраической точки зрения как вложение регулярной коммутативной полугруппы в (коммутативную) группу. В первом случае множество натуральных чисел рассматривается как регулярная коммутативная полугруппа H^+ с операцией сложения, а во втором — как регулярная коммутативная полугруппа $H^\cdot$ с операцией умножения; соответствующими группами являются G^+ и $G^\cdot$. Несмотря на кажущуюся теоретико-групповую тождественность этих расширений, второе из них наталкивается в элементарном изложении на некоторые трудности, причину которых полезно знать учителям. Она заключается в том, что H^+ является областью положительности в группе G^+, тогда как $H^\cdot$ таковой в группе $G^\cdot$ не является. Если обозначить через & операцию (ассоциативную и коммутативную), то регулярная полугруппа будет областью положительности в своей группе тогда и только тогда, когда для каждой пары элементов a и b из этой полугруппы имеет место одно и только одно из следующих соотношений: (1) $a=b$, (2) в полугруппе существует такое x, что $a=b\,\&\,x$, (3) в полугруппе существует такое y, что $a\,\&\,y=b\cdot H^+$ является областью положительности в G^+ (здесь операция & есть сложение), но в $G^\cdot$ областью положительности является не множество натуральных чисел, а множество всех правильных дробей (здесь операция & есть умножение). Автор считает целесообразным провести в школе эксперимент, излагая последовательные расширения понятия числа не по принципу «перманентности», а по принципу «вложения». В. И. Левин

3402. Организация и оборудование математического кабинета в школе. Белый Б. Н., Бернштейн А. М., Матем. в школе, 1958, № 5, 30—33

Освещается опыт оборудования и работы математического кабинета средней школы № 4 г. Винницы (УССР).

3403. Обзор учебника по математике для VIII класса основной школы Германской Демократической Республики. Столяр А. А., Матем. в школе, 1958, № 5, 65—71

3404. Геометрические преобразования и подобие в школах ГДР. Журбас М. А., Матем. в школе, 1958, № 5, 71—75

3405. Преподавание математики в Высшей технической школе г. Дельфт. Тимман (Het onderwijs in de wiskunde aan de Technische Hogeschool te Delft. Timman R.), Euclides (Nederl.), 1958, **34**, № 2, 48—59 (гол.)

3406. Введение понятия числа в школе с учетом требований университетского обучения. Бакош (A számfogalom kialakítása az iskolában, különös tekintettel az egyetemi oktatás igényeire. Bakos Tibor), Mat. lapok, 1958, **9**, № 1-2, 115—135 (венг.)

3407. Математика в программе общеобразовательной школы. Хартунг (Mathematics in the total school program. Hartung Maurice L.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 5, 336—343 (англ.)

3408. Математическая наука и проблема кадров. Сигер (Mathematical science and the manpower problem. Seeger Raymond J.), Math. Teacher, 1957, **50**, № 1, 10—18 (англ.)

Отмечаются следующие недостатки математического образования в США: 1) возрастающий недостаток учителей, что объясняется малой зарплатой и низким общественным положением, а также переманиванием учителей в промышленность и государственный аппарат; 2) малый удельный вес математики на всех ступенях образования, в противоположность СССР, где математическим наукам отводится в 1—4 классах 29% учебных часов, в 5—7 классах — 36%, в 8—10 классах — 41%; 3) фактическое отстранение женщин от обучения математическим и техническим специальностям; во втузах СССР обучается более 25% женщин, в соответствующих учебных заведениях США менее 0,5%; 4) сугубо прикладной характер преподавания математики; 5) выявление способных к математике детей происходит под большим влиянием общественного положения родителей. Л. Е. Майстров

3409. План реорганизации преподавания математики в колледжах. Ван-Энген (Plans for the reorganization of college preparatory mathematics. Van Engen H.), School Sci. and Math., 1958, **58**, № 4, 277—285 (англ.)

В статье изложен и кратко прокомментирован «план реорганизации» преподавания математики в старших (IX—XII) классах полной средней школы США, разработанный комиссией «Центральной ассоциации преподавателей естествознания и математики». План имеет в виду курс математики того типа классов, которые готовят к поступлению в высшие учебные заведения (колледжи университеты). Намечены три направления реорганизации: 1) отражать «новый и более живой тип» математики; 2) устранять из программ отживший материал; 3) стремиться к углублению понимания учащимся теоретического аспекта предмета.

Фактическая реализация плана мыслится в виде четырехгодичного курса: 1-й год — элементарная математика (начальный курс алгебры); 2-й год — элементарная математика (курс геометрии); 3-й год — «промежуточный» курс математики; 4-й год — «высший» курс математики.

Курс алгебры должен начинаться с изучения множеств с использованием простейших понятий и символов математической логики, при широком обращении к наглядному истолкованию. Целью курса является отчетливое усвоение учащимися понятия поля. В курс вводится (на неформальной основе) понятие функции и изучается решение «условий», т. е. уравнений и неравенств первой и второй степени с одним неизвестным. Изложению курса придается последовательный дедуктивный характер. Несложные доказательства в начальном курсе алгебры явятся хорошей пропедевтикой для более сложных дедукций в курсе геометрии.

Курс геометрии. На изучение планиметрии отводится один семестр (вместо трех в настоящее время.) К концу семестра синтетические доказательства рекомендуется, когда это удобно, заменять аналитическими. Курс дополняется элементами геометрии трех измерений и геометрии на сфере (призванными представить в более ярком «боковом освещении» соответствующие предложения геометрии на плоскости). Рекомендуется обратить большее внимание на логический аспект курса геометрии.

«Промежуточный» курс должен носить характер введения в элементарный анализ с логическим уточнением ряда понятий, рассмотренных в начальном курсе алгебры. Основное содержание курса — систематическое изучение свойств элементарных функций. Кроме того, в курс включаются следующие три темы: 1) показатели и радикалы; 2) векторы; 3) последовательности и ряды.

«Высший» курс. Здесь намечена довольно широкая и гибкая программа, цель которой — подготовить учащихся для обучения в университете. Курс слагается из трех частей: элементарного анализа (аналитическая геометрия плюс элементы дифференциального и интегрального исчисления полиномов), теории вероятностей и статистики, «дискретной математики». Последняя должна охватывать: элементы логики, конечные группы, действия над множествами, векторы и матрицы, линейное программирование и др.

Ввиду существенного отличия предлагаемых программ от действующих рекомендуется план осуществлять постепенно. Приняты меры к составлению учебных и методических пособий. Ю. М. Гайдук

3410. Преподавание элементарной математики. Розенбаум (The teaching of elementary mathematics. Rosenbaum E. P.), Scient. Amer., 1958, **198**, № 5, 64—73 (англ.)

Критика содержания и методов преподавания курса математики в американской средней школе. Краткая характеристика новой точки зрения на реформу преподавания школьного курса математики. Основные положения проекта реформы, предложенного комиссией по математике при Иллинойском (США) университете. Согласно этому проекту алгебра в средней школе должна преподаваться как абстрактно-дедуктивная система. В области геометрии предполагается радикальное изменение всего курса. Прежде всего должно быть резко сокращено число теорем, которые раньше доказывались (до 12, вместо 100), так как многие из них можно получить, используя материал из курса алгебры. Однако комиссия не предполагает полного исключения методов доказательств классической геометрии Евклида.

Относительно тригонометрии (третий год обучения) говорится, что здесь больше следует обращать внимание на применение тригонометрии к векторному исчислению, чем к решению треугольников.

На четвертом году обучения учащимся, которые будут продолжать изучать математику, предлагается два полугодовых курса: 1) элементарный анализ (изучение функциональной зависимости с новой точки зрения, изучение полиномов, показательной, логарифмической и тригонометрических функций, понятие о пределе, дифференцирование и интегрирование полиномов); 2) введение в теорию вероятности и математическую статистику.

Затем приводится описание практической работы двух учителей в штате Иллинойс, которые осуществили эту программу, и критические замечания некоторых профессоров. В заключение говорится о подготовке учителей к преподаванию измененного курса математики: организуются курсы при университетах, издаются новые программы, учебники и т. п. Е. В. Вандышева

3411. Преподавание математики в американских школах. Джонс (Mathematics teaching in American classrooms. Jones A. W.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 5, 344—349 (англ.)

Критические замечания австралийского педагога относительно системы преподавания математики в американской школе. Е. В. Вандышева

3412. Геометрия четырех измерений. Завроцкий (The geometry of four dimensions. Zawrotsky A.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 6, 424 (англ.)

Сведения об учебном кинофильме, содержащем 988 сечений четырехмерных тел гиперплоскостями. П. Я. Дорф

3413. Изменение взгляда на тригонометрию как учебный предмет. Розенберг (The changing concept of trigonometry as a school subject. Rosenberg Herman), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 246—252 (англ.)

Критика содержания курса тригонометрии в американской средней школе. Рекомендуется вместо решения треугольников больше внимания обратить на исследования тригонометрических функций, на усиление строгости изложения (логические доказательства) и на применения тригонометрии к векторному исчислению. За аргумент тригонометрической функции следует принимать любое действительное или комплексное число. Указывается на возможность использования методов математической логики для доказательства тригонометрических тождеств. Е. В. Вандышева

3414. Новый метод обучения многочисленных аудиторий основам математики. Райт (A new plan for instructing large classes in basic mathematics. Wright Martin), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 6, 425—426 (англ.)

Излагаются данные опыта по преподаванию тригонометрии аудитории в 350 человек через посредство кинофильмов и телевидения, проделанного в университете в Хаустоне (США) в 1957 г. Заключение об успешности эксперимента еще не принято. П. Я. Дорф

3415. Заметки о состоянии и перспективах применения кинофильмов и телевидения в преподавании математики. Джонс (Notes on the status and future of films and TV in collegiate mathematics education. Jones Phillip S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 6, 403—416 (англ.)

Обзор деятельности по внедрению в преподавание математики в США кино и телевидения за 1949—1958 гг. Автор формулирует выводы: 1) использование учебных фильмов и телепередач значительно усиливает педагогическое воздействие учителя; 2) следует организовать специальные «телевизионные» классы по изучению математики; 3) очное обучение следует сохранять, но оно должно переплетаться с работой по телевизору в определенных пропорциях. Наиболее одаренные студенты могут самостоятельно работать с экраном.

Отмечается ряд недостатков обучения через фильмы и телевизор: а) отсутствие общения учащихся, взаимодействия, дискуссий. Для устранения этих пробелов намечены формы связи между членами каждой группы, следящей за фильмами; к фильму прилагаются контрольные вопросы и упражнения; предусматриваются при демонстрации фильмов «паузы для обдумывания»; наконец, особо трудные части курса повторяются; б) рядовым студентам телевизионные материалы даются иногда труднее, чем при обычных лекционных занятиях.

Учителя, используя фильмы, могут улучшать свою работу. Телепередачи по математике изучают широкие круги, для которых на экране можно создать гибкую систему математического образования.

К статье приложены: хронологическая таблица телепередач и библиография (42 назв.).

Примечание референта. Богатый опыт математического образования в США посредством телевидения и кино заслуживает пристального внимания нашей научно-педагогической общественности. П. Я. Дорф

3416. Обучение студентов 1-го курса математике по телевидению. Эллиотт (Teaching freshman mathematics by television. Elliott H. Margaret), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 6, 440—443 (англ.)

Пропагандируется опыт Вашингтонского университета (США), проделанный в 1956—1957 гг. По телевизору было прочитано 58 лекций «курса 115», т. е. курса элементарной математики для студентов 1-го курса инженерных и архитектурных специальностей; телевизионные лекции дополнялись устными консультациями.

Примечание референта. Тенденциозно-пропагандистский тон статьи затрудняет возможности объективной оценки полезности этого опыта. П. Я. Дорф

3417. Телевизионная деятельность Отделения математики университета Алабамы. Джонс (Television activity, Department of Mathematics, University of Alabama. Jones Ayrlene McGahey), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 6, 421—424 (англ.)

С 1956 г. университет Алабамы совместно с Политехническим институтом и колледжем использует телевидение для распространения научных математических сведений. Передачи ведутся три раза в неделю по трем станциям. Виды передач:

1. Популярные лекции. Например: «Софизмы и парадоксы», «Понятие бесконечности», «Электронные счетные машины», «Двоичная числовая система», «Нуль не есть ничто», «Числовые суеверия», «Профессиональные возможности в математике», «Что такое математика?», «Игры и развлечения» и др.

2. Курсы математики для колледжей. Содержат сведения по алгебре и тригонометрии.

3. Экспериментальное обучение. Так называют передачи по элементарной математике, которые читаются в течение 30 мин., а затем перед слушателями-зрителями обсуждаются со студентами (главным образом, с первокурсниками).

4. Обзорные курсы математики для выпускников высшей школы.

5. Лекции по расширенной программе для высшей школы. Например: «Проблема разрешимости», «Переход от арифметики к алгебре», «Основания геометрии», «Учение о функциях и графиках».

Указывается, что телевидение следует рассматривать как новый способ обучения, не заменяющий обычных методов, но разумно их сопровождающий. П. Я. Дорф

3418. Основы математики старших классов средней школы. Спир (Basic high school mathematics. Spear Joseph), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 6, 429—430 (англ.)

По инициативе одного инженерного объединения Северо-восточный университет США (Бостон, Масс.) с 1957 г. еженедельно передает по телевидению обзорные лекции по математике по программе старших классов средней школы. Кроме того, с недавнего времени регулярно передаются математические лекции и упражнения с целью повышения квалификации учителей. П. Я. Дорф

3419. Проведение тестов распространяется. Калин (Making a test go further. Kalin Robert), Math. Teacher, 1958, **51**, № 5, 388—391 (англ.)

Пропагандируется метод тестов, разъясняется методика их проведения. Е. В. Вандышева

3420. В школьном математическом кружке при МГУ. Арнольд В. И., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 241—245

Краткое изложение двух занятий кружка на темы «вариация кривой» и «гармонические функции», проведенных автором. Ю. М. Смирнов

3421 К. Математическое введение в медицинскую физику и биологию. Гюльфи (Initiation mathématique à la physique médicale et à la biologie. Guelfi Julien. Paris, Masson et Cie, 1958, 220 p., ill., 4000 fr.) (франц.)

Книга предназначена для студентов-медиков первых лет обучения, студентов-фармацевтов первого и второго курса, биологов и будущих инженеров. Она содержит математические сведения, которые могут потребоваться в перечисленных специальностях, но часто бывают забыты.

Главы: 1. Элементарная алгебра; 2. Элементарная геометрия; 3. Озаглавлена «Дополнение алгебры», хотя в ней дано понятие производной; с ее помощью исследуются графики многочленов; 4. Элементарная тригонометрия; 5. Дополнение элементарной геометрии; эллипс, гипербола, парабола, их общие свойства; 6. Дополнение анализа и алгебры: интеграл, определенный и неопределенный, геометрические приложения интеграла, ряды, формула Тейлора и Маклорена, теория функций комплексного переменного; 7. Векторная алгебра и векторный анализ; 8. Дифференциальная геометрия; 9. Ряды Фурье; 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения; 11. Приложения математики в теоретической механике; 12. Теория вероятностей и математическая статистика.

Каждая глава сопровождается примерами, подобранными к тем специальностям, для которых предназначена книга. Р. Д. Бачелис

3422 К. Чистая математика. Курс повышенного уровня. Гласс, Филлипс (Pure mathematics. Advanced level. Glass Reuben Casper, Phillips Michael Abiola. London, Scient. and Educat. Publ. Co., 1958, iv, 60 pp., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 431, 9 (англ.)

3423 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Часть 4. Упражнения с решением к 3-й части. 9-е изд. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil 4, Hf 5—6. Übungsaufgaben mit Lösungen zu Teil 3. 9. Aufl. Rothe R. Leipzig, Teubner, 1958, 108, S., ill., 3.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 18, 1260 (нем.)

3424 К. Высшая математика. Для учит. ин-тов. Долапчиев, Чобанов, Цветков (Висша математика. За учит. инст. Долапчиев Бл., Чобанов Ив., Цветков Цв. София, Нар. просв., 1957, 256 с., ил., 6.40 лв.), Бълг. книгопис., 1957, **61**, № 11, 8 (болг.)

3425 К. Учебник математики для высших учебных заведений. Средняя ступень: арифметика. Тетрадь решений. Ханксленден, Хенце (Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Mittelstufe: Arithmetik. Lösungsh. 6. Aufl. Hanxleden Eberhard von, Hentze Rudolf. Braunschweig — Berlin — Stuttgart, Vieweg und Sohn, 1957, 6, 80DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 5, 309 (нем.)

3426 К. Курс высшей математики (Учебное пособие для с.-х. вузов). Теуш В. Л. М., «Сов. наука», 1958, 270 стр., илл., 5 р. 50 к.

Состоит из частей: 1. Функции и графики; 2. Дифференциальное исчисление; 3. Интегральное исчисление; 4. Введение в вариационную статистику.

См. также: 3509—3511, 3523 К—3526 К, 3528, 3783 К, 3843 К, 3883, 3896 К—3901 К, 3914 К, 4022, 4071—4076, 4078, 4136 К.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

3427. Математическая логика и вычислительная математика. Марков А. А., Вестн. АН СССР, 1957, № 8, 21—25

В последнее время определилась плодотворная взаимосвязь между двумя науками — математической логикой и вычислительной математикой. В реферируемой статье обсуждаются вопросы о сути этой взаимосвязи, ее влиянии на развитие науки, ее практических последствиях. Подчеркивается органичность взаимосвязи между математической логикой и вычислительной математикой и то, что обе эти ветви математики оказывают существенное влияние на развитие всей мате-

матики в целом. По мнению автора, тесный контакт между этими двумя дисциплинами в дальнейшем будет усиливаться. С. И. Адян

3428. Вычислимые функционалы. Гжегорчик (Computable functionals. Grzegorczyk A.), Fundam. math., 1955, **42**, № 1, 168—202 (англ.)

Пусть N — множество натуральных чисел, а F — множество функций одного аргумента, определенных на N и принимающих значения из N. Автор рассматривает функционалы $\Phi<f_1,\ldots,f_n>(x_1,\ldots,x_k)$, зависящие от функций $f_1,\ldots,f_n\in F$ и чисел $x_1,\ldots,x_k\in N$ и принимающие в качестве значений натуральные числа. Класс K вычислимых функционалов есть наименьший класс функционалов этого типа, удовлетворяющий следующим условиям:

A. Класс K содержит следующие исходные функционалы: 1) тождественный функционал $u<f>(x)=f(x)$; 2) постоянные функционалы $-<f>(x,y)=x-y$, $T<f>(x,y)=x^y$, $S<f>(x)=x+1$.

B. Класс K замкнут относительно:

1) операции подстановки функционала в функционал вместо числовой переменной; 2) операций отождествления одноименных переменных; 3) операции эффективного минимума, если $\Phi\in K$ и

$$\forall f_1,\ldots,f_n\in F\,\forall u_1,\ldots,u_k\in N\,\exists x\in N\,[\Phi<f_1,\ldots,f_n>(x,u_1,\ldots,u_k)=0],$$

то к классу K принадлежит и функционал Ψ, определенный уравнением

$$\Psi<f_1,\ldots,f_n>(u_1,\ldots,u_k)=\mu x[\Phi<f_1,\ldots,f_n>(x,u_1,\ldots,u_k)=0].$$

В § 2 устанавливается ряд свойств, которыми обладают функционалы класса K и некоторых его подклассов. В частности, 1) для любой вычислимой функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ существует вычислимый постоянный функционал Φ, равный f, т. е. такой, что, каковы бы ни были $g_1,\ldots,g_n\in F$, $\Phi<g_1,\ldots,g_n>(x_1,\ldots,x_k)=f(x_1,\ldots,x_k)$; 2) всякий функционал Φ класса K вычислим в смысле Банаха-Мазура, т. е., каковы бы ни были вычислимые функции двух аргументов $G_1,\ldots,G_k$, функция

$$f(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_l)=\Phi<G_{1x_1},\ldots,G_{kx_k}>(y_1,\ldots,y_l),$$

где $G_{ix}(y)=G_i(x,y)$, вычислима; 3) для любого функционала $\Phi\in K$ существует функционал $\Omega_\Phi\in K$ такой, что для любых $f_1,\ldots,f_n$, $g_1,\ldots,g_n\in F$, $x_1,\ldots,x_k\in N$ выполняется следующее условие: если $g_i(u)=f_i(u)$ для $u\leqslant\Omega_\Phi<f_1,\ldots,f_n>(x_1,\ldots,x_k)$, то $\Phi<f_1,\ldots,f_n>(x_1,\ldots,x_k)=\Phi<g_1,\ldots,g_n>(x_1,\ldots,x_k)$.

В § 3 доказана следующая теорема о равномерности: Пусть $\mathfrak{z}(f)$ — множество функций, ограниченных функцией f. Для всякого функционала $\Phi\in K$ существует функционал $\omega_\Phi\in K$ такой, что для любых $x_1,\ldots,x_k\in N$ и $f\in F$ выполняется следующее условие: каковы бы ни были $g_1,\ldots,g_n$, $h_1,\ldots,h_n\in\mathfrak{z}(f)$, если $g_i(u)=h_i(u)$ для $u\leqslant\omega_\Phi<f>(x_1,\ldots,x_k)$, то $\Phi<g_1,\ldots,g_n>(x_1,\ldots,x_k)=\Phi<h_1,\ldots,h_n>(x_1,\ldots,x_k)$.

В заключительном параграфе рассматриваются некоторые вопросы конструктивного анализа, связанные с этой теоремой.

Вещественное число a автор называет вычислимым, если существует вычислимая функция f, представляющая a, т. е. такая, что для любого n $\left|a-\frac{f(n)}{n+1}\right|<\frac{1}{n+1}$. Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}$ называется вычислимой, если существует вычислимая функция f такая, что для любых k и n $\left|a_k-\frac{f(k,n)}{n+1}\right|<\frac{1}{n+1}$.

Вещественная функция φ называется вычислимой, если существует вычислимый функционал Φ такой, что если $f(x)$ представляет число a, то $\Phi<f>(x)$ представляет число $\varphi(a)$. Определенные таким образом вещественные числа, последовательности и функции являются неотрицательным. Однако легко перестроить определения так, чтобы ими охватывались и отрицательные числа, последовательности и т. д. Установлен ряд свойств вычислимых вещественных функций, в частности:

а) если φ вычислима, то φ вычислимо равномерно непрерывна в любом сегменте;

б) максимум вычислимой функции φ на сегменте является вычислимой функцией конечных точек сегмента;

в) если φ вычислима и строго монотонна в сегменте $[a,b]$, то φ^{-1} вычислима относительно функций, представляющих a и b;

г) существует вычислимая функция φ, не дифференцируемая ни в одной точке.

Формулируется ряд проблем. Н. М. Нагорный

3429. Заметка о вычислимых функционалах. Клини (A note on computable functionals. Kleene S. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 3, 275—280; Indagationes math., 1956, **18**, № 3, 275—280 (англ.)

Автор указывает на эквивалентность определения вычислимого функционала по Гжегорчику (реф. 3428) с определением общерекурсивного функционала, содержащемся в его книге «Введение в метаматематику» (русское изд. 1957 г.). Затем он показывает, что теорема, которую Гжегорчик в своей статье называет теоремой о равномерности, может быть доказана несколько проще и короче с помощью уже известных теорем Клини, относящихся к нормальной форме вычислимых функционалов, и брауэровской «теоремы о веере».

Наконец, Клини решает некоторые задачи, предложенные Гжегорчиком в качестве открытых. Он приводит пример функционала вида $\varphi^{(\alpha)}=\lim_{m\to\infty}\psi(\widetilde{\alpha}(m))$, где ψ — частично рекурсивна, обладающего свойством Банаха-Мазура и не являющегося вычислимым функционалом. Кроме того, автор указывает на некоторые неточности в статье Гжегорчика. A. Grzegorczyk

3430. О гипотезе Чёрча, служащей основой для исследования так называемых неразрешимых математических проблем. Калмар (Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjaul szolgáló Church-féle hipotézisről. Kalmár László), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, **7**, № 1, 19—38 (венг.)

Содержание работы было изложено автором на 3-м Всесоюзном математическом съезде в Москве.

3431. Замечание о функциях, измеримых по Брауэру. Ротселар (A remark on brouwermeasurable functions. Rootselaar B. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 5, 579—580; Indagationes math., 1956, **18**, № 5, 579—580 (англ.)

Автор использует терминологию, введенную в книге Хейтинга (Heyting A., Intuitionism, an introduction. Amsterdam, 1956), и опирается на изложенные в этой книге результаты. Основным содержанием заметки является доказательство того, что сумма и произведение двух (неограниченных) измеримых функций (в смысле Хейтинга) есть измеримая функция.

Доказана также теорема: Всякая измеримая функция почти ограничена, т. е. если f — измеримая функция, заданная на подмножестве Q множества E, то для каждого n существует измеримый район A_n (см. § 5.1.4 цитированной выше книги Хейтинга) такой, что $mA_n<2^{-n}$ и f ограничена на $Q\cap(E-A_n)$. Интеграл от ограниченной измеримой функции $f(x)$ определяется равенством

$$\int_E f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}2^{-n-1}\sum_{h=-l_n}^{K_n}hm\,V_{nh}.$$

Интеграл от любой измеримой функции определяется равенством

$$\int f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_k f^+(x)\,dx+\lim_{l\to\infty}\int_l f^-(x)\,dx.$$

Измеримая функция называется суммируемой, если существует ее интеграл.

Попутно автор указывает, что, согласно частному сообщению Хейтинга, лемма о том, что разность двух суммируемых функций есть суммируемая функция, и ряд теорем, опирающихся на эту лемму, доказанные в книге Хейтинга в предположении, что рассматриваемые функции почти везде определены, сохраняют силу, если это предположение заменить предположением о том, что обе рассматриваемые функции имеют одну и ту же область задания. Э. С. Орловский

3432. Интерпретация двух систем модальной логики. Прайор (The interpretation of two systems of modal logic. Prior A. N.), J. Comput. Systems, 1954, **1**, 201—208 (англ.)

Автор дает интерпретацию модальных логик Льюиса—фон Райта и Лукасевича (РЖМат, 1955, 585) внутри C—N—δ—Π исчисления высказываний, где C — знак импликации, N — отрицания, δ — переменной логической функции, а Π — кватор общности. Затем он обсуждает приложения полученной интерпретации к двум аристотелевским тезисам и к расхождениям между работами Лукасевича и Пэрри (Parry, J. Symbolic Logic, 1939, **4**, 137—154). A. Rose

По реферату из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 554

3433. Замечания к натуральной дедукции. Бет (Remarks on natural deduction. Beth E. W.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 322—325; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 322—325 (англ.)

Строится формальная система F, в которой выводом формулы B исчисления предикатов из формулы A является построенная некоторым образом закрытая таблица. Эта система родственна генценовскому исчислению секвенций. В ней, в частности, можно ответить на вопрос, существует ли вывод B из A, содержащий не более n введений кванторов общности и существования. По утверждению автора, в ней особенно легко доказывается ряд математических теорем. В. А. Янков

3434. Другой вариант натуральной дедукции. Копи (Another variant of natural deduction. Copi Irving M.), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 1, 52—55 (англ.)

Вносится поправка в книгу автора «Symbolic logic» (New York, 1954). Ограничения, налагаемые на переменные для возможности введения квантора общности в натуральной дедукции, содержащиеся в книге, создают неудобства при некоторых выводах. Указываются новые ограничения на переменные. В связи с этим передоказывается метатеорема V о законности снятия квантора существования в формальной системе RS_1. В. А. Янков

3435. Система постулатов для исчисления предикатов. Порт (Un système de postulats pour le calcul des prédicats. Porte Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 8, 817—819 (франц.)

Указывается некоторая система аксиом и правил вывода, которая эквивалентна системе, положенной Куайном в основу исчисления предикатов первого порядка и его Mathematical Logic (1940). Указываемая система, как и система Куайна, использует modus ponens в качестве единственного правила вывода и проще, чем система Куайна, в отношении ограничений, накладываемых на схемы аксиом. В. С. Чернявский

3436. Редукции в теории типов. Хинтикка (Reductions in the theory of types. Hintikka K. Jaakko J.), Acta Philos. Fenn., 1955, **8**, 57—115 (англ.)

Введя надлежащим образом подобранные вспомогательные символы предикатов, исчисления предикатов высших ступеней можно свести к исчислению предикатов первой ступени (Schmidt A., Math. Ann., 1951, **123**, 187—200). Сходным образом автор 1) сопоставляет каждой формуле K простой теории конечных типов формулу $\xi(K)$ исчисления предикатов первой ступени так, что $\xi(\sim K)$ есть $\sim\xi(K)$ и 2) строит формулу D с одной связанной предикатной переменной низшей ступени; эта формула выражает тот факт, что вспомогательные предикаты представляют понятия простой теории конечных типов. Он показывает, что $D \supset \xi(K)$ истинно тогда и только тогда, когда K истинно в простой теории конечных типов. Это устанавливает весьма правдоподобный результат, что с точки зрения истинности простая теория конечных типов сводится к исчислению предикатов второй ступени. В его изложении аксиомы образования классов вводятся неформально в терминах произвольных классов символов, которые обозначают связанные предикатные переменные bD. Для формализованных аксиом образования классов автор эскизно излагает метод замещения формулы D формулой исчисления предикатов первой ступени. Это является ответом на вопрос, поставленный Крейселом (РЖМат, 1959, 2255) в связи с его выводом теоремы Хенкина о полноте простой теории конечных типов (Kreisel G., J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 81—91) из плотности исчисления предикатов первой ступени. G. Kreisel

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 119

3437. Исчисление предикатов и пустая область объектов. Куайн (Quantification and the empty domain. Quine W. V.), J. Symbolic Logic, 1954, **19**, № 3, 177—179 (англ.)

Исчисление предикатов первой ступени обычно строится так, чтобы формулы, выводимые в нем, были общезначимыми в любой непустой области объектов. В этом случае значение по истинности формулы f, не содержащей свободных вхождений переменной x, совпадает со значением по истинности формулы $(x)f$.

При построении исчисления предикатов первой ступени, допускающего в качестве области изменения переменных и пустую область, возникает следующая проблема: если f — формула, выражающая ложное суждение и не содержащая свободных вхождений переменной x, то что приписать в качестве значения по истинности формуле $(x)f$? С одной стороны, естественно считать формулу $(x)f$ ложной, так как такое приписывание квантора является «несобственным» и не должно отражаться на смысле формулы. С другой стороны, всякое суждение о всеобщности, относящееся к пустому множеству, естественно считать истинным.

Автор предлагает принять второе толкование, т. е. считать формулу $(x)f$ истинной, и показывает, что в качестве исчисления предикатов, допускающего пустую область объектов, можно взять исчисление из его книги Mathematical logic (Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1951), добавив в нем к аксиоме, $\vdash \ulcorner (\alpha)\Phi \supset \Phi\frac{\beta}{\alpha}\urcorner$ требование, чтобы α свободно входила в Φ (здесь $\Phi\frac{\beta}{\alpha}$ означает результат подстановки β вместо свободных вхождений переменной α в Φ). В этом исчислении формула $(x)f \supset f$ уже не будет аксиомой, и потому f нельзя будет вывести из $(x)f$. Н. М. Нагорный

3438. Применение теории игр к некоторым вопросам математической логики. Эренфёйхт (Application of games to some problems of mathematical logic. Ehrenfeucht A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 1, 35—37 (англ.; рез. русск.)

Пусть T_1 — аксиоматическая теория неравенства. T_2 — теория сложения и умножения для порядковых чисел; и пусть $x_1 = \omega^{\omega}$, $x_2 = \omega^{\omega^{\omega}}$, $x_3 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$. С использованием понятий из теории игр устанавливается следующая теорема: Порядковое число y определимо в T_i тогда и только тогда, когда $y < x_i (i = 1, 2, 3)$.

Теорема остается справедливой, если в теорию T_i ввести понятие конечной совокупности. Из резюме автора

3439. Порядковые дедуктивные модели. Куэста (Modelos deductivos ordinales. Cuesta N.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 4, 211—223 (исп.)

Пусть дано упорядоченное множество M с отношением порядка $<$.

Рассматривается класс V истинных предложений вида $a < b$, где $a, b \in M$ и отношение $R < 'S$ между элементами V, которое имеет место в том и только в том случае, если S выводимо применением одного только закона транзитивности из некоторой системы предложений класса V, содержащей R. V вместе с отношением $<'$ является частично упорядоченным множеством, для которого автор предлагает графическое представление. Для случая, когда M конечно, отношение $<'$ разрешимо в V, и дается полный обзор выводов S из R с помощью одного только закона транзитивности из аксиом вида $a < b$, где $a, b \in M$ и не существует c, лежащего в M между a и b. Систему $(V, <')$ автор называет дедуктивной моделью. Приводятся некоторые очевидные свойства $(V, <')$ для случаев, когда в упорядочении системы $(M, <)$ имеются смежные элементы, а также, когда это упорядочение плотно.

А. С. Есенин-Вольпин

3440. Эффективная вычислимость выигрышных стратегий. Рабин (Effective computability of winning strategies. Rabin Michael O.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 147—157 (англ.)

Рассматриваются выигрышно-проигрышные игры двух лиц с полной информацией без случайных ходов. Определение таких игр, данное Гейлом и Стюартом (РЖМат, 1956, 4717), уточняется до понятия эффективно осуществимой (actual) игры, с использованием понятия общерекурсивной функции. Известно (Neumann J., Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton, 1944, 2nd ed. 1947, 112—128), что для всякой игры рассматриваемого типа один из противников имеет выигрывающую стратегию. Приводится пример эффективно осуществимой игры, в которой вычислимых выигрышных стратегий не существует. Пусть g есть общерекурсивная функция, область значений которой есть простое множество (Post E., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 284—316). Рассмотрим следующую игру: первый игрок выбирает натуральное число i, а затем второй—натуральное число j, затем первый—натуральное число k. Если $k = g(i+j)$, то выиграл первый игрок, в противном случае выиграл второй. Легко видеть, что для второго игрока существуют выигрышные стратегии, но не существует вычислимых выигрышных стратегий.

Г. С. Цейтин

3441. Об ортогональных продолжениях булева полиномиала и его приложениях. II. Сампэй (On the orthogonal expansion of the boolean polynomial and its applications. II. Sampei Yoemon), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1953, **1**, № 2, 51—58 (англ.)

В первой части статьи (J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. I, 1950, **11**, 113—125) автор ввел некоторые нормальные представления формул исчисления предикатов первой ступени, названные им ортогональными продолжениями (orthogonal expansion). С их помощью было показано, что в случае конечной области изменения предметных переменных аксиомы исчисления предикатов характеризуют кванторы как конечные конъюнкции (соответственно дизъюнкции).

В настоящей статье проводятся аналогичные рассмотрения для случая бесконечной области изменения предметных переменных.

Н. М. Нагорный

3442. Теорема о неклассических функциональных исчислениях. Сикорский Р., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 10, 636—640

Пусть $\mathfrak{X}$ — топологическое пространство, $C(\mathfrak{X})$ — алгебра замыканий всех подмножеств множества $\mathfrak{X}$, а $H(\mathfrak{X})$ — алгебра всех открытых подмножеств $\mathfrak{X}$ (РЖМат, 1955, 4824). Если a формула функционального исчисления (S^*_λ Льюиса (функционального исчисления S^*_λ Гейтинга; позитивного функционального исчисления S^*_π), то $I_0, C(\mathfrak{X}))\, \Phi_a$ (то $(I_0, H(\mathfrak{X}))\, \Phi_a$) обозначает функционал, полученный из a путем интерпретации индивидуальных переменных как переменных, пробегающих множество I_0 натуральных чисел, а функциональных переменных k аргументов как функций k аргументов из I_0 в $C(\mathfrak{X})$ ($H(\mathfrak{X})$). Автор пишет $(I_0, C(\mathfrak{X}))\, \Phi_a = (\mathfrak{X})$ (или $(I_0, H(\mathfrak{X}))\, \Phi_a = \mathfrak{X}$), если этот функционал тождественно равен $\mathfrak{X}$. В упомянутой статье Расевой и Сикорского доказано, что существует топологическое пространство $\mathfrak{X}_\lambda(\mathfrak{X}_\lambda; \mathfrak{X}_\pi)$ такое, что для всякой формулы a исчисления $S^*_\lambda(S^*_\chi; S^*_\pi)$ a доказуема в $S^*_\lambda(S^*_\chi; S^*_\pi)$ тогда и только тогда, когда $(I_0, C(\mathfrak{X}_\lambda))\, \Phi_a = \mathfrak{X}_\lambda$ ($(I_0\ H(\mathfrak{X}_\lambda))\, \Phi_a = \mathfrak{X}_\chi$; $(I_0, H(\mathfrak{X}_\pi))\, \Phi_a = \mathfrak{X}_\pi$). Однако не было выяснено, можно ли считать, что пространство $\mathfrak{X}_\lambda(\mathfrak{X}_\chi; \mathfrak{X}_\pi)$ метризуемо. Автор дает положительный ответ на этот вопрос.

Н. М. Нагорный

3443. Логика без типов и модальность. Беман (Die typenfreie Logik und die Modalität. Behmann H.), Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 88—96. North—Holland Publishing Co., Amsterdam; Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (нем.)

Автор выдвигает возражения против модальных логик Льюиса и трехзначной модальной логики Лукасевича. Он строит модальную логику, интерпретация которой основана на понятии «всех возможных множеств», и обсуждает необходимость использования значения истинности «бессмыслица» в дополнение к двум обычным значениям истинности. Он продолжает обсуждать точку зрения, согласно которой существует ровно двенадцать различных модальностей.

A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 386.

3444. Арифметика и модальная логика. Лукасевич (Arithmetic and modal lagic. Łukasiewicz Jan), J. Comput. Systems, 1954, **1**, 213—219 (англ.)

Автор рассматривает введение модальных связок в теорию равенства, основанную на двух аксиомах $\Theta(a, a)$, $(\Theta(a, b) \supset (\Phi(a) \supset \Phi(b)))$, где Θ обозначает равенство, а Φ — одноместный числовой предикат. Он показывает, что это связано с некоторыми трудностями, и использует Ł-модальную систему (РЖМат, 1955, 585) для того чтобы преодолеть их. Затем он прилагает Ł-модальную систему к арифметике, с тем чтобы обсудить смысл так называемого «квантора существования», и высказывает точку зрения, согласно которой формулу вида $\exists a\, \Phi(a)$, для того чтобы выразить ее словами, нужно перевести в эквивалентную формулу $\neg A\, a \neg \Phi(a)$.

A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 554.

3445. Основания новой общей семантики. Линс (The supports of the new general semantics. Lins Mario), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 115—120 (англ.)

Излагаются взгляды представителей так называемой «общей семантики» (Коржибского и др.), определяемой как «исследование человеческого поведения, особенно в его отношении к символам и словам (языку)». Общая семантика противопоставляется аристотелевой логике. Статья носит философский характер. Математических результатов в ней не содержится.

Д. Г. Лахути

3446. Об адэкватной постановке задач по основаниям математики. Виттенберг (Über adäquate Problemstellung in der mathematischen Grundlagenforschung. Wittenberg A.), Dialectica, 1953, **7**, 232—254 (нем.)

С точки зрения автора, каждое из распространенных воззрений на основания математики нуждается в некоторых догматических предположениях об определенной реальности—реальности математических объектов или формул, выводимых в формальных системах. Поэтому он предлагает проводить теоретико-познавательное исследование понятий, относительно которых заранее не предполагается, что они будут соответствовать какой-либо реальности. A. Heyting

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 593.

3447. **Замечания к работе Александра Виттенберга «Об адэкватной постановке задач по основаниям математики». Бернайс** (Bemerkungen zu der Betrachtung von Alexander Wittenberg: Über adäquate Problemstellung in der mathematischen Grundlagenforschung. Bernays P.), Dialectica, 1954, 8, 147—151 (нем.)

3448. **Несколько замечаний о статье Александра Виттенберга «Об адэкватной постановке задач по основаниям математики». Гуггенхеймер** (Quelques remarques concernant l'article de M. Alexandre Wittenberg: Über adäquate Problemstellung in der mathematischen Grundlagenforschung. Guggenheimer H.), Dialectica, 1954, 8, 145—146 (франц.)

3449. **О полноте множеств решающих элементов. Мартин** (On completeness of decision element sets. Martin Norman M.), J. Computing Systems, 1953, **1**, 150—154 (англ.)

3450 К. **О некоторых классификациях систем отношений. Фраиссе** (Sur quelques classifications des systèmes de relations. Fraïssé Roland, Thèse, Université de Paris, 1953, iii+viii+152 pp.) (франц.)

В работе изучаются n-местные отношения элементов множества E и мультиотношения (конечные или пустые наборы этих отношений). n-местное отношение с базой E есть некоторое отображение E^n в множество, состоящее из двух точек $\{+, -\}$. В первой части работы (гл. 1—6) изучаются типы отношений; во второй части (гл. 7—9) изучаются связи между полиотношениями (упорядоченными парами, каждая из которых состоит из мультиотношения и конечного или пустого множества элементов E) и некоторыми логическими теориями. Изучение полиотношений сводится к изучению мультиотношений некоторым приемом, посредством которого основные понятия, касающиеся мультиотношений, распространяются и на полиотношения.

Основная цель автора заключается в классификации отношений; он вводит несколько видов эквивалентностей, упорядочений и т. д.; особо выделяется, в частности, понятие родства между мультиотношениями и полиотношениями.

Формулируется ряд проблем и гипотез, связанных с некоторыми классическими проблемами (например, проблемой существования линейного множества мощности $\aleph_2$)

По реферату из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 296.

3451 К. **Внутренняя ограниченность формализмов. Ладриер** (Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques. Ladrière Jean (Collect. logique mat., B2). Louvain. E. Nauwelaerts; Paris, Gauthier-Villars, 1957, 715 p.) (франц.)

Монография посвящена систематизации известных «отрицательных» метаматематических результатов в теории формальных систем. Значительная часть ее отведена вопросам, связанным с теоремой Гёделя о существовании формально неразрешимых предложений внутри всякой достаточно мощной непротиворечивой формальной системы. Приводятся все имеющиеся варианты доказательства этой теоремы (включая первоначальное доказательство самого Гёделя), подробно исследуется эвристическая роль парадоксов в различных доказательствах. Излагаются обобщения этой теоремы, данные Россером, Клини и другими авторами, в которых требование ω-непротиворечивости заменяется более слабым требованием простой непротиворечивости, и расширяется класс формальных систем, для которых утверждение теоремы сохраняет силу. В основе фактов несколько иного типа, излагаемых в монографии и связанных с теоремой Гёделя, лежит установленное Гёделем следствие о невозможности доказательства непротиворечивости системы внутри самой системы. Такие факты свидетельствуют об ограниченности «рефлексивной» возможности формализмов. Сюда относится, в частности, результат Тарского (Tarski A., Symbolic Logic, 1939, **4**, 105—112), согласно которому внутри всякой формальной системы, удовлетворяющей некоторым общим требованиям, невозможно доказать некоторые свойства предиката, выражающего истинность (в смысле Тарского) формул для этой системы, а также близкий к нему результат Мостовского.

Другой круг вопросов, изложенных в монографии, относится к теории рекурсивных функций. Определение общерекурсивных и частично-рекурсивных функций дается во всех основных формах (без доказательства эквивалентности различных форм). Рассматриваются случаи алгоритмической неразрешимости проблем разрешимости для формальных систем. Излагается теория нормальных систем Поста, а также доказательство теорем Черча о λ-конверсии, из которых выводится неразрешимость проблемы разрешимости для узкого исчисления предикатов. Результаты Мостовского и Тарского о существенно неразрешимых системах (Mostowski A., Tarski A., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, 76), так же как и результаты, относящиеся к алгоритмическим проблемам для ассоциативных систем и групп, автор приводит без доказательства. В этой части монографии разбираются также некоторые вопросы из общей теории рекурсивных функций: теорема Клини о том, что множество схем, задающих общерекурсивные функции, не является рекурсивно перечислимым, аналогичные теоремы о машинах Тьюринга, сводимость проблем разрешимости по Тьюрингу, степени неразрешимости и др. Подробно изучается рекурсивно-проективная классификация множеств натуральных чисел Клини — Мостовского и построенные на ее основе обобщения теорем Чёрча и Гёделя. Несколько в стороне от основного материала монографии лежат рассмотренные в одной из последних глав вопросы, относящиеся к теории моделей формальных систем. Здесь излагается теорема Левенгейма и предложенная Сколемом релятивизация понятий математики, связанная с «парадоксом» Сколема, результаты Хенкина, Россера и Ван Хао о существовании нерегулярных моделей. Автор посвящает отдельную главу общим выводам, которые он делает на основе изложенных в монографии фактов. Новых математических фактов монография не содержит. Следует отметить, что в ряде мест монографии имеются неточности. Особенно это относится к определениям, которые иногда вследствие их неточности теряют смысл (например, из данного автором на стр. 87 определения рекурсивного множества объектов следует, что всякое счетное множество объектов является рекурсивным). Чтение монографии затрудняется тем, что автор использует мало употребительные обозначения. Приводится библиография (45 страниц), подробные указатели обозначений и предметный. Ю. Т. Медведев

3452 К. **Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики.** (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 51), М., 1958, 362 стр., илл., 16 р. 60 к.

См. также: 3670

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

3453. О неравенстве Кузьмина—Ландау для экспоненциальных сумм. Морделл (On the Kusmin—Landau inequality for exponential sums. Mordell L. J.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 3—9 (англ.)

Оцениваются по модулю суммы вида

$$S = \sum_{k=1}^{n} e(\alpha k),$$

где $e^{ix} = e(x)$; a_k — действительные числа, $k = 1, 2, \ldots, n$. Методом, основанным на элементарных преобразованиях конечных сумм, автор получает известные ранее оценки $|S|$ Попкена (Koksma J. F., Diophantische Approximationen, Berlin, 1936), Карамата (Karamata J., Tomic M., Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1950, **3**, 207—218) и некоторые уточнения этих оценок при дополнительных условиях. В. М. Архангельская

3454. О представлении чисел суммами обобщенных полигональных чисел. II. Ломадзе Г. А., Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартвелос ССР мецниереба ta академиа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, АН ГрузССР, 1957, **24**, 3—33

Вопрос о представлении чисел суммами обобщенных восьмиугольных чисел тесно связан с обобщенной ϑ-функцией.

При рассмотрении этого вопроса Стрифкерк (Streefkerk H., Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking $U = \sum_{i=1}^{3} (Ax_i^2 + Bx_i + C)$. Amsterdam, 1943) доказал, что

$$\vartheta_{00}^{s}(\tau;\ b,\ 2a) = \Theta_s(\tau) \quad (s = 3,\ a = 3,\ b \equiv \pm 2 \pmod 6,$$

$$M \geqslant 12). \qquad (1)$$

Автор замечает, что (1), вообще говоря, неверно, для $s > 3$. Уточняя (1), автор приводит достаточные условия для того, чтобы имело место тождество

$$\vartheta_{00}^{s}(\tau;\ -2,6) = \Theta_s(\tau) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{\lambda} A_s^{(t)}\, \vartheta_{00}^{s-4t}(\tau;\ -2,6)\ \vartheta_{21}^{4t}(\tau;\ -2,6), \qquad (2)$$

где $\lambda = \left[\frac{s-1}{3}\right]$ и $A_s^{(t)}$ — постоянные.

Доказательство тождества (2) приводится для $s = 4$, 5, 6 и 7. А. П. Лурсманашвили

3455. О формуле Сельберга для $A_k(n)$. Радемахер (On the Selberg formula for $A_k(n)$. Rademacher Hans), J. Indian Math. Soc., 1957, **21**, № 1-2, 41—55 (англ.)

В теории разбиений встречается числовая функция

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h,k)=1}} \omega_{nk} \exp(-2\pi i hn/k),$$

где ω_{hk} — некоторый корень 24-й степени из единицы, довольно сложного вида.

Сельберг получил и Уайтман (РЖМат 1957, 2004) исследовал простую формулу для $A_k(n)$

$$A_k(n) = \sqrt{k/3} \sum_{(3j^2+j)/2 \equiv -n \pmod k} (-1)^j \cos\frac{6j+1}{6k}\pi,$$

не содержащую корня ω_{hk}.

Автор дает новое более простое доказательство этой формулы и вычисляет функцию $A_k(n)$ для $k = p^\lambda$ (p — простое, $\lambda \geqslant 1$). Далее, положив $A_k(n) = B_k(\nu)$ ($\nu = 1 - 24n$), для $k = k_1 k_2$, $(k_1, k_2) = 1$, он устанавливает теорему умножения вида

$$B_{k_1}(\nu_1)\, B_{k_2}(\nu_2) = B_k(\nu),$$

где ν_1, ν_2, ν удовлетворяют некоторым определенным условиям. Г. А. Ломадзе

3456. О простых числах в арифметической прогрессии. Кнапповский (On prime numbers in an arithmetic progression. Knapowski S.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 57—70 (англ.)

Обозначим $\Delta(x, k, l) = \pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\ln u}$ при $(k,l) = 1$, A_k — множество нетривиальных нулей $\beta + i\gamma$ всех L-функций

$$(\bmod k),\ \delta(T) = \varepsilon(\sqrt{T}) - \varepsilon(\exp\sqrt{\ln\ln T}),\ \varepsilon(T) = \max_{\substack{\beta+i\gamma \in A_k \\ |\gamma| \leqslant T}} \beta.$$

Пусть $T \geqslant \max\{c_0;\ \exp\exp 150\, k^2 \ln^2 k\}$, где c_0 есть абсолютная постоянная, которую можно оценить сверху. Доказывается неравенство

$$\max_{1 \leqslant x \leqslant T} |\Delta(x, k, l)| \leqslant T^{\delta(T)} \left(\max_{1 \leqslant x \leqslant T} |\Delta(x, k, 1)| + \right.$$

$$\left. + \sqrt{T}\right) \exp\left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}\right\}.$$

К. А. Родосский

3457. О простых числах в некоторых арифметических прогрессиях. Артюхов М. М., Уч. зап. Сев.-Осетинск. гос. пед. ин-та, 1957, **21**, № 1, 3—21

3458. О так называемой плотностной гипотезе в теории дзета-функции Римана. Туран (On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta—function of Riemann. Turán P.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 31—56 (англ.)

Автор сводит известную плотностную гипотезу ($N(\alpha, T) < T^{2(1-\varepsilon)(1-\alpha)}$, $T \geqslant c(\varepsilon)$, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, где $N(\alpha, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в $\sigma > \alpha$, $|t| \leqslant T$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало) к локальным свойствам в распределении нулей. В частности, показано, что плотностная гипотеза есть следствие другой гипотезы (автор ее называет гипотеза B) а именно:

Существует функция $g(x)$, положительная и не возрастающая для $x > 0$ с условием

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Пусть $1/2 < x < 1$, $0 < \delta < 0{,}1\,(x - 0{,}5)$ и $x < a$ и допустим, что $\zeta(w)$ не обращается в нуль в прямоугольнике $a \leqslant u < 1$, $|v - \tau| \leqslant |\ln\tau/2|$, $w = u + iv$. Обозначая через $M(\tau, a, \delta)$ — число нулей в прямоугольнике $a - \delta \leqslant u \leqslant a$, $|v - \tau| \leqslant \delta/2$, имеем для $\tau > c(x, \delta)$ оценку $M(\tau, a, \delta) < \delta\, g(\delta) \ln\tau/2$. В приложении дано доказательство уже известного факта

$$M(\tau, a, \delta) \leqslant 0{,}71\delta \ln\tau/2.$$

А. И. Виноградов

3459. Инвариантная Z-функция арифметического поля функций. Лампрехт (Invariante Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper. Lamprecht Erich), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, 22, № 1-2, 71—83 (нем.)

K — конечное поле алгебраических чисел, x — трансцендентно над K, A — поле функций конечной степени над $K(x)$ („арифметическое поле функций"), $\mathfrak{p}$ — простой дивизор K. Продолжение $\mathfrak{P}$ дивизора $\mathfrak{p}$ на поле A называется функциональным простым дивизором (ф. п. д.), если существует такое $x \in A \setminus K$, что для всякого многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[x]$ имеет место тождество $|a_n x^n + \ldots + a_0|_{\mathfrak{P}} = \min(|a_n|_{\mathfrak{p}}, \ldots, |a_0|_{\mathfrak{p}})$, где $|\ |_{\mathfrak{P}}$ и $|\ |_{\mathfrak{p}}$ обозначают соответственно нормы дивизоров $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{p}$. $M\mathfrak{P}$ — проекция множества $M \subseteq A$, осуществленная оператором $\mathfrak{P}$, т. е. множество классов вычетов $\bmod \mathfrak{P}$, к которым принадлежат элементы M.

Ф. п. д. называется A-регулярным, если выполнены условия

(K) $K\mathfrak{P}$ алгебраически замкнуто в $A\mathfrak{P}$.

(U) Норма $|\ |_{\mathfrak{P}}$ неразветвлена над AK, т. е. индекс группы значений $|\ |_{\mathfrak{P}}$ в группе значений $|\ |_{\mathfrak{p}}$ равен 1.

(G) $g(A/K) = g(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P})$.

$B_A(x)$ — совокупность всех ф. п. д. поля A, продолжающих все конечные дивизоры $\mathfrak{p}$ поля K; $Z_{A\mathfrak{P}}(s)$ — Z-функция поля $A\mathfrak{P}$; $Z_A(s, x) = \prod_{\mathfrak{P} \in B_A(x)} Z_{A\mathfrak{P}}(s)$, $s = \sigma + it$, B'_A — совокупность всех A-регулярных дивизоров $\mathfrak{p}$ поля K, т. е. имеющих A-регулярные продолжения в поле A;

$$Z'_A(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in B'_A} Z_{A\mathfrak{P}}(s), \qquad (1)$$

где $\mathfrak{P}$ — регулярное продолжение $\mathfrak{p}$. $Z'_A(s)$ называется неполной инвариантной (т. е.) не зависящей от выбора x) Z-функцией поля A. Ряд (1) сходится для $\sigma > 2$.

В работе доказывается, что для любого x имеем тождество

$$Z'_A(s) = Z_A(s, x) P_A(s, x),$$

где функция $P_A(s, x)$ правильна для $\sigma > 1$, состоит из конечного числа множителей вида $\left(Z_{A\mathfrak{P}}(s)\right)^{\pm 1}$ и, следовательно, P_A продолжима на всю плоскость переменного s и, наконец, P_A имеет нули и полюса только на прямых $\sigma = 0, 1/2, 1$, где они располагаются в конечном числе эквидистантных систем точек.

В заключение автор указывает, что полные инвариантные Z-функции могут быть построены для частных случаев полей A (поле $A = K(x)$, поле эллиптическое с комплексным умножением, поле Ферма-Хассе). Указываются также некоторые общие пути построения полной и инвариантной Z-функции для любого A. Н. Г. Чудаков

3460. О линейных зависимостях между константами Маделунга. Эмерслебен (Über lineare Beziehungen zwischen Madelungkonstanten. Emersleben Otto), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1957, 2, № 2, 87—120 (нем.; рез. болг., русск.)

Вычисление константы Маделунга, характеризующей энергию ψ_M, приходящуюся на пару ионов в кристаллах минерала M, сводится в случае пространственной решетки к вычислению значений обобщенной дзета-функции П. Эпштейна для тернарных квадратичных форм (РЖМат, 1953, 1049).

Для кубической пространственной решетки эпштейнова дзета-функция

$$z\begin{vmatrix} 0\,0\,0 \\ x\,y\,z \end{vmatrix}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(kx + ly + mz)}{(k^2 + l^2 + m^2)^{s/2}}, \qquad (1)$$

где $s > 3$. Основной потенциал Борна

$$\Pi(x, y, z) = Z\begin{vmatrix} 0\,0\,0 \\ x\,y\,z \end{vmatrix}$$

вычисляется с помощью аналитического продолжения ряда (1), а также с помощью функциональных уравнений для эпштейновой дзета-функции по нижним параметрам (РЖМат, 1956, 979)

$$\psi_M = -\frac{e^2}{a}\left[p\,\Pi(0, 0, 1/2) + q\,\Pi(1/2, 1/2, 1/2)\right], \qquad (2)$$

где e — заряд электрона, a — кратчайшее расстояние между двумя различными ионами решетки NaCl, p и q — рациональные числа.

Для кристаллов каменной соли $M = NaCl$ $p = 0$, $q = 1$; для кристаллов цезиевого хлорида $M = CsCl$ $p = 3/4$, $q = 1/4$; для кристаллов плавикового шпата $M = CaF_2$ $p = 3/2$, $q = 1$; для кристаллов цинковой обманки $M = ZnS$ $p = 3/2$, $q = 3/2$.

Из (2) выводятся линейные зависимости между четырьмя величинами ψ_M, приведенные к одной и той же решеточной константе a. Эти зависимости приводятся к кратчайшему расстоянию r между противоположно заряженными частями данной решетки при $r = a$ для NaCl, при $r = a\sqrt{3}$ для трех других типов решетки.

Используя известное значение $\Pi(1/2, 1/2, 1/2)$ и вычисляя очень точное значение $\Pi(0, 0, 1/2)$, автор вычисляет значения ψ_{CsCl}, ψ_{CaF_2}, ψ_{ZnS} с точностью выше известной до сих пор. Для упрощения вычислений используются теоретико-числовые предложения о числе представлений целых чисел в виде суммы трех квадратов.

Б. М. Бредихин

3461. О распределении некоторых множеств идеалов в алгебраическом числовом поле. Ригер (Über die Verteilung gewisser Idealmengen in einem algebraischen Zahlkörper. Rieger G. J.), Arch. Math., 1958, 8, № 6, 401—404 (нем.)

Пусть $Q(x)$ — количество всех натуральных чисел $q = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, не превышающих x, причем p_i — i-е простое число, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r$. Харди и Рамануджан доказали, что

$$\log Q(x) = (1 + o(1)) \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\log x}{\log\log x}} \quad (x \to \infty). \qquad (1)$$

В работе даются следующие обобщения результата Харди и Рамануджана:

а) Если $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\}$ — последовательность всех простых идеалов алгебраического числового поля K, упорядоченная по неубывающим нормам $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}$, то для количества $Q(x)$ всех идеалов $\mathfrak{q} \in K$ вида $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{a_r}$ $(a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r)$, нормы которых $\leqslant x$, верна оценка (1).

в) Если $\{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots\}$ — какая-нибудь последовательность идеалов алгебраического числового поля K, упорядоченная по неубывающим нормам $\mathfrak{N}_{\mathfrak{r}}$, для которой из $\mathfrak{r}_{i_1}^{\alpha_1} \mathfrak{r}_{i_2}^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{r}_{i_r}^{\alpha_r} = \mathfrak{r}_{j_1}^{\beta_1} \mathfrak{r}_{j_2}^{\beta_2} \ldots \mathfrak{r}_{j_s}^{\beta_s}$ $(i_1 < i_2 < \ldots i_r;\ j_1 < j_2 < \ldots < j_s)$ всегда следует $r = s$, $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_r = j_r$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_r = \beta_r$ и для которой существуют положительные константы A и B с

условием $Ax < \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqslant x} \log \mathfrak{N}\mathfrak{r} < Bx$, то для количества $Q(x)$ всех идеалов $\mathfrak{q}' \in K$ вида $\mathfrak{q}' = \mathfrak{r}_1^{a_1}\mathfrak{r}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{r}_r^{a_r}$ $(a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r)$ и с нормами $\leqslant x$ верна оценка (1).

Н. В. Гордеев

3462. Распределение чисел мнимого квадратичного поля, состоящих из малых простых идеалов. Заикина Н. Г., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 261—272

Обобщается результат А. А. Бухштаба о числах с малыми простыми делителями на случай мнимого квадратичного поля. Доказана теорема: Пусть Ω_1 — любая фиксированная область на плоскости, расстояние которой от начала координат не превосходит единицы, Ω_T — область, полученная из Ω_1, подобным преобразованием с коэффициентом T; $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал мнимого квадратичного поля K, α — действительное число > 1. Число целых чисел z области Ω_T вида $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$, где идеал $\mathfrak{r}$ делится только на простые идеалы, нормы которых не превосходят $(T^2/N(\mathfrak{a}))^{1/\alpha}$, тогда верна асимптотическая формула

$$B\left(\Omega_T; \mathfrak{a}; \left(\frac{T^2}{N(\mathfrak{a})}\right)^{1/\alpha}\right) \sim \mu(\alpha)\,\frac{cT^2}{\sqrt{|\alpha|}\,N(\mathfrak{a})},$$

c — площадь Ω_1, α — дискриминант поля K. $\mu(\alpha)$ совпадает с функцией $\omega(\alpha)$ А. А. Бухштаба.

А. И. Виноградов

3463. Распределение невычетов степени n по модулю простого идеала в мнимом квадратичном поле. Заикина Н. Г., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 273—282

Пусть ρ — любой простой идеал мнимого квадратичного поля K; $N(\rho)$ — норма идеала ρ; n — натуральное число, являющееся делителем $N(\rho) - 1$. Автор распространяет оценку для наименьшего квадратичного невычета степени n, данную А. А. Бухштабом при помощи улучшенного решета Бруна, на случай поля K.

Основной результат: Среди чисел поля K, норма которых не превосходит $N(\rho)^{1/2\alpha}$, содержится хотя бы один невычет степени n по модулю идеала ρ при достаточно большом $N(\rho)$, где α — некоторое действительное число, большее 1, с условием $\mu(\alpha) > 1/n + \varepsilon$, причем функция $\mu(\alpha)$ совпадает с известной функцией $\omega(\alpha)$.

А. А. Бухштаб

3464. Коэффициенты Фурье инвариантов $j(2^{1/2}; \tau)$ и $j(3^{1/2}; \tau)$. Рали (The Fourier coefficients of the invariants $j(2^{1/2}; \tau)$ and $j(3^{1/2}; \tau)$. Raleigh John), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 1, 90—107 (англ.)

Пусть $G(\lambda_q)$ — группа, порожденная двумя подстановками $\tau' = \tau + \lambda_q$, $\tau' = -1/\tau$, где $\lambda_q = 2\cos(\pi/q)$, q — целое $\geqslant 3$.

При $q=3$ группа $G(\lambda_3) = G(1)$ является модулярной группой с хорошо известным инвариантом $j(\tau)$. При $q=4$ группа $G(\lambda_4) = G(2^{1/2})$ была исследована Юнгом (Young J. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1904, **5**, 81—104), который нашел инвариант, обозначенный в реферируемой статье через $j(2^{1/2}; \tau)$. При $q=6$ группа $G(\lambda_6) = G(3^{1/2})$ была рассмотрена Хутчинсоном (Hutchinson J. I., Trans. Amer. Math., Soc., 1902, **3**, 1—11), который нашел инвариант, обозначенный в реферируемой статье через $j(3^{1/2}; \tau)$.

Радемахер (Rademacher H., Amer. J. Math., 1938, **60**, 501—512) получил сходящийся ряд для коэффициентов Фурье инварианта $j(\tau)$.

В статье развитием метода Радемахера получены сходящиеся ряды для коэффициентов Фурье инвариантов $j(2^{1/2}; \tau)$ и $j(3^{1/2}; \tau)$.

Кроме того, установлены два соотношения между инвариантами $j(2^{1/2}; \tau)$ и $j(\tau)$ и два соотношения между $j(3^{1/2}; \tau)$ и $j(\tau)$.

Г. А. Ломадзе

3465. Некоторые тождества и неравенства, заключающие максимумы и минимумы. Корпут (Some identities and inequalities involving maxima and minima. Corput J. G. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1958, **A61**, № 2, 239—251; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 239—251 (англ.)

Пусть m и n — натуральные числа, $Q = P_1P_2\cdots P_n$ — произведение различных простых чисел $P_1, \ldots, P_n$; пусть $x_{\mu\nu}$ и $y_{\mu\nu}$ — вещественные числа, для которых $y_{\mu\nu} \leqslant x_{\mu\nu}$ $(1 \leqslant \mu \leqslant m;\ 1 \leqslant \nu \leqslant n)$, и пусть $f(v_1, \ldots, v_m)$ определена для всех действительных значений $v_1, \ldots, v_m$. Рассматривается сумма

$$S = \sum_{D|Q} \mu(D)\, f(\min(z_{11}(D), \ldots, z_{1n}(D)), \ldots, \min(z_{m1}(D), \ldots, z_{mn}(D)),$$

где $\mu(D)$ — функция Мёбиуса и

$$z_{\mu\nu}(D) = \begin{cases} x_{\mu\nu} \text{ для всех } \nu \text{ при } P_\nu \nmid D, \\ y_{\mu\nu} \text{ для всех } \nu \text{ при } P_\nu \mid D. \end{cases}$$

В частном случае при $m = 1$ доказывается, что S имеет значение: $S = f(\min(x_{11}, \ldots, x_{1n})) - f(\min(x_{11}, \ldots, x_{1n}, y))$, где $y = \max(y_{11}, \ldots, y_{1n})$.

В. А. Голубев

3466. О теореме Эрдёша и Секереша. Бейтман, Гроссуолд (On a theorem of Erdös and Szekeres. Bateman Paul T., Grosswald Emil), Illinois J. Math., 1958, **2**, № 1, 88—98 (англ.)

Пусть $\{c_n\}$ — последовательность комплексных чисел, $C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \qquad (1)$$

— тождество для рядов Дирихле в комплексной области. Рассматривается специальный случай общей проблемы вывода аппроксимативной формулы для $C(x)$ из аппроксимативных формул для $A(x)$ и $B(x)$ и из верхних граней для $\sum_{n \leqslant x} |a_n|$ и $\sum_{n \leqslant x} |b_n|$.

Обозначим через $M(h)$ множество всех натуральных чисел n таких, что $p^h \mid n$ для каждого простого делителя p числа n и фиксированного целого $h > 1$;

$$N_h(x) = \sum_{n \leqslant x,\ n \in M(h)} 1.$$

В тождестве (1) полагаем $C(x) = N_h(x)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \zeta(hs)\,\zeta((h+1)s)\ldots\zeta((h+r)s) \text{ с } r \leqslant h-1.$$

Хорошая аппроксимация для $A(x)$, получающаяся на основе оценок Ландау и Рихерта в проблеме точечной решетки, и относительно малая абсцисса абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ позволяют значительно усилить известную теорему Эрдёша и Секереша:

$$N_h(x) = \gamma_0(h)x^{1/h} + O(x^{1/(h+1)}).$$

Элементарные методы дают оценку:

I. $N_h(x) = \gamma_0(h)x^{1/h} + \gamma_1(h)\,x^{1/(h+1)} + R_h(x)$,

где $R_h(x) = O(x^{1/(h+2)})$ для $h > 2$ и $R_2(x) = O(x^{1/5})$.

Аналитические методы уточняют этот результат, улучшая оценки:

II. $N_h(x) = \gamma_0(h)\,x^{1/h} + \gamma_1(h)x^{1/(h+1)} + \ldots + \gamma_r(h)x^{1/(h+r)} + \Delta_h(x)$,

где целое $r>1$, $r^2/2<h\leqslant(r+1)^2/2$ и для $\Delta_h(x)$ даются различные оценки, например, $\Delta_h(x)=O(x^{1/(h+r+1)})$, если $r(r+1)/2<h<(r+1)^2/2$;

III. $N_2(x) = x^{1/2}\,\zeta(3/2)/\zeta(3) + x^{1/3}\,\zeta(2/3)/\zeta(2) + \Delta_2(x)$, где $\Delta_2(x) = O\{x^{1/6}\exp[-a(\ln x)^{4/7}(\ln\ln x)^{-3/7}]\}$, где константа $a>0$. (Оценка для $\Delta_2(x)$ может быть еще улучшена применением новых результатов, полученных И. М. Виноградовым (Изв. АН. СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 2, 161—164)).

Если для множества Q нетривиальных нулей ρ дзета-функции Римана $\sup_{\rho\in Q}\beta<1-\delta$, где $\rho=\beta+i\gamma$ и $0<\delta<1/2$, то $\Delta_2(x)=O(x^\alpha)$ с $\alpha=\alpha(\delta)<1/6$.

Формулируется неопубликованный результат Тулля (J. P. Tull), дающий оценку: $N_3(x) + \gamma_0 x^{1/3} + \gamma_1 x^{1/4} + \gamma_2 x^{1/5} + O(x^{1/46})$.

Б. М. Бредихин

3467. Заметка об аддитивных функциях. Деланж, Халберстам (A note on additive functions. Delange H., Halberstam H.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1551—1556 (англ.)

Пусть $f(m)$ — сильно аддитивная арифметическая функция, $A_n=\sum_{p<n} f(p)/p$, $B_n=\sum_{p<n} f^2(p)/p$, где суммируется по всем простым числам $p<n$; $N_n(x)$ — число тех натуральных чисел $m\leqslant n$, для которых $f(m)<A_n+xB_n^{1/2}$. Если $B_n^{-1}\sum f^2(p)/p$, где сумма берется по простым $p<n$, удовлетворяющим условию $|f(p)|>\varepsilon B_n^{1/2}$, для любого фиксированного $\varepsilon>0$ стремится к 0 при $n\to\infty$ (аналог условия Линдеберга), то $N_n(x)/n$ при $n\to\infty$ стремится к нормальному закону $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp(-u^2/2)\,du$. Доказывается, что при дополнительном условии $f(p)=O(B_p^{1/2})$ моменты функции распределения $N_n(x)/n$

$$n^{-1}B_n^{-k/2}\sum_{m=1}^{n}(f(m)-A_n)^k$$

($k=1,2,\ldots$) стремятся к соответствующим моментам закона $\Phi(x)$. Для справедливости последнего соотношения условие Линдеберга не является достаточным.

И. П. Кубилюс

3468. О некоторых арифметических функциях. Деланж (Sur certaines fonctions arithmétiques. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 4, 514—517 (франц.)

Пусть E — бесконечное множество простых чисел, такое что число его элементов, не превосходящих x ($x\to\infty$), равно $\alpha x/\log x + o(x/\log x)$, где $\alpha\geqslant 0$ — постоянное, причем при $\alpha=0$ ряд $\sum_{p\in E} p^{-1}$ расходится; $\omega_E(n)$ — число различных простых делителей, а $\Omega_E(n)$ — число всех простых делителей натурального n, принадлежащих E; $f(n)$ — любая из функций $\omega_E(n)$, $\Omega_E(n)$; $g(n)$ — любая из функций $\omega_{E'}(n)$, $\Omega_{E'}(n)$, где множество E' определяется аналогично множеству E, но не пересекается с ним; λ и μ — иррациональные числа, $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant t'\leqslant 1$, $\{u\}$ — дробная часть u; Q — множество всех натуральных бесквадратных чисел; q, q', r, r' — натуральные числа. Рассматриваются множества натуральных чисел, удовлетворяющих одному из следующих условий: 1) $f(n)\equiv r\pmod q$, 2) $n\in Q$, $f(n)\equiv r\pmod q$, 3) $\{\lambda f(n)\}\leqslant t$, 4) $n\in Q$, $\{\lambda f(n)\}\leqslant t$, 5) $f(n)\equiv r\pmod q$, $g(n)\equiv r'\pmod{q'}$, 6) $n\in Q$, $f(n)\equiv r\pmod q$, $g(n)\equiv r'\pmod{q'}$, 7) $\{\lambda f(n)\}\leqslant t$, $\{\mu g(n)\}\leqslant t'$, 8) $n\in Q$, $\{\lambda f(n)\}\leqslant t$, $\{\mu g(n)\}\leqslant t'$, 9) $\omega_E(n)\equiv r\pmod q$, $\Omega_E(n)\equiv r'\pmod{q'}$, $(q,q')=1$, 10) $\{\lambda\omega_E(n)\}\leqslant t$, $\{\mu\Omega_E(n)\}\leqslant t'$, λ и μ рационально независимы. Доказывается, что каждое из этих множеств обладает естественной плотностью, которая равна соответственно: 1) q^{-1}, 2) $6\pi^{-2}q^{-1}$, 3) t, 4) $\pi^{-2}t$, 5) $(qq')^{-1}$, 6) $6(\pi^2qq')^{-1}$, 7) tt', 8) $6\pi^{-2}tt'$, 9) $(qq')^{-1}$, 10) tt'.

Доказательства отсутствуют. Аналогичные результаты получены автором ранее при более сильных предположениях относительно E, E' (РЖМат, 1957, 5320, 8404).

И. П. Кубилюс

3469. Об одной теореме Эрдёша—Каца. Реньи, Туран (On a theorem of Erdös — Kac. Rényi A., Turán P.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 71—84 (англ.)

Введем обозначения: $V(k)$ — число всех простых делителей натурального k, $N_n(x)$ — число натуральных $k\leqslant n$, для которых $(V(k)-\log\log n)(\log\log n)^{-1/2}<x$,

$$R_n(x) = N_n(x)/n - (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Из одной теоремы Эрдёша и Каца (Erdös P., Kac M., Amer. J. Math., 1940, **62**, 738—742) следует, что $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Левек (LeVeque W. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, 440—463) показал, что $R_n(x)=O(\log\log\log n\,(\log\log n)^{-1/4})$ равномерно по x, и высказал предположение, что имеет место оценка $R_n(x)=O((\log\log n)^{-1/2})$. Эту оценку нельзя заменить равномерной по x оценкой $o((\log\log n)^{-1/2})$. Из результатов референта (РЖМат, 1957, 1117, 7604) вытекает, что $R_n(x)=O(\log\log\log n\,(\log\log n)^{-1/2})$.

Дается новое доказательство теоремы Эрдёша и Каца, основанное на рассмотрении характеристической функции $\sum_{k=1}^{n}\exp(itV(k))/n$ и использующее известные оценки для функции Римана $\zeta(s)$ на прямой $\mathrm{Re}\,s=1$. Посредством тех же соображений доказывается справедливость предположения Левека. Эти результаты обобщаются на аддитивные арифметические функции $f(k)$, удовлетворяющие условиям: $f(p)=1$ для всех простых p и $|f(p^l)|\leqslant l^\alpha (l=1,2,\ldots)$, где $\alpha>0$—постоянная, не зависящая от p. Приводится простое доказательство одной теоремы Реньи (РЖМат, 1956, 8542).

И. П. Кубилюс

3470. О частоте малых дробных долей в некоторых вещественных последовательностях. Левек (On the frequency of small fractional parts in certain real sequences. Leveque William J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 1, 237—260 (англ.)

Пусть $\langle x\rangle$ — расстояние вещественного числа x до ближайшего целого числа, $T_n(x)$ — число решений в натуральных $m\leqslant n$ неравенства $\langle mx\rangle<g(m)$, где $g(m)$ — заданная положительная функция, $A_n=12\pi^{-2}\sum_{k=1}^{n}g(k)$. Из усиленного закона больших чисел и теории цепных дробей выводится, что для почти всех x в смысле меры Лебега $T_n(x)\sim A_n$ при условии, что $g(u)=f(\log u)/u$, где $f(u)$ — положительная убывающая функция при $u\geqslant 0$, $f(u)=O(u^{-1})$ и $f'(u)=O(u^{-2})$ при $u\to\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}f(k)=\infty$. При тех же условиях из центральной предельной теоремы для мартингалов следует, что мера множества тех

$x \in [0,1]$, для которых $T_n(x) < A_n + \omega A_n^{1/2}$, при $n \to \infty$ стремится к $\Phi(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-u^2/2}\, du$.

Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — неубывающая последовательность натуральных чисел такая, что для некоторого целого l и всех m имеет место неравенство $r_m^l > m$; $R_m = r_1, r_2 \ldots r_m$; $h(u)$ — положительная функция, S — любая возрастающая последовательность натуральных чисел. Неравенство $\langle R_m(x) \rangle < h(m)$ имеет бесконечно много решений в числах $m \in S$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{m \in S} h(m)$ расходится.

Пусть $F(u)$ — положительная функция, $\sum_{m=1}^{\infty} F(m) = \infty$, $F(m) = O(m^{-1/2-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$; k_m — единственное целое число, удовлетворяющее условиям $[r_{m+1} \ldots r_{m+k_m-1} F(m) + 1/2] = 0$, $[r_{m+1} \ldots r_{m+k_m} F(m) + 1/2] \neq 0$. Пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{m+1} \ldots r_{m+k_m})^{-1}$ сходится. Обозначим через $U_n(x)$ число решений неравенства $\langle R_m(x) \rangle < F(m)$ в натуральных $m \leqslant n$, $B_n = 2\sum_{m=1}^{n} F(m)$. Тогда $U_n(x) \sim B_n$ для почти всех x и мера множества тех $x \in [0,1]$, для которых $U_n(x) < B_n + \omega B_n^{1/2}$ стремится к $\Phi(\omega)$ при $n \to \infty$.

Для доказательства последних утверждений используются лемма Бореля-Кантелли, закон повторного логарифма и центральная предельная теорема для m-зависимых случайных величин. И. П. Кубилюс

3471. Рекуррентные соотношения между диофантовыми неравенствами в поле степенных рядов. Постников А. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 10—11

3472. Нормальная по Маркову последовательность знаков и нормальная цепная дробь. Постников А. Г., Пятецкий И. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 6, 729—746

Продолжение работы (РЖМат, 1958, 9510). Вместо последовательности независимых испытаний рассматривается бесконечная последовательность испытаний, связанных в стационарную однородную цепь Маркова. Каждое испытание имеет два исхода—появляется либо цифра 0, либо цифра 1, причем вероятности перехода равны $p_{ij}(i,j=0,1)$, $p_{00}p_{01}p_{10}p_{11} > 0$, а вероятности появления цифр 0,1 в первом испытании равны соответственно $p_0 = p_{10}(p_{01}+p_{10})^{-1}$; $p_1 = p_{01}(p_{01}+p_{10})^{-1}$. Любому отрезку вида $[A, A+2^{-n})$, где $A = \varepsilon_1 2^{-1} + \varepsilon_2 2^{-2} + \ldots + \varepsilon_n 2^{-n}$ ($\varepsilon_k = 0$ или 1), приписывается мера $\mu[A, A+2^{-n}) p_{\varepsilon_1} p_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \ldots p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}$ и строится теория измерения и интеграла, аналогичная лебеговой. Нормальные по Маркову последовательности знаков определяются совершенно аналогично нормальным по Бернулли последовательностям и доказываются для них аналогичные результаты.

Те же результаты переносятся также на цепные дроби. В этом случае вместо двоичных знаков рассматриваются неполные частные, а мера вводится посредством формулы $\mu\Delta = (\log 2)^{-1} \int_{\Delta} (1+x)^{-1} dx$.

Опечатки: на стр. 740, 11—12 строки св. вместо „двоичный знак" следует читать „неполное частное".

И. П. Кубилюс

3473. Обобщение и перенесение критериев алгебраичности Шнейдера в p-адическую область, с применением к доказательству трансцендентности p-адических чисел. Ичен (Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenz beweis im p-adischen. Içen Orhan S.), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 1-2, 28—55 (нем.)

Обобщаются и переносятся в p-адическую область критерии алгебраичности в арифметическом смысле аналитической функции комплексной переменной, полученные Шнейдером (Schneider Th., Acta math., 1951, 86, 57—70). При этом существенно используется метод доказательства Шнейдера.

Аналитическая функция $f(z)$, определенная в комплексной или p-адической области, называется алгебраической в арифметическом смысле, если она удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{ik} z^i [f(z)]^k = 0,$$

с алгебраическими коэффициентами $a_{i,k}$.

Последовательность $\{z_n\}$ алгебраических чисел без повторения назовем допустимой, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) степени z_n ограничены, 2) существуют такая точка ζ, не обязательно алгебраическая и такое положительное число c, что для достаточно больших значений n выполняется неравенство $|z_n - \zeta| \leqslant \frac{1}{h_n^c}$, где h_n — высота z_n, 3) последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = \ln h_n$, сходится к $+\infty$ и существует такое положительное число A, что для достаточно больших значений n выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu > A \bar{u}_{n+1},$$

где $\bar{u}_n = \max_{1 \leqslant k < n} (u_k)$, $u_n = \min_{k=n,\, n+1, \ldots} (u_k)$.

Теорема. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в точке $z = \zeta$. Значения $\{f(z_n)\}$ в точках допустимой последовательности $\{z_n\}$ из области определения $f(z)$, сходящейся к точке ζ, удовлетворяют следующим условиям: а) все $f(z_n)$ — алгебраические числа, степени которых ограничены, б) $\ln H_n = O(n \ln h_n)$, при $n \to \infty$, где H_n — высота $f(z_n)$, а h_n — высота z_n. Тогда $f(z)$ — алгебраическая функция в арифметическом смысле. Обратно, последовательность $\{f(z_n)\}$ значений функции $f(z)$ алгебраической в арифметическом смысле обладает свойствами а) и б) для каждой последовательности $\{z_n\}$ алгебраических чисел, степени которых ограничены сходящейся к точке ζ регулярной для $f(z)$.

Один из критериев алгебраичности Шнейдера содержится в этой теореме в случае, когда $f(z)$ определена в комплексной области и последовательности $\{z_n\} = \{1/n\}$.

Далее, доказываются несколько обобщений сформулированной теоремы, а затем она применяется к доказательству известной теоремы Малера-Фельдкампа о трансцендентности чисел вида α^β в p-адической области.

А. Б. Шидловский

3474. Целые квадратичные формы. Уотсон (Integral quadratic forms. Watson G. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 37 (англ.)

3475. Исправление к статье Ичена «Обобщение и перенесение критериев алгебраичности Шнейдера и т. д.» (Berichtigungen zur Arbeit Içen «Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien usw.»), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 3-4, 220 (нем.)

См. реф. 3473.

3476. О рациональных приближениях к иррациональным числам с ограниченными неполными частными. В и-

ноградов А., Делоне Б., Фукс Д., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 5, 862—865

Статья посвящена связи между множеством так называемых чисел Маркова $\{\lambda_\theta\}$ и „марковским спектром" $\{\lambda_M\}$.

Основные результаты: 1) геометрическое доказательство того факта, что $\{\lambda_\theta\}$ содержится в $\{\lambda_M\}$; 2) установление того, что спектр Маркова является сплошным, по крайней мере начиная с $5 + \sqrt{2} = 6{,}41...$

Авторы предварительно дают геометризацию вопросов, связанных с обоими множествами; результат 2) выходит как непосредственное следствие одной теоремы М. Холла (младшего) (Hall M., Jr., Ann. Math., 1947, **48**, № 4) о суммах двух непрерывных дробей. П. Г. Когония

3477. О множестве точек сгущения множества чисел Маркова. Когония П. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 5

3478. Об одной геометрической интерпретации непрерывных дробей и ее применении. Шош (A láncтörtek egy geometriai interpretációja és alkalmazásai. Sós Vera T.), Mat. lapok, 1957, **8**, № 3-4, 248—263 (венг.; рез. русск., англ.)

Подробно изложено геометрическое истолкование непрерывных дробей, предложенное автором ранее (РЖМат, 1959, 107). В качестве приложения дано решение задачи о нахождении минимума величины $|\alpha - p/q|$, где α — произвольное положительное иррациональное число, p и q — целые, причем $1 \leqslant q \leqslant N$, N — заданное целое.

А. И. Попов

3479. О высших критических определителях звездных тел. Шмидт (Über höhere kritische Determinanten von Sternkörpern. Schmidt Wolfgang), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 4, 274—304 (нем.)

Пусть S — замкнутое, симметричное относительно начала O звездное тело в n-мерном евклидовом пространстве R_n; пусть O — внутренняя точка S. Рассматриваем n-мерные решетки точек Γ; определитель Γ обозначаем через $d(\Gamma)$. Решетка Γ называется k-допустимой относительно S, если внутри S содержится менее k пар точек решетки, кроме O. Обозначаем: $\Delta^k(S) = \inf d(\Gamma)$ по всем k-допустимым относительно S решеткам Γ; $\Delta'(S) = \Delta(S)$ — обычный критический определитель тела S. Роджерс (Rogers C. A., J. London Math. Soc., 1951, **26**, 307—311) предположил, что

$$k\,\Delta^k(S) \geqslant \Delta(S) \qquad (1)$$

для всех k и всех S. Он доказал (1) для простых k.

В реферируемой работе неравенство (1) доказывается для более общих классов k. Именно, доказано, что (1) верно в случаях, когда 1) k есть степень простого числа; 2) $k = pq$, p и q — простые числа, $q \geqslant (p-1)(p-2)$; 3) $k = p + 1$, p — простое число; 4) $[k]_p \geqslant 4k/5$, $[k/2]_p \geqslant (4/5)[k/2]_p$, $[k]_p \geqslant k - \sqrt{2k}$, где $[k]_p$ — наибольшее простое число, не превосходящее k. Показано, что неравенство (1) верно для почти всех k (т. е. для всех достаточно больших k). Показано, что более общее неравенство $k\Delta^{kl}(S) < \Delta^l(S)$, вообще говоря, не верно. Доказано, что существует предел $\lim_{k\to\infty} k\Delta^k(S) = \square(S)$ и что $l\,\Delta^l(S) < \Delta^l(S)$ для всех l. Для плоскости $n = 2$, $\square(S) = (1/4)J_p(S)$, где $J_p(S)$ — площадь минимального описанного вокруг параллелограмма. Вообще, имеет место неравенство

$$k\,\Delta^k(S) \leqslant \frac{V(S)}{2}\,\frac{\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\zeta(n)},$$

где $V(S)$ — объем звездного тела (Hlawka E., Math. Z. 1943/44, **49**, 285—312; Math. Ann., 1952, **125**, 183—207)

А. В. Малышев

3480. Некоторые проблемы о точках с целыми координатами. Серпинский (Sur quelques problèmes concernant les points aux coordonnées entières. Sierpiński W.), Enseign. math., 1958 (1957), **4**, № 1, 25—31 (франц.)

Решается следующая задача Штейнхауса („Matematyka", 1957, 2 (46), задача 498): доказать, что для всякого натурального n существует окружность, содержащая внутри себя ровно n целых точек плоскости.

Доказательство основано на простом свойстве точки $(\sqrt{2}, 1/3)$: на окружности с центром в точке $(\sqrt{2}, 1/3)$ может лежать не более одной целой точки.

Любопытно, что нет рациональных точек (т. е. точек с рациональными координатами), которые бы обладали подобным свойством. Указывается, что для случая, когда окружность с центром в точке $(\sqrt{2}, 1/3)$ проходит через одну целую точку и содержит внутри себя n целых точек плоскости, труднее установить ее радиус r_n для любого n. Удается только показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

т. е. асимптотически $r_n = \sqrt{n/\pi}$.

Дается обобщение указанной задачи на шар, квадрат, куб и другие геометрические образования.

Б. М. Уразбаев

3481. О числе точек решетки в n-мерном тетраэдре. Човла, Минтка (The number of lattice points in an n-dimensional tetrahedron. Chowla S., Mientka W. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 51—53 (англ.)

Доказываются теоремы: 1. Если $\eta \equiv 0 \pmod A$, то число целочисленных решений неравенств $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \eta$, $x_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ есть полином с рациональными коэффициентами от η/A и a_i. 2. Если $\eta \equiv 0 \pmod A$, то число решений в неотрицательных целых x_i уравнения $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \eta$ есть полином с рациональными коэффициентами от η/A и a_i.

Ю. В. Линник

3482. Вторая заметка об объеме целых многогранников. Рив (Seconde note sur le volume des polyèdres entiers. Reeve John-E.), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 21, 2989—2991 (франц.)

Выводится формула, устанавливающая соотношение между объемом целого многогранника и телесных углов, содержащихся в многограннике в точках, целых и ассоциированных.

В. А. Голубев

3483. О существовании окружности, проходящей через заданное число точек с целыми координатами. Шинцель (Sur l'existence d'un cercle passant par un nombre donné de points aux coordonnées entières. Schinzel André), Enseign. math., 1958 (1957), **4**, № 1, 71—72 (франц.)

Рассматривается задача: существует ли для всякого натурального n окружность, проходящая через n целых точек плоскости. Показывается, что если n — нечетное, $n = 2k + 1$, то искомая окружность имеет радиус $5^k/3$, а центр в точке (1/3,0), а при четном $n = 2k$, — радиус $5^{(k-1)/2}/2$ и центр (1/2,0).

Б. М. Уразбаев

3484. О структуре группы единиц кольца арифметических функций. Комман (Sur la structure du groupe des unités de l'anneau des fonctions arithmétiques. Comment Pierre), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 1-2, 250—254 (франц.)

Определения см. РЖМат, 1958, 90.

Множество всех комплексных арифметических функций образует кольцо I с единицей относительно обычного сложения и интегрального умножения, причем роль единичного элемента играет функция $\alpha(n)$, равная 1 при

$n=1$ и 0 при $n>1$. Элементы кольца I, обладающие обратным элементом, образуют мультипликативную абелеву группу E — группу регулярных элементов или единиц кольца I. Множество M всех мультипликативных арифметических функций, за исключением функции, тождественно равной нулю, является подгруппой группы E.

Обозначим через PM совокупность всех арифметических функций $h(n)$, удовлетворяющих условиям $h(1)\neq 0$, $h(mn)=h(n)\,h(m)/h(1)$ для всех взаимно простых бесквадратных m,n. Доказано, что PM является подгруппой группы E. Если $f\in E, g\in E$ и $f\times g\in PM$, то $f\in PM$, $g\in PM$ или $f\in E-PM$, $g\in E-PM$. И. П. Кубилюс

3485. Показательные суммы для кососимметрических матриц в конечном поле. Ходжес (Exponential sums for skew matrices in a finite field. Hodges John H.), Arch. Math., 1956, 6, № 2, 116—121 (англ.)

Пусть B — заданная кососимметрическая матрица порядка t и ранга $2j$, составленная из элементов конечного поля $GF(q)$, $q=p^n$, p — простое.

Определяется значение показательной суммы (теорема 1)

$$W(B,r)=\sum_{C} e\{-\sigma(BC)\},$$

распространенной по всем кососимметрическим матрицам $C=C(t,2r)$ порядка t и ранга $2r$ с элементами из $GF(q)$,

$$W(B,r)=q^{jr}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k q^{k(k-2j-1)}\begin{bmatrix} j \\ k\end{bmatrix}' S(t-2j,\,2r-4k),$$

где $\sigma(A)$ — след матрицы A,

$$e(\alpha)=e^{2\pi i\, t(\alpha)/p},\quad t(\alpha)=\alpha+\alpha^p+\ldots+\alpha^{p^{n-1}},$$

$\begin{bmatrix} j \\ k\end{bmatrix}$ — q-биномиальные коэффициенты, $S(t,k)$ — выражение, зависящее только от q (РЖМат, 1955, 2545).

Дается выражение $W(B,r)$ через бесконечный ряд довольно сложного вида (теорема 2).

Пусть $Z_t(A,B,2r)$ — число $m\times t$-матриц X, удовлетворяющих уравнению

$$X'AX=B+Y,$$

где A,B — кососимметрические матрицы с элементами из $GF(q)$, причем A — невырожденная матрица порядка $2m$, B — порядка t, Y — кососимметрическая матрица порядка t и ранга $2r$.

Тогда теорема (3)

$$q^{\frac{1}{2}t(t-1)}Z_t(A,B,2r)=q^{mt}S(t,2r)+\sum_{2j<t}q^{m(2t-j)}\sum_{D(t,2r)}W(B+D,j),$$

где суммирование распространяется на все кососимметрические матрицы D порядка t и ранга $2r$ с элементами из $GF(q)$.

Пользуясь показательной суммой $W(B,r)$, автор дает формулу для числа представлений заданной кососимметрической матрицы порядка t в виде суммы $n>1$ кососимметрических матриц порядка t и ранга $2r_i (i=1,2,\ldots,n)$.

В статье существенно используются результаты работы Карлица (РЖМат, 1955, 2545). Б. М. Уразбаев

3486. Алгебра кубичных вычетов. Вайдьянатхасвами (The algebra of cubic residues. Vaidyanathaswamy R.), J. Indian Math. Soc., 1957, **21**, № 1-2, 56—66 (англ.)

Решается задача построения алгебры кубичных вычетов по простому модулю. Аналогичная задача для квадратичных вычетов решена автором в 1937 г. (J. Indian Math. Soc., 1937, **2**, 239 — 254).

Пусть p — простое вида $p=6n+1$, δ — первообразный корень по модулю p; группа G — аддитивная группа классов вычетов $[0],[1],\ldots,[p-1]$ по модулю p; Γ — группа автоморфизмов группы G — мультипликативная группа π_0 кубичных вычетов по модулю p:

$$\pi_0=[1,\delta^3,\delta^6,\ldots,\delta^{6n-3}].$$

Тогда группа G по отношению к Γ распределяется в четыре класса:

$$Z=[0],$$
$$\pi_0=[1,\delta^3,\delta^6,\ldots,\delta^{6n-3}],$$
$$\pi_1=\delta\times\pi_0=[\delta,\delta^4,\ldots,\delta^{6n-2}],$$
$$\pi_2=\delta^2\times\pi_0=[\delta^2,\delta^5,\ldots,\delta^{6n-1}].$$

Эти классы являются порождающими элементами алгебры кубичных вычетов. Определяются сумма и произведение элементов, произведение элемента алгебры на неотрицательное число. Е. П. Ожигова

3487. О диофантовом уравнении от корней кубического уравнения. Одзеки (On the Diophantus equation to the roots of the cubic equation. Ozeki Nobuo), Тиба дайгаку бунригакубу киё, сидзэн кагаку, J. Coll. Arts and Sci. Chiba Univ. Natur. Sci. Ser., 1957, 2, № 2, 102—104 (англ.)

Пусть α, β и γ — корни кубического уравнения $x^3+Qx+R=0$ с целыми рациональными коэффициентами. Доказывается, что если $R=\pm 1$, то $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=0$ и $n>1$ только для случая $Q=1$ и $n=11$, утверждается, что Уорд доказал, что в случае R и Q — взаимно простых и $|R|>2$ $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=0$ только при $n=1$, а для Q и R не взаимно простых приводится 6 случаев, когда $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=0$ при $n>1$.

Ввиду чего автор считает, что он закончил решение поставленной задачи.

Примечание референта. Автор, очевидно, не знаком с монографией Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева, („Теория иррациональностей третьей степени", Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1940), где в § 72 поставленная задача действительно решена полностью. В этой монографии не только получены результаты автора, но и до конца исследован случай любых R и Q. Кроме 6 исключений, найденных автором, имеется еще три. Во всех остальных случаях $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=0$ только при $n=1$.

В. Д. Подсыпанин

3488. Решение диофантова уравнения $x^y-z^t=1$. Честари (Risoluzione della diofantea $x^y-z^t=1$. Cestari R.), Giorn. mat. Battaglini, 1957, 85, № 2, 197—208 (итал.)

Доказываются две простые теоремы, из которых следует, что уравнение $x^y-z^t=1$ имеет единственное решение в натуральных числах: $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$ (теорема Каталана). В. А. Голубев

3489. Неопределенное уравнение $x^{2n}+y^{2n}=z^3$ и последняя теорема Ферма. Баталья (L'equazione indeterminata $x^{2n}+y^{2n}=z^3$ e l'ultimo teorema di Fermat. Battaglia Antonio), Archimede, 1958, **10**, № 2-3, 120—125 (итал.)

Обычными элементарными средствами доказываются теоремы:

1. Уравнение

$$x^{2n}+y^{2n}=z^3, \qquad (1)$$

в котором n содержит простой делитель формы $4m+1$ и $(z,n)=1$, не имеет решений.

2. Уравнение (1), в котором n содержит простое число формы $4m-1$ и $(z,n)=1$, не имеет решений.

В обоих случаях предполагается условие $(x,y,z)=1$.

П. Н. Реморов

3490. Об одной элементарной проблеме в теории чисел. Эрдёш (On an elementary problem in number theory. Erdös Paul), Canad. Math. Bull., 1958, **1**, № 1, 5—8 (англ.)

Пусть $0 < x \leqslant y$. Оценивается наименьшее $f(x)$, для которого существуют целые u и v, удовлетворяющие условию

$$0 < u,\ v < f(x) \text{ и } (x+u,\ y+v) = 1.$$

Доказываются неравенства

$$f(x) > (1-\varepsilon)(\ln x/\ln\ln x)^{1/2} \qquad (1)$$

для каждого $\varepsilon > 0$ и для некоторых произвольно больших значений x;

$$f(x) < c \ln x/\ln\ln x \qquad (2)$$

для некоторого $c > 0$ и всех значений x.

Доказательства основаны на элементах теории сравнений и теореме о простых числах. Неравенство (2) фактически содержится в следующей теореме, доказываемой сходным методом:

Пусть $g(x)(\ln x/\ln\ln x)^{-1} \to \infty$. Тогда число пар u, v, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant u,\ v < g(x) \text{ и } (x+u,\ y+v) = 1,$$

будет $(1+o(1))(6/\pi^2)\,g^2(x)$.

Сближение оценок (1) и (2) является трудной проблемой. Б. М. Бредихин

3491. Об одном свойстве целочисленных неотрицательных решений уравнения $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Чулик (O jedné vlastnosti celočíselných nezáporných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Čulík Karel), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 3, 353—359 (чешск.; рез. русск., нем.)

Пусть k и n — данные натуральные числа. Автор рассматривает решения $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ уравнения $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, где r_i — целые неотрицательные числа. Он доказывает, что для любого целого неотрицательного числа c справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c},$$

где $\{h_i\}_{i=1}^{k}$ — главное решение уравнения, определенное отношениями

$$h_i = \left[\frac{n}{k}\right] \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n,$$

$$h_i = \left[\frac{n+k}{k}\right] \text{ для } k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n < i \leqslant k.$$

A. Apfelbeck

3492. О диофантовых линейных неравенствах с двумя неизвестными. Эрхарт (Sur les inéquations diophantiennes linéaires à deux inconnues. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 21, 2987—2989 (франц.)

Пусть r — остаток от деления C на ab (a и b — целые). Выражается число n_c решений в натуральных числах X и Y неравенства $aX + bY < C$ через число n_r решений в натуральных числах неравенства $aX + bY < r$. В частных случаях n_c выражается непосредственно через a, b и C. В. А. Голубев

3493. Число решений диофантовых линейных уравнений и неравенств с тремя неизвестными. Эрхарт (Nombre de solutions de l'équation et de l'inéquation diophantiennes linéaires à trois inconnues. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 22, 3142—3145 (франц.)

Пусть a, b, c — целые, взаимно простые числа и r — остаток от деления D на abc. Число решений в натуральных числах уравнения $aX + bY + cZ = D$ выражается при помощи числа решений в натуральных числах уравнения $aX + bY + cZ = r$ или $aX + bY + cZ = abc - r$. Аналогично выражается число решений неравенства $aX + bY + cZ < D$. Для уравнений результат обобщается на $D = K(a,b)(b,c)(c,a)$ (K — целое). В. А. Голубев

3494. Об отыскании делителей натуральных чисел. Шнейдт (Über die Aufsuchung von Teilern der natürlichen Zahlen. Schneidt Max), Sitzungsber. Bayer. Akad Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1957 (1958), 151—176 (нем.)

Натуральные числа, не делящиеся на 2, 3 и 5, представляются в виде $Z_c = 30k + c$, где c — одно из простых чисел 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и 31. Указанные натуральные числа образуют 8 различных множеств. k называется индексом множества Z_c, k называется простым индексом по отношению к множеству Z_c, если $30k + c$ — простые числа.

Изучая множества Z_c, автор доказывает некоторые свойства делимости натуральных чисел.

Например: Если при неотрицательных целых x и y, k не имеет ни одного из четырех видов:

$$\begin{aligned}
&(11\ 31) \quad k = 30xy + 31x + 11y + 11,\\
&(19\ 29) \quad k = 30xy + 29x + 19y + 18,\\
&(7\ 23) \quad k = 30xy + 23x + 7y + 5,\\
&(13\ 17) \quad k = 30xy + 17x + 13y + 7,
\end{aligned} \qquad (1)$$

то $Z_{11} = 30k + 11$ есть простое число, в противном случае составное.

Если k не представимо в виде:

$$\begin{aligned}
&(7\ 19) \quad k = 30xy + 19x + 7y + 4,\\
&(17\ 29) \quad k = 30xy + 29x + 17y + 16,\\
&(13\ 31) \quad k = 30xy + 31x + 13y + 13,\\
&(21\ 11) \quad k = 30xy + 23x + 11y + 8,
\end{aligned} \qquad (2)$$

то $Z_{13} = 30k + 13$ — простое число, в противном случае составное. Если k не представимо в виде (1) и (2), то $30k + 11$ и $30k + 13$ — два простые числа-близнецы.

A. Лурсманашвили

3495. О числах $\binom{m}{n}$. Голубев (O číslech $\binom{m}{n}$. Goluběv V. A.), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 2, 216—217 (чешск.)

Автор доказывает следующую теорему: Пусть m, n — натуральные числа. Тогда существуют натуральные числа $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ такие, что для любого x

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} A_k \binom{x+n-k}{n},\quad x^{2m-1} = \sum_{k=1}^{m} B_k \binom{x+k-1}{2k-1}$$

(символом $\binom{J}{j}$ обозначено число $[J(J-1)\ldots(J-j+1)]/j!$).

Для коэффициентов A_k найдена рекуррентная формула.

J. Marik

3496. Новое доказательство теоремы Лемера. Робертс (A new proof of a theorem of Lehmer. Roberts J. B.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 2, 191—194 (англ.)

Доказана теорема: Пусть $a_0, \ldots, a_k$ — произвольные комплексные числа, среди которых могут быть и равные. $b \geqslant 2$ — целое число. Пусть далее C — множество всех чисел вида $j_0a_0 + \ldots + j_k a_k$, где j_i — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant j_i \leqslant b-1$; C_j — множество тех чисел из C, для которых выполняется условие

$j_0 + \ldots + j_k \equiv j \pmod b$; $P(x)$ — многочлен, степень которого не превосходит k, тогда

$$\sum_{n \in C_i} P(x+n) = \sum_{n \in C_j} P(x+n), \quad 0 \leqslant i \leqslant b-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant b-1.$$

Доказательство основано на использовании оператора, переводящего многочлен $P(x)$ в многочлен $P(x+c)$.

В. Д. Подсыпанин

3497. О периодичности по модулю m последовательностей чисел $\binom{n}{k}$. Зомбек (Sur la périodicité modulo m des suites de nombres $\binom{n}{k}$. Zabek Swiatomir), Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, 1956 (1958), **A10**, 37—47 (франц.; рез. польск., русск.)

Пусть m — натуральное число и $\{a_n\}$ — бесконечная последовательность целых чисел. Последовательность $\{a_n\}$ называется периодической по модулю m с периодом q, если имеются два натуральные числа q и N такие, что $a_{n+q} \equiv a_n \pmod m$ для $n \geqslant N$.

Определяются кратчайшие периоды для

$$a_n = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Доказываются теоремы: 1) При произвольных m и k последовательность $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — периодическая по модулю m; 2) Если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}$ (p_i — простые, α_i — натуральные числа), то наименьший период по модулю m для $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ равен $q_k = m p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_l^{\beta_l}$, где $\beta_i = \beta_i(k)$ — наибольшее среди целых неотрицательных чисел, таких что $p_i^{\beta_i} \leqslant k$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

В. А. Голубев

3498. Отыскание двух дробей, имеющих специальную сумму. Нюгор (Finding two fractions having a special sum. Nygaard P. H.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 261—262 (англ.)

При помощи элементов теории сравнений доказана теорема: для любых двух данных положительных взаимно простых чисел p и q существуют неотрицательные целые числа $x < p$ и $y < q$ такие, что $x/p + y/q = (pq-1)/pq$. Числа x и y определяются формулами $x = p - n$ и $y = (nq-1)/p$, где n — корень сравнения $nq - 1 \equiv 0 \pmod p$.

Б. А. Кордемский

3499. Приближение к круговому сегменту с использованием диофантовых уравнений. Фрейм (Approximating a circular segment by use of Diophantine equations. Frame J. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 268—271 (англ.)

Рассматривается отношение площади кругового сегмента к площади вписанного в него равнобедренного треугольника, как функции $h \leqslant 1$, где h — отношение высоты сегмента к радиусу круга. Имеется рациональная функция от h, дающая приближения к указанному отношению с погрешностью, не большей чем 0,0005. При решении задачи используются несложные диофантовы уравнения.

В. Д. Подсыпанин

3500. Ряды Фибоначчи. Спыну (Siruri Fibonacci. Spînu Cornel), Gaz. mat. si. fiz., 1958, **B9**, № 4, 179—184 (рум.)

Рассматриваются свойства рекуррентного ряда, определенного соотношением

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \quad (u_1 = 1, \quad u_2 = 2),$$

т. е. одного из так называемых рядов Люка-Фибоначчи.

А. И. Попов

3501. От периодической дроби к рекуррентному счетному циклу. Дюпарк (From recurring fraction to recurring computing circuit. Duparc H. J. A.), Rapp. Math. centrum, 1954, № ZW—010, 1—8 (англ.)

Рассматриваются некоторые периодические процессы. Анализируются условия, при которых данная возвратная последовательность $\{u\}$ целых чисел $u_0, u_1, \ldots$ связана с другой последовательностью $\{v\}$ целых чисел $v_0, v_1, \ldots$ так, что свойства и период одной из них определяются свойствами и периодом другой.

В. А. Голубев

3502. Спичечная головоломка. Одзэки, Судзуки (Match stick puzzles. II. Ozeki Nobuo, Suzuki Yasutaka), Тиба дайгаку бунригакубу киё, сидзэн кагаку, J. Coll. Arts and Sci. Chiba Univ. Natur. Sci. Ser., 1957, **2**, № 2, 91—92 (англ.)

Пусть из спичек выложен квадрат, содержащий n^2 единичных квадратов (единица — длина спички). Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то необходимо и достаточно удалить $2n^2/3+1$ спичек, чтобы в оставшейся фигуре не было прямоугольников, ограниченных спичками. Соответственно, в случае $n \equiv \pm 2 \pmod 6$ надо удалить $2[n^2/3]+1$ спичек, а в случае $n \equiv \pm 1 \pmod 6$ — $2[n^2/3]+2$ спичек.

Б. А. Кордемский

3503. К «решету Эратосфена». Гейстер (Zum «Sieb des Eratosthenes». Geister Kurt), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, № 5, 284 (нем.)

3504. Простые числа, сколько страсти! Джентиле (Numeri primi, che passione! Gentile Giovanni), Sci. giov., 1958, **7**, № 7-8, 109—110 (итал.)

3505. Очарование чисел. Рейхман (The fascination of numbers. Reichmann W. J.), Discovery, 1958, **19**, № 1, 17—19 (англ.)

3506. О некоторых вопросах теории чисел. Перес-Качо (Sobre algunas cuestiones de la teoria de numeros. Perez-Cacho L.), Rev., mat. hisp.-amer., 1958, **18**, № 1-2, 10—27 (исп.)

3507. Исправление: Целые решения уравнения $x^2+y^2+z^2+2xyz=n$. Морделл (Corrigendum: Integer solutions of the equation $x^2+y^2+z^2+2xyz=n$. Mordell L. J.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 383 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3609.

См. также: 3905

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

3508 К. Лекции по абстрактной алгебре. Том II. Линейная алгебра. Джейкобсон (Lectures in abstract algebra. Vol. II. Linear algebra. Jacobson Nathan, Toronto—New York—London, D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, XII+280 pp., 5.85 doll.) (англ.)

Эта книга является вторым из трех томов, посвященных основам абстрактной алгебры. Следующий неполный перечень указывает содержание: (конечномерные) векторные пространства над телом; линейные преобразования, двойственность между векторными пространствами и к ним сопряженными пространствами; циклические модули, минимальный и характеристический полиномы матрицы модули с конечным числом образующих над областью главных идеалов, теория элементарных делителей, эндоморфизм кольца, линейные преобразования, коммутирующие с данным преобразованием. Теоремы Жордана—Гёльдера и Крулля—Шмидта (для векторных пространств с множеством линейных преобразований как операторами); билинейные формы, симметрические и эрмитово скалярные произведения (последнее относится к инволютивному автоморфизму основного тела; теорема Витта (Witt, J. reine und angew. Math., 1936, **176**, 31—34) с улучшениями

Полла (Pall, Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 889—893), Капланского (Kaplansky, Anais. Acad. brasil. ciênc., 1950, 22, 1—17) и Дьёдонне (Dieudonné, Sur les groupes classiques, Hermann, Paris, 1948) евклидовы и унитарные пространства; произведения векторных пространств, тензорные пространства; структура кольца (всех) линейных преобразований векторного пространства; бесконечномерные векторные пространства, их нётеровы базисы, размерность сопряженного пространства (используются леммы Эрдеша — Капланского и Маккея), конечная топология линейных преобразований, двусторонние идеалы в конце линейных преобразований, плотные кольца, теорема плотности Шевалле—Джейкобсона (о неприводимых кольцах линейных преобразований) (с обобщениями теорем Бернсайда и Веддербарна (Jacobson, Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 57, 228—245), теоремы об изоморфизме с обобщением теоремы Артина, двойственность пространств и плотных колец, содержащих преобразования конечного ранга Накаяма (Nakayama, Ann. Math., 1947, (2) 48, 8—21). В книге принята в основном абстрактная точка зрения, однако, часто используются вычислительные и конструктивные методы. Изложение изящно и изобилует новыми идеями и новизной техники, даже когда идет речь о классических результатах. Имеется много весьма интересных упражнений. T. Nakayama

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 9, 873.

3509 К. Основы алгебры. Луговский, Вейнерт (Grundzüge der Algebra. Teil 1. Allgemeine Gruppentheorie. Lugowski Herbert, Weinert Joachim. Leipzig, Teubner, 1957, IV, 234 S. ill., 10.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 2, 106 (нем.)

3510 К. Высшая алгебра (Умаглеси алгебра). Кемхадзе Ш. С. Тбилиси, Научно-метод. кабинет, 1957, 484 стр., илл., 8 р. (груз.)

3511 К. Алгебра. Арчболд (Algebra. Archbold John William. London, Pitman, 1958, xix, 440 pp., ill. 45 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 445, 11 (англ.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3512. О точных условиях пригодности эмпирических критериев устойчивости для моделирующих устройств. Пародди (Sur des conditions rigoureuses de validité de critères empiriques de stabilité des machines mathématiques analogiques. Parodi Maurice), Onde électr., 1957, 37, № 365—366, 758—760 (франц.; рез. англ.)

Пусть $A = (a_{ik}) - n \times n$-матрица с действительными элементами, m_l, $l = 1,2,\ldots,n$ — максимальный по абсолютной величине недиагональный элемент l-й строки. Доказывается, что для того чтобы характеристические корни матрицы A были положительными, достаточно, чтобы:

I а) $a_{ii} > 0$,

б) можно найти n таких положительных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что

$$a_{ii} > \frac{m_i}{C_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} C_j, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

или

II а) $a_{ii} > 0$,

б) можно найти n таких положительных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что

$$a_{kk}a_{\lambda\lambda} > \frac{m_k m_\lambda}{C_k C_\lambda} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} C_j \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \lambda}}^{n} C_j.$$

Приводятся примеры, иллюстрирующие эти критерии.

Г. Н. Веселая

3513. Обобщение обратной матрицы. Эгервари (Az inverz matrix általánosítása. Egerváry Jenö), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, № 3, 315—324 (венг.; рез. русск., англ.)

Основная цель автора в настоящей работе дать такой способ нахождения обобщенной обратной матрицы, основанный на разложении данной матрицы на базисные множители (РЖМат, 1956, 6389), который требует лишь рациональные действия. Из результата автора в качестве специального случая получается фигурирующая в работе Пенроза (РЖМат, 1956, 4333) обобщенная обратная матрица. Автор исходит из обратимых с одной стороны матриц, для их обратных матриц дает и геометрическую интерпретацию, затем постепенно переходит к определению обобщенной обратной матрицы любой матрицы. С помощью обобщенной обратной матрицы может быть дано явное представление условия разрешимости неоднородной линейной системы уравнений и ее общего решения. К этому относится теорема 3 работы:

Если $A = A_1 A_2^*$ есть разложенная на базисные множители форма матрицы коэффициентов, то ее обратная (в смысле Пенроза) матрица

$$A^{(-1)} = A_2 (A_1^* A A_2)^{-1} A_*^1.$$

Если далее выполняется условие разрешимости

$$AA^{(1)} b = b,$$

то общее решение неоднородной линейной системы уравнений

$$Ax = b$$

дается выражением

$$x = (E - A^{(-1)}A) t + A^{(-1)} b,$$

где t — любой вектор параметров. Резюме автора

3514. Матрицы-подстановки. Несис Е. И., Сб. тр. Ставропольск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 10, 89—98

Рассматриваются матрицы, соответствующие подстановкам, т. е. квадратные матрицы, у которых в каждой строке и каждом столбце один элемент равен 1, а остальные 0. Выведен ряд элементарных свойств таких матриц. Исследован вопрос о виде матрицы, коммутирующей с заданной матрицей-подстановкой. Рассмотрен физический пример, относящийся к фазовым переходам в дипольной решетке. В. К. Турки

3515. О неотрицательных квадратных матрицах Керубино (Sulle matrici quadrate non negative Cherubino Salvatore), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, 10, № 3-4, 217—235 (итал.)

Изложение теории приводимости для случая неотрицательных матриц. Большая часть результатов была ранее опубликована автором или другими учеными. К числу результатов, полученных автором, относится критерий неприводимости матриц (теорема VII) и два уточнения для неотрицательных матриц одной теоремы Лаппо—Данилевского (теоремы XV и XVI). В. К. Турки

3516. О некоторых свойствах эрмитовых матриц Фидлер (O některých vlastnostech hermitovských matric. Fiedler Miroslav), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 3, 168—176 (чешск.; рез. русск., англ.)

Пусть A — эрмитова матрица, через $r(A)$ обозначим натуральное число такое, что после подходящей перестановки строк и столбцов матрица A представится в виде прямой суммы $r+1$ неразложимой матрицы. Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — две матрицы одного и того же порядка, то символом $A \circ B$ будем обозначать матрицу (c_{ij}), элемент

которой $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$. Если A — данная матрица, то через A_- будем обозначать матрицу (u_{ij}), элементы которой $u_{ij} = \mathrm{Re}\, a_{ij}$ для $\mathrm{Re}\, a_{ij} < 0$, $u_{ij} = 0$ для $\mathrm{Re}\, a_{ij} \geq 0$.

Доказаны теоремы:

1. Если для эрмитовой матрицы A существует положительный собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению кратности s, то

$$r = (A_-) \leq s - 1.$$

2. Пусть A — положительно определенная эрмитова матрица, $r(A) = r$. Тогда число 1 — наименьшее собственное значение матрицы $A \circ A'^{-1}$; его кратность равна $r+1$ и соответствующий собственный вектор — $j_1 j'$ $(1,1,\ldots,1)$.

3. Для положительно определенной эрмитовой матрицы A имеет место равенство

$$r[(A \circ A'^{-1})_-] = r(A).$$

V. Pták

3517. Доказательство теоремы о произведении матриц. Мурти (Proof of a theorem on the product of matrices. Murthy Pavman), Math. Student, 1957, **25**, № 3-4, 160—162 (англ.)

3518. О матричной теореме Крайга и Хотеллинга. Тауски (On a matrix theorem of A. T. Craig and H. Hotelling. Taussky Olga), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 2, 139—141, Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 139—141 (англ.)

Хотеллинг (Hotelling H., Ann. Math. Statistics, 1944, **15**, 427—429) доказал следующую матричную теорему: Если A и B — симметрические квадратные матрицы порядка n с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$\det(I - \lambda A) \det(I - \mu B) \equiv \det(I - \lambda A - \mu B)$$

для всех λ и μ, то $AB = 0$.

Аналогичная теорема в терминах квадратичных форм была сформулирована и доказана Крайгом (Craig A. T., Ann. Math. Statistics, 1943, **14**, 195—197).

Автор доказывает указанную выше теорему в предположении, что A и B — эрмитовы или даже нормальные матрицы, и показывает, что теорема не справедлива для произвольных матриц. Доказательство проводится иным методом. А. Ф. Голубчиков

3519. О некоторых матричных уравнениях над конечным полем. Ходжес (Some matrix equations over a finite field. Hodges John H.), Ann. mat. pura ed. appl., 1957, **44**, 245—250 (англ.)

Продолжение серий работ автора, выполненных частично в соавторстве и под руководством Карлица (РЖМат, 1955, 1631, 2545; 1956, 4338).

Пусть $GF(q)$ — конечное поле из $q = p^n$ элементов, p — нечетное простое, B — симметрическая матрица порядка t, $A = A(m, t; r)$ — матрица типа $m \times t$ и ранга r с элементами из $GF(q)$. Тогда число $N_t(A, B)$ матриц $X = X(m, t)$ с элементами из $GF(q)$, удовлетворяющих уравнению

$$X'A + A'X = B, \tag{1}$$

представляется формулой (теорема 1)

$$N_t(A, B) = q^e h(B_0), \tag{2}$$

где $e = t(m - r) + r(r - 1)/2$; P, Q — неособенные матрицы,

$$PAQ = I(m, t; r), \quad Q'BQ = B_0,$$

$$h(B_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_0 = 0, \\ 0, & \text{если } B_0 \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

$I(m, t; r)$ — матрица типа $m \times t$, содержащая в левом верхнем углу единичную матрицу порядка r и 0 на остальных местах. Из (3) следует условие существования решения уравнения (1): тогда и только тогда, когда $B_0 = 0$.

Формулы, аналогичные (2), устанавливаются и для числа решений уравнения вида $X'A - A'X = B$, где B — косимметрическая матрица вида $B = U^*A + A^*U$, а A, B, U — эрмитовы матрицы с элементами из $GF(q^2)$.

Б. М. Уразбаев

3520. Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца. Понизовский И. С., Матем. сб., 1958, **45**, № 1, 3—16

Пусть K — кольцо с единицей e, в котором выполнено условие минимальности и $2e \neq 0$. Через K_n обозначается полное кольцо матриц степени n над K, через GK_n — группа всех обратимых матриц из K_n, через K_n^* — мультипликативная полугруппа кольца K_n. Пусть Φ — гомоморфизм K_n^* в некоторую коммутативную полугруппу S с единицей, причем единица полугруппы K_n^* отображается в единицу полугруппы S. Тогда Φ-определителем матрицы $M \in K_n^*$ называется элемент $\Phi(M)$ полугруппы S и обозначается через $\Delta_\Phi(M)$. Через $D_i(b)$ обозначается матрица, у которой вне главной диагонали стоят нули, на главной диагонали — единицы, кроме пересечения i-й строки и i-го столбца, где стоит b. Доказывается, что Φ-определитель $D_i(b)$ не зависит от индекса i, т. е. законно обозначение $\Delta_\Phi(D_i(b))$ через $\Delta_\Phi(b)$. Оказывается, что при умножении строки матрицы M слева на элемент $b \in K$ определитель $\Delta_\Phi(H)$ матрицы M умножается на $\Delta_\Phi(b)$, при перестановке двух строк матрицы M Φ-определитель матрицы M умножается на $\Delta_\Phi(-e)$ и что определитель матрицы не меняется, если к какой-либо строке матрицы прибавить другую строку этой матрицы, умноженную слева на любой элемент кольца K (аналогичные свойства имеют место и для столбцов) Пусть кольцо K имеет представления над полем P — тем полем, в мультипликативной полугруппе которого ищутся определители матриц из GK_n. Если $M \in GK_n$, D — неособенное представление K над P, d — степень D, то через H_D обозначим матрицу над полем P степени nd, получающуюся из M заменой каждого элемента M матрицей, отвечающей ему в представлении D. Тогда $\det M_D$ — определитель M_D в обычном смысле, обозначается через $\det_D M$, т. е. $\det_D M = \det M_D$. Оказывается, что если $\det_D M = 0$, то матрица M необратима в K_n. Если же D — точное представление, то для обратимости M в K_n необходимо и достаточно, чтобы $\det_D M \neq 0$. В этом случае отображение φ_D, определяемое равенством $\varphi_D(M) = M_D$, является изоморфизмом K_n и $M^{-1} = \varphi_D^{-1}(M_D^{-1})$. Так построенные определители автор называет определителями в поле P. Определитель в поле P матриц из K_n есть представление первой степени полугруппы K_n^* в поле P. Если рассматривать только обратимые матрицы (матрицы из GK_n), то эти представления образуют группу η, которая является подгруппой группы характеров $GK_n/(GK_n)'$. Оказывается, что число образующих группы η равно числу неприводимых представлений K в P. Доказывается, что указанная конструкция построения Φ-определителей матриц над K в поле P не исчерпывает всех таких определителей.

А. И. Курочкина

3521. О строении упорядоченных вещественных векторных пространств. Эрдёш (On the structure of ordered real vector spaces. Erdos' J.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 334—343 (англ.)

Векторное пространство над полем вещественных чисел называется упорядоченным, если для его элементов x, y, ... определено отношение „$>$“ (линейного) упорядочения, обладающее следующими свойствами: 1) $x > 0$, $y > 0$ влечет $x + y > 0$; 2) $x > 0$, $\lambda > 0$ влечет $\lambda x > 0$ (λ — скаляр); 3) $x > y$ тогда и только тогда, если $x - y > 0$. В качестве конкретного упорядоченного векторного пространства рассмотрим пространство функций, определенных на каком-либо упорядоченном множестве T, и таких, каж-

дая из которых принимает ненулевые вещественные значения только на конечном подмножестве множества T. Сложение функций и умножение функций на число определяется как обычно. Функцию $f(t)$ будем считать положительной, если для первого места t_0 из тех, на которых значение этой функции отлично от нуля, справедливо $f(t_0) > 0$. Полученное таким образом пространство называется дискретным лексикографически упорядоченным функциональным пространством над множеством T. В работе доказана теорема о том, что каждое упорядоченное вещественное векторное пространство счетной размерности (упорядоченно) изоморфно дискретному лексикографически упорядоченному функциональному пространству. Как следствие отсюда получается, что дискретное лексикографически упорядоченное функциональное пространство, определенное над упорядоченным множеством рациональных чисел, обладает тем свойством, что в него вложимо каждое упорядоченное вещественное векторное пространство счетной размерности. Показано, что упомянутая теорема об изоморфизме не имеет места для упорядоченных вещественных векторных пространств размерности $2^{\aleph_0}$, и что она является обобщением известной теоремы о строении вещественных векторных структур конечной размерности (Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, гл. 15, теорема 1).

В статье рассматриваются также упорядоченные вещественные векторные пространства произвольной бесконечной размерности. Подпространство J упорядоченного вещественного векторного пространства V называется идеалом, если из $a \in J$, $x \in V$ и $|x| \leqslant |a|$ следует $x \in J$ ($|x| = x$ при $x > 0$, $|0| = 0$, и $|x| = -x$ при $x < 0$). Пусть H обозначает максимальное собственное ($\neq V$) подпространство пространства V и a — элемент из V, не содержащийся в H, тогда множество V разбивается на три взаимно непересекающихся подмножества: 1) H; 2) элементов вида $h + \lambda a$ ($h \in H$; $\lambda > 0$) и 3) элементов вида $h - \lambda a$ ($h \in H$; $\lambda > 0$). Последние два подмножества называются полупространствами пространства V, определенными с помощью подпространства H. Рассмотрим максимальную цепь (относительно теоретико-множественного включения) подпространств произвольного векторного пространства. Если $H \subset H'$ — два члена этой цепи и один из них содержится в другом в качестве максимального собственного подпространства, то выберем одно из двух полупространств пространства H', определенных подпространством H, и образуем объединение всех выделенных полупространств цепи. Указанный процесс получения объединения называется конструкцией (A). Показано, что множество всех положительных элементов упорядоченного вещественного векторного пространства бесконечной (не обязательно счетной) размерности может быть получено с помощью конструкции (A), причем единственным образом: с помощью конструкции (A), примененной к цепи всех идеалов пространства V. Каждое подмножество векторного пространства, получаемое с помощью конструкции (A), можно принять в качестве множества положительных элементов, определяющего упорядочение этого векторного пространства.

Отмеченные результаты перестают быть справедливыми, если рассматривать упорядоченные векторные пространства не над полем вещественных чисел, а над каким-либо другим неизоморфным ему упорядоченным полем.

А. А. Виноградов

3522. **Заметка о среднем значении $V(f)$. III.** Утияма (Note on the mean value of $V(f)$. III. Uchiyama Saburô, Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 2, 97—98 (англ.)

Обозначая через $V(f)$ число различных значений многочлена $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x$ из $GF[q, x]$ ($q = p^\nu$, $1 < n < p$) при $x \in GF(q)$ и принимая гипотезу Римана для функций L (РЖМат, 1956, 3632), автор получает оценку

$$q^{-n+1} \sum_{cmf=n} \left(V(f) - c_n q\right)^2 = O(q),$$

где $c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$ (см. также РЖМат, 1956, 5702).

А. И. Кострикин

3523 К. **Введение в матричное исчисление, матрицы, определители, приложения к алгебре и аналитической геометрии для подготовительных курсов втузов, для университетов, втузов, инженеров и физиков. 2-е изд. Монжаллон** (Initiation au calcul matriciel, matrices, déterminants, applications à l'algèbre et à la géométrie analytique, à l'usage des classes préparatoires aux grandes écoles, des élèves des facultés des sciences et des écoles d'ingénieurs, des ingénieurs et des physiciens. 2e éd. Monjallon Albert. Paris, Vuibert, 1957, 132 p., 70 fr.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 37, 799 (франц.)

3524. К. **Линейные уравнения. Кон** (Linear equations. Cohn Paul Moritz. London, Routledge and K. Paul, 1958, viii, 74 pp., ill., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 447, 10 (англ.)

3525 К. **Конечномерные векторные пространства. Халмош** (Finite-dimensional vector spaces. 2nd ed. Halmos Paul Richard. Princeton, N. J.—London, Van Nostrand, 1958, viii, 200 pp., 37 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 433, 7 (англ.)

3526 К. **Теория матриц для физиков. Хединг** (Matrix theory for physicists. Heading John. London, Longmans, Green and Co., 1958, xi, 242 pp., ill., 35 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 442, 11 (англ.)

3527 Д. **Характеристические полиномы симметричных матриц. Шапиро А. П.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

ГРУППЫ

3528. **Две изоморфные группы из учебного материала средней школы. Кирш** (Zwei isomorphe Gruppen aus dem Schulstoff der Mittelstufe. Kirsch A.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 2, 78—80 (нем.)

Указывается на значение понятия об изоморфизме групп для школьного преподавания. В качестве подходящего примера рекомендуется рассмотрение изоморфизма между группой вращений, переводящих квадрат в себя, и группой подстановок, осуществляемых над членами геометрической пропорции (с сохранением равенства левой и правой частей).

В. К. Туркин

3529. **Характеры линейных представлений конечных групп над произвольным полем. Берман С. Д.**, Матем. сб., 1958, **44**, № 4, 409—456

Подробное изложение результатов, предварительные сообщения о которых были помещены в статьях автора (РЖМат, 1953, 1082; 1957, 2070; 1958, 5517). В. К. Туркин

3530. **О принципе перечисления Холла. Дюбюк П. Е.**, Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 11, 3—11

Дается обобщение так называемого „принципа перечисления" Холла (Hall P., Proc. London Math. Soc., 1933, **36**, 25 — 95) и затем полученный результат применяется для обобщения теоремы Кулакова и Холла о числе подгрупп данной p-группы (см. там же).

Обозначим через D пересечение всех максимальных подгрупп конечной p-группы G (p — простое число); всякая подгруппа M группы G, содержащая D, называется майорантной подгруппой. Доказывается следующая теорема:

Пусть M_s — определенная майорантная подгруппа индекса p^s группы G; майорантные подгруппы индекса p^α группы G, входящие в M_s, обозначаются через $M_\alpha^{(s)}$ $(s \leqslant \alpha)$. Пусть Z — совокупность систем элементов группы G, $n(M_\alpha^{(s)})$ и $n(M_s)$ — число систем из Z, принадлежащих соответственно $M_\alpha^{(s)}$ и M_s. Если каждая система из Z принадлежит по крайней мере одной из подгрупп $M_{s+1}^{(s)}$, то

$$n(M_s) - \sum_{M_{s+1}^{(s)}} n\left(M_{s+1}^{(s)}\right) + p \sum_{M_{s+2}^{(s)}} n\left(M_{s+2}^{(s)}\right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^k p^{\frac{1}{2}k(k-1)} \sum_{M_{s+k}^{(s)}} n\left(M_{s+k}^{(s)}\right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{d-s} p^{\frac{1}{2}(d-s)(d-s-1)} n\left(M_d^{(s)}\right) = 0,$$

где $d = [G : D]$ и каждый из знаков $\sum_{M_\alpha^{(s)}}$ распространяется на все $M_\alpha^{(s)}$. Принцип перечисления Холла получается при $s = 0$.

Далее доказывается теорема, обобщающая теорему Кулакова: Пусть $G = M_0$ есть конечная p-группа, $p > 2$. Число подгрупп индекса p^α группы G, входящих по крайней мере в одну из майорантных подгрупп M_l индекса p^l $(l < d;\ l \leqslant \alpha)$ сравнимо с $1 + p$ по модулю p^2. Обобщается также теорема Холла о числе подгрупп конечной p-группы.

Доказательство первой теоремы по существу не отличается от доказательства принципа перечисления, данного Холлом. При доказательстве остальных двух теорем используются теоремы Кулакова и Холла о числе подгрупп конечной p-группы.

Примечание референта. В теореме, обобщающей теорему Кулакова, необходимо ввести дополнительное условие: $l > 0$ и $\alpha < n$, где p^n — порядок группы G. При $l = 0$ или $\alpha = n$ указанная теорема, очевидно, не верна. П. А. Гольберг

3531. О перестановочности факторов в П-факторизациях конечных групп. Чунихин С. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 888—889

Ранее автор (РЖМат, 1957, 1154) доказал теорему: Пусть m является наибольшим П-делителем (П — некоторое множество простых чисел) порядка g группы G. Тогда всякому представлению числа m в виде произведения некоторых приведенных П-цельноблочных делителей $h_1, h_2, \ldots, h_t$ порядка g группы G соответствует представление G в виде произведения

$$G = H_1 H_2 \ldots H_t, \qquad (1)$$

где $H_1, H_2, \ldots, H_t$ — такие подгруппы G, что наибольшими П-делителями их порядков будут соответственно числа $h_1, h_2, \ldots, h_t$. В реферируемой работе доказывается, что можно выбрать попарно перестановочные сомножители произведения (1). Для П-отделимых групп возможность выбора попарно перестановочных подгрупп разложения была доказана М. И. Каргополовым (РЖМат, 1958, 7496). П. А. Гольберг

3532. Нормальные делители кратно транзитивных групп подстановок. Виландт, Хупперт (Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen. Wielandt Helmut, Huppert Bertram), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 18—26 (нем.)

Введены новые определения.

Группа подстановок называется k раз примитивной (k — натуральное число), если она k раз транзитивна и если, кроме того, ее подгруппа, состоящая из всех подстановок, оставляющих некоторый заданный символ на месте, $k - 1$ раз примитивна.

Группа подстановок называется $^1/_2$ раза транзитивной, если в каждую ее область транзитивности входит одно и то же (> 1) число символов. Группа называется $k + {}^1/_2$ раз транзитивной, если она транзитивна, а ее подгруппа, состоящая из подстановок, оставляющих заданный символ на месте, $k - {}^1/_2$ раз транзитивна.

Доказаны теоремы:

3. 4. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, k раз транзитивная и отличная от симметрической группы $\mathfrak{S}^n$, и пусть $\mathfrak{N} \neq 1$ — нерегулярный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ (возможно, $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$). Тогда $\mathfrak{N}$ $k - {}^1/_2$ раз транзитивен.

3. 5. Пусть $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{S}^n$ $k + {}^1/_2$ раз транзитивная группа, $\mathfrak{N} \neq 1$ — нерегулярный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{N}$ k раз транзитивен (имеются два исключительных случая).

3. 6. Пусть $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{S}^n$ — k раз примитивная группа, $\mathfrak{N} \neq 1$ — нерегулярный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{N}$ k раз транзитивен. В. К. Туркин

3533. Частично системно транзитивные группы подстановок. Давыдова В. К., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 121—125

Группа $\mathfrak{G}$ подстановок n символов названа m-частично K-системно транзитивной, когда она действует как транзитивная группа подстановок на множестве $S_1, S_2, \ldots S_m$, $m \leqslant \binom{n}{k}$, где все S_i суть фиксированные (неупорядоченные) системы из данных n символов по k. Приведены примеры таких групп и доказаны некоторые их элементарные свойства. Случай $m = \left\{ {n \atop k} \right\}$ более подробно рассматривался раньше Бомонтом и Питерсоном (РЖМат, 1956, 4356). А. И. Кострикин

3534. Об одном соотношении делимости для конечных групп. Михлер (Über eine Teilbarkeitsbeziehung für endliche Gruppen. Michler Lothar), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1958, **2**, № 1, 5—6 (нем.)

Доказана теорема: Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная конечная группа порядка g и $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа порядка h. Тогда

$$\frac{g}{m} \left| \left\{ {n \atop h} \right\}^{g/n} \left\{ {g \atop n} \right\} ! \right.$$

Здесь n — порядок нормализатора $\mathfrak{N}_{\mathfrak{H}}$ подгруппы $\mathfrak{H}$ относительно $\mathfrak{G}$ и m — порядок максимального нормального делителя $\mathfrak{G}$, содержащегося в $\mathfrak{H}$. В. К. Туркин

3535. Абелевы группы, являющиеся прямыми слагаемыми всякой абелевой группы, содержащей их в качестве сервантных подгрупп. Лось (Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups. Łoś J.), Fundam. math., 1957, **44**, № 1, 84—90 (англ.)

Доказывается, что абелева группа G тогда и только тогда служит прямым слагаемым для всякой абелевой группы, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы, когда G есть прямое слагаемое некоторой группы H, допускающей бикомпактную топологию. Это условие равносильно тому, что всякая система уравнений вида $\sum_{s \in T} n_{ts} x_s = g_t$, где $t \in T$ (T — множество какой-то мощности), $g_t \in G$, n_{ts} — целые числа, причем при фиксированном t $n_{ts} \neq 0$ лишь для конечного числа $s \in T$, лю-

бая конечная подсистема которой имеет в группе G решение, сама имеет решение в группе G. В работе доказывается также теорема о том, что всякую абелеву группу можно изоморфно вложить в качестве сервантной подгруппы в полную прямую сумму примарных циклических групп и групп типа p^∞ по некоторым простым числам p.

А. П. Мишина

3536. Об эндоморфизмах абелевых групп. Длаб (O endomorfismech abelových grup. Dlab Vlastimil), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 2, 249—252 (чешск.)

Пусть $\bar{G}$ — минимальная полная группа, содержащая данную абелеву группу G. Обозначим через $\mathfrak{R}(\bar{G}; G)$ кольцо, состоящее из всех эндоморфизмов группы $\bar{G}$, переводящих группу G в себя, а через $\mathfrak{M}(\bar{G}; G)$ двусторонний идеал этого кольца, состоящий из всех тех эндоморфизмов ε группы $\bar{G}$, для которых $G_\varepsilon = 0$. Утверждается, что кольцо всех эндоморфизмов группы G изоморфно фактор-кольцу $\mathfrak{R}(\bar{G}; G)/\mathfrak{M}(\bar{G}; G)$.

Далее утверждается, что кольцо эндоморфизмов прямой суммы $G = \sum_{0 \leqslant \alpha < \tau} G_\alpha$ абелевых групп G_α изоморфно кольцу всех квадратных матриц $(\varkappa_{\alpha\beta})$ типа τ, где $\varkappa_{\alpha\beta}$ — гомоморфное отображение группы G_α в группу G_β, причем гомоморфизмы $\varkappa_{\alpha\beta}$ таковы, что при каждом фиксированном α каждый элемент группы G_α лежит во всех ядрах гомоморфизмов $\varkappa_{\alpha\beta}$, за исключением, быть может, конечного числа их.

Если A — полная абелева группа и

$$A = \sum_{0 \leqslant \alpha_0 < \tau_0} R_{\alpha_0} + \sum_{\tau_0 \leqslant \alpha_1 < \tau_1} G_{\alpha_1}(p_1^\infty) + \ldots + \sum_{\tau_{n-1} \leqslant \alpha_n < \tau_n} G_{\alpha_n}(p_n^\infty) + \ldots,$$

где R_{α_0} — группы, изоморфные аддитивной группе всех рациональных чисел, $G_{\alpha_i}(p_i^\infty)$ — группы типа p_i^∞, то кольцо всех эндоморфизмов группы A изоморфно кольцу всех квадратных матриц $(a_{\alpha\beta})$ типа $\nu = \tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_n + \ldots$, где при $0 \leqslant \alpha < \tau_0$, $0 \leqslant \beta < \tau_0$, $a_{\alpha\beta}$ — рациональные числа, при $0 \leqslant \alpha < \tau_0$, $\tau_{i-1} \leqslant \beta < \tau_i$ $(i = 1,2,\ldots)$ $a_{\alpha\beta}$ — p_i-адические числа, при $\tau_{i-1} \leqslant \alpha < \tau_i$, $\tau_{i-1} \leqslant \beta < \tau_i$, $a_{\alpha\beta}$ — целые p_i-адические числа, а все остальные элементы $a_{\alpha\beta}$ равны нулю. При этом при фиксированном α, $0 \leqslant \alpha < \tau_0$, среди чисел $a_{\alpha\beta}$ имеется лишь конечное число отличных от нуля рациональных чисел и конечное число не целых p_i-адических чисел $(i = 1,2,\ldots)$ и при $\tau_{i-1} \leqslant \beta < \tau_i$ (i фиксировано) и произвольном фиксированном α в обычной записи p_i-адических чисел с помощью бесконечных сумм для любого наперед заданного натурального числа m_0 во всех числах $a_{\alpha\beta}$, кроме, быть может, конечного числа, первые m_0 слагаемых равны нулю.

А. П. Мишина

3537. Фактор-группы без кручения свободных абелевых групп и классификация абелевых групп без кручения. Эрдёш (Torsion-free factor groups of free abelian groups and a classification of torsion-free abelian groups. Erdös Jenö), Publs math., 1957, **5**, № 1-2, 172—184 (англ.)

Пусть F — свободная абелева группа и H — такая ее подгруппа, что фактор-группа F/H без кручения. Доказывается, что в том и только в том случае в группе F можно выбрать систему свободных образующих так, что она будет в то же время полной системой представителей смежных классов группы F по подгруппе H, когда мощность группы F/H совпадает с рангом H. Если G — какая-то абелева группа и H — такая ее подгруппа, что фактор-группа G/H без кручения (причем $G/H \neq 0$), то в том и только в том случае существует система образующих группы G, являющаяся вместе с тем полной системой представителей смежных классов группы G по подгруппе H, когда мощность G/H больше или равна мощности H.

Далее доказывается, что если в свободных абелевых группах F и F' даны подгруппы H и H' одинакового ранга и фактор-группы F/H, F'/H' — изоморфные между собой группы без кручения, то существует изоморфное отображение φ группы F на группу F', при котором $H\varphi = H'$. Если φ — гомоморфное отображение свободной абелевой группы F на прямую сумму каких-то абелевых групп без кручения G_α, то $F = \sum F_\alpha$, где при каждом α $F_{\alpha\varphi} = G_\alpha$.

Наконец, $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$-матрицей ($\mathfrak{m}$ — какое-то бесконечное кардинальное число) называется матрица с рациональными элементами, имеющая $\mathfrak{m}$ строк и $\mathfrak{m}$ столбцов, у которой в каждой строке число отличных от нуля элементов конечно. $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$-матрица A называется правой регулярной, если для нее существует такая $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$-матрица A', что $AA' = E$, где E — матрица, у которой на главной диагонали везде стоит 1, а остальные элементы равны нулю. Если, кроме того, $A'A = E$, то матрица A называется регулярной. Две $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$-матрицы A и B называются эквивалентными, если существуют такие регулярные матрицы P, Q, что у матриц Q и Q' все элементы — целые числа и $PAQ = B$. Доказывается, что между всеми абелевыми группами без кручения мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ и всеми классами эквивалентных между собой правых регулярных $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$-матриц можно установить взаимно однозначное соответствие.

А. П. Мишина

3538. Замечание Филиппа Холла. Робинсон (A remark by Philip Hall. Robinson G. de B.), Canad. Math. Bull., 1958, **1**, № 1, 21—23 (англ.)

Выведена формула для степени неприводимого представления полной линейной группы $GL(d)$, соответствующего разбиению $[\lambda]$ натурального числа λ на целые положительные слагаемые.

В. К. Туркин

3539. О коммутаторах модулярной группы. Виллари (Sui commutatori del gruppo modulare. Villari Gaetano), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 2, 196—201 (итал., рез. англ.)

Рассматривается группа G_p (p — простое число, $p > 3$), состоящая из $1/2\,p(p^2 - 1)$ подстановок

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p},$$

производимых над символами $\infty, 0, 1, \ldots, p-1$. Доказывается, что G_p все элементы являются коммутаторами.

В. К. Туркин

3540. О новом типе автоморфизма в полной линейной группе над кольцом. Рейнер (A new type of automorphism of the general linear group over a ring. Reiner Irving), Ann. Math., 1957, **66**, № 3, 461—466 (англ.)

Пусть K — поле, а $R = K[x]$. Изучается группа автоморфизмов $A_2(R)$ полной линейной группы $GL(2, R)$.

Матрицы

$$(\alpha)\begin{cases} S=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_a=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a\in K,\ a\neq 0, \\ X_0=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_n=\begin{bmatrix} 1 & x^m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m=1,2,\ldots \end{cases}$$

составляют систему образующих группы $GL(2, R)$.

Если теперь $1, y_1, y_2, \ldots,$ — K-базис алгебры R, то заменив $B(\alpha)$ каждую матрицу X_m матрицей $Y_m = \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, получим также систему образующих (β) группы $GL(2, R)$. Доказывается, что переход от системы (α) к системе (β) определяет некоторый автоморфизм Φy группы $GL(2, R)$. Строится одна система образующих группы $A_2(R)$. Отмечается, что среди автоморфизмов группы $GL(n, R)$ при $n>2$ нет автоморфизма, аналогичного Φy.

Д. А. Супруненко

3541. Линейные группы над областью целостности. Янь Ши-цзянь (Linear groups over a commutative integral domain. Yien Sze-chien), Sci. Rec., 1957, **1**, № 5, 297—300 (англ.)

Пусть R — область целостности, e_{ij} — матрица над R порядка n с единственным отличным от нуля элементом, равным единице и расположенным на месте (i, j).

Теорема 1. Если P есть невырожденная матрица над R порядка n такая, что для каждой матрицы e_{ij} $(i\neq j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n)$ существует матрица X_{ij} над R, удовлетворяющая условию

$$PX_{ij}=e_{ij}P, \tag{1}$$

то $P=\|a_{ij}\|$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}(a_{i1},\ldots,a_{in})=(a_{11},\ldots,a_{1n}),\ 1\leqslant i\leqslant n, \\ (a_{i1},\ldots,a_{in})^n=(|P|),\end{gathered} \tag{2}$$

где $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ — идеал кольца R, порожденный элементами $(a_{i1},\ldots,a_{in}$, $a|P|$ — определитель матрицы P. Обратно, если P обладает свойствами (2), то для каждой матрицы X над R порядка n существуют такие две матрицы Y, Z порядка n над R, что $PX=YP$, $XP=PZ$.

Полную линейную группу $GL(n, R)$ определим как группу всех обратимых матриц над R. Специальную линейную группу $SL(n, R)$ определим как подгруппу группы $GL(n, R)$, порождаемую всеми матрицами вида $En+\lambda e_{ij}$, $i\neq j$, $\lambda\in R$. Предположим, что характеристика R не равна двум, $n>2$. Обозначим через A изоморфизм $SL(n, R)$ в $GL(n, R)$. Тогда имеет место

Теорема 2. Существует такая матрица P над кольцом R порядка n, удовлетворяющая условиям (2), что либо $PA(X)=X^{\sigma}P$ для всех $X\in SL(n, R)$, либо $PA(X)=(X_{\sigma})^{-1}$ для всех $X\in SL(n, R)$, где σ — изоморфизм кольца R.

Д. А. Супруненко

3542. О произведении двух циклических 2-групп. Блэкберн (Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen. Blackburn Norman), Math. Z., 1958, **68**, № 5, 422—427 (нем.)

Пусть группа G может быть представлена в виде произведения двух циклических 2-групп. Показано (РЖМат, 1954, 3241; 1956, 4349; 1959, 144), что коммутант группы G — абелева группа с двумя образующими. Кроме того, если G' не является циклической, то G/G' есть абелева группа типа $(n, 1)$, где $n>1$. В реферируемой работе исследуется структура группы G' в предположении, что она не является циклической группой.

Доказывается теорема: Пусть группа G представима в виде произведения двух циклических 2-групп и G' не является циклической группой. Если $n>2$, то G' является абелевой группой типа $(m, 1)$, где m — некоторое натуральное число. Показано, что при $n=2$ эта теорема не верна.

П. А. Гольберг

3543. Включение в полные произведения упорядоченных произведений нескольких групп. Маркьонна-Тибилетти (Immersione in prodotti completi di prodotti ordinati di più gruppi. Marchionna Tibiletti Cesarina), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **44**, 233—244 (итал.)

Рассматривается произведение $G=A_1A_2\ldots A_s$ групп $A_1, A_2, \ldots, A_s$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $G_j=A_j\ldots A_s$ — группа, перестановочная с A_{j-1} $(j=1, 2, \ldots, s)$;

2) $G_j\cap A_{j-1}=1$ $(j=2, \ldots, s)$.

Автор называет такое произведение упорядоченным.

Доказывается, что все такие произведения изоморфны транзитивным подгруппам определенного типа (так называемым шрейеровским) некоторых полных произведений (в смысле Краснера и Калужнина). Отдельно рассмотрены следующие частные случаи:

1) все группы A_i попарно перестановочны друг с другом;

2) каждая группа G_i является нормальным делителем группы G_{i-1} (а не G_{i+1}, как сказано в статье);

3) каждая группа G_i является нормальным делителем группы G.

В. К. Туркин

3544. Норма и гипернорма. Бер (Norm and hypernorm. Baer Reinhold), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 347—350 (англ.)

Нормой $N(G)$ группы G называется пересечение всех нормализаторов подгрупп группы G. Через $Z(G)$ обозначается центр группы G. Гиперцентр группы G определяется как пересечение всех таких нормальных делителей X группы G, для которых $Z(G/X)=1$. Подобным образом гипернормой группы G называется пересечение всех таких нормальных делителей X группы G, для которых $N(G/X)=1$. В работе доказано, что из $Z(G)=1$ следует $N(G)=1$. Отсюда вытекает, что понятия гиперцентра и гипернормы группы эквивалентны.

А. А. Виноградов

3545. Радикал и нильэлементы в группах. Плоткин Б. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 130—135

Пусть x и a — два элемента группы G. Вводятся обозначения: $x=[x, a, (0)]$, $[x, a(n)]=[[x, a(n-1)], a]$. Элемент a называется нильэлементом в группе G, если для всякого $x\in G$ найдется такой показатель n, что $[x, a(n)]=1$. Группа G называется NR-группой, если ее локально нильпотентный радикал (максимальный локально нильпотентный нормальный делитель группы G) совпадает с множеством всех нильэлементов. Доказывается следующая теорема: Если группа обладает возрастающим нормальным рядом, все факторы которого локально удовлетворяют условиям максимальности, то такая группа является NR-группой. Так как нильпотентная группа с конечным числом образующих удовлетворяет условию максимальности, то из этого результата следует, что всякая радикальная группа является NR-группой (РЖМат, 1956, 8614). Основной результат содержит также теорему Бера о том, что всякая группа с условием максимальности является NR-группой (РЖМат, 1958, 1024).

В заключение отметим, что в настоящее время неизвестны примеры групп, не являющихся NR-группами.

П. А. Гольберг

3546. О p-подгруппах групп и теоремах, аналогичных теореме Силова. Дицман А. П., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 99—114

Пусть p — простое число, $[H_\alpha]=H_A$, $\alpha\in A$,—некоторая система подгрупп группы G. Элемент a группы G автор называет $(p; H_A)$-элементом, если для любой подгруппы $H_\alpha, \alpha\in A$, существует такое целое неотрицательное число k, что $a^{p^k}\in H_\alpha$. Подгруппа U группы G, все элементы которой являются $(p; H_A)$-элементами, называется $(p; H_A)$-

подгруппой группы G. Если H_A является инвариантной системой подгрупп или если каждая подгруппа H_α, $\alpha \in A$, инвариантна в G, то U называется соответственно $(p; H_A$, инв.)- и $(p; H_A$, норм.)-подгруппой.

После доказательства в первых двух параграфах ряда лемм в §§ 3 и 4 даются достаточные условия сопряженности максимальных $(p; H_A)$-подгрупп, которые обобщают известную теорему Силова. Доказывается следующая теорема: Если группа G содержит максимальную $(p; H_A$, инв.)-подгруппу P, обладающую конечным числом сопряженных подгрупп в G, причем каждый элемент из любой подгруппы, сопряженной с P, с каждым элементом всякой подгруппы H_α, $\alpha \in A$, порождает $(p; H_\alpha)$-подгруппу группы G, то все максимальные $(p; H_A$; инв.)-подгруппы сопряжены между собой и число их сравнимо с единицей по модулю p. В частности, если группа G содержит максимальную $(p; H_A$; норм.)-подгруппу P, обладающую конечным числом сопряженных подгрупп в G, то любые две максимальные $(p; H_A$; норм.)-подгруппы сопряжены между собой и число их сравнимо с единицей по модулю p. Это следствие может быть легко получено из теоремы А. Г. Куроша о силовских p-подгруппах в топологических группах (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, 9, № 2, 65—78, теорема 1).

Из двух теорем, доказываемых в § 4, автор выводит следствие: Пусть $[P_\beta]$, $\beta \in B$, будет классом сопряженных силовских p-подгрупп группы G и $H_1, H_2, \ldots, H_k$ — нормальные делители группы G, причем их пересечение равно единице. Если множество подгрупп $H_\alpha P_\beta$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ и β принимает все значения из B, конечно, то любые две силовские p-подгруппы группы G сопряжены. В частности, если $k = 2$, $H_1 = G$ и $H_2 = e$, то этот результат обращается в теорему Дицмана, Куроша и Узкова о сопряженности силовских подгрупп произвольных групп. Желательно построить пример, показывающий, что при выполнении указанных условий, множество подгрупп $[P_\beta]$ может быть бесконечным.

В § 5 даются необходимые и достаточные условия сопряженности всех максимальных $(p; H_A$; норм.)-и $(p; H_A$; инв.)-подгрупп. Из трех теорем этого параграфа сформулируем только одну: Пусть $[P_\beta]$, $\beta \in B$, — система сопряженных максимальных $(p; H_A$; норм.)-подгрупп группы G. Все максимальные $(p; H_A$; норм.)-подгруппы группы G сопряжены между собой тогда и только тогда, когда для каждой максимальной $(p; H_A$; норм.)-подгруппы P группы G можно найти среди подгрупп системы $[P_\beta]$ такую подгруппу P_t, что класс подгрупп, сопряженных с P_t в $\{P_t, P\}$, содержит конечное множество различных подгрупп. Необходимость условий во всех трех теоремах очевидна, а достаточность условий выводится из указанных в §§ 3 и 4 достаточных условий сопряженности всех максимальных $(p; H_A$; инв.)-и $(p; H_A$; норм.)-подгрупп.

В заключение отметим, что некоторые результаты работы были уже опубликованы автором (Ann. Math., 1947, 48, 137—146; Докл. АН СССР, 1948, 59, № 7, 1235—1236).

П. А. Гольберг

3547. О подгруппах неразрешимой группы. Мачульский А. А., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, 108, 129—133

Рассматриваются группы G, у которых ряд коммутантов стабилизируется на конечном месте. Член ряда коммутантов, совпадающий со своим коммутантом, обозначим через $K(G)$ (автор коммутант $K(G)$ называет K-подгруппой группы G). Очевидно, что $K(G)$ содержит все подгруппы группы G, которые совпадают со своим коммутантом, и если N — нормальный делитель группы G, то фактор-группа G/N разрешима тогда и только тогда, когда $K(G) \leqslant N$.

Предполагая, что G/N (при $K(G) \subseteq N$) — конечная группа, автор для подгрупп A, удовлетворяющих условиям

$$N \subseteq A,\ ([G:A],\ [A:N]) = 1,$$

получает из теоремы Холла (Hall Ph., J. London Math. Soc., 1928, 3, 98—105) очевидное ее обобщение. Аналогичным образом автор обобщает некоторые теоремы референта о силовских базах групп (РЖМат, 1953, 88, теоремы 3 и 5).

П. А. Гольберг

3548. Решение некоторых алгоритмических проблем для свободных и свободных нильпотентных групп. Гольдина Н. П., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 3, 183—189

Для свободной группы F дано описание конечного числа тождественных преобразований записи произвольного элемента $g \in F$ через образующие, позволяющее решить вопрос о принадлежности g к n-му члену нижнего центрального ряда этой группы. Используется базис Холла, состоящий из повторных коммутаторов. Отмечается значение полученного результата для свободных нильпотентных групп.

А. И. Кострикин

3549. Группы автоморфизмов, относящиеся к системе порождающих элементов группы. Пиккар (Les groupes d'automorphismes associés à un système d'éléments générateurs d'un groupe. Piccard Sophie), Actes. Soc. helv. sci. natur., 1957, 137, 54—56 (франц.)

Пусть G — группа, S — система элементов из G. Автоморфизмы группы G, переводящие S в S, составляют группу, которую автор называет группой автоморфизмов, относящихся к системе S. Классом систем элементов из G, содержащим S, автор называет совокупность систем элементов из G, каждая из которых получается из S посредством какого-либо автоморфизма группы G. Для систем, входящих в один и тот же класс, группы автоморфизмов, к ним относящиеся, изоморфны.

В дальнейшем рассматривается случай, когда G — конечная группа, $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — совокупность независимых порождающих элементов этой группы. Число таких систем и число их классов (в вышеприведенном смысле слова) являются инвариантами группы. Приведена формула, дающая связь между значениями этих инвариантов.

В заключение приведена формулировка следующей теоремы: Пусть C и C' — примитивные пересекающиеся циклы длины m, перемещающие в общей сложности n символов ($m < n < 2m - 1$). Если совокупность всех примитивных циклов длины, равной четному (соответственно нечетному) числу m, перемещающих в общей сложности $n - 1$ символов, порождает симметрическую (соответственно знакопеременную) группу этих символов, то C и C' также порождают симметрическую (соответственно знакопеременную) группу символов, над которыми они оперируют.

Приведено также необходимое и достаточное условие для того, чтобы две подстановки степени n имели общие перемещаемые символы.

В. К. Туркин

3550. Представления полупростых групп Ли. IV. Харриш-Чандра (Representations of semisimple Lie groups. IV. Harish-Chandra), Amer. J. Math., 1955, 77, № 4, 743—777 (англ.)

Продолжение серии работ автора по представлениям полупростых групп Ли (РЖМат, 1955, 3086; 1956, 4655, 4656). Пусть G — некомпактная полупростая группа Ли, первое число Бетти которой есть единица. Допустим, что G имеет конечный центр и K — ее максимальная компактная подгруппа, тогда G/K естественно изоморфна связной симметричной области некоторого комплексного аффинно-

го пространства (Cartan E., Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1935, **11**, 116—162).

Этот факт тесно связан с сериями унитарных представлений группы G, которые автор изучает в настоящей статье. Они естественно характеризуются через характеры компактной картановской подгруппы группы G. Эти представления обобщают для высоких размерностей дискретные серии унитарных представлений группы $SL(2,R)$, указанные Баргманом (Bargmann, Ann. Math., 1947, **48**, № 2, 568—640). В настоящей статье рассматриваются главным образом алгебраические свойства этих представлений группы G, как, например, соответствующие свойства корней и весов. Их теоретико-функциональные свойства будут рассмотрены в другом месте. Некоторые из результатов статьи описаны в общих чертах ранее (РЖМат, 1957, 4185). E. I. Mautner

Перевод из Math. Revs., 1956, **17**, № 3, 282.

3551. Конструкция некоторых линейных положительных форм. Видав (Construction de quelques formes linéaires positives. Vidav Ivan), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, **11**, 67—72 (франц.)

Строятся неприводимые представления группы вращений трехмерного пространства с помощью положительных функционалов на обертывающей алгебре соответствующей алгебры Ли. Ф. А. Березин

3552. О понятии канонических переменных. Дьёдонне (Sur la notion de variables canoniques. Dieudonné Jean), An. Acad. brasileira cienc., 1955, **27**, № 3, 251—258 (франц.)

Исправления и добавления к предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 4283). Исправляется доказательство теоремы о существовании канонических переменных и доказывается, что формальная группа Ли, групповой закон которой является каноническим, полностью определена ее гипералгеброй и что всякой «типичной» подалгебре гипералгебры действительно соответствует «типичная» подгруппа. G. P. Hochschild

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 763.

3553. Чистые подгруппы и двойственные им группы. Хартман, Гуляницкий (Les sous-groupes purs et leurs duals. Hartman S., Hulanicki A.), Fundam. math., 1957, **45**, № 1, 71—77 (франц.)

Пусть G — локально компактная абелева группа, G^* — группа ее непрерывных характеров. Подгруппа $H \subset G$ называется чистой, если $nH = H \cap nG$ для всех целых n. Доказывается, что если G или G^* порождаются компактной окрестностью единицы, то замкнутая подгруппа $H \subset G$ чиста тогда и только тогда, когда каждый элемент из H^* конечного порядка можно продолжить в элемент из G^* того же порядка. Это верно и в том случае, когда G — прямая сумма связной группы и дискретной группы без кручения. А. Л. Онищик

3554. Некоторые теоремы о структуре локально компактных локальных групп. Джакоби (Some theorems on the structure of locally compact local groups. Jacoby Robb), Ann. Math., 1957, **66**, № 1, 36—39 (англ.)

Основной результат: Всякая конечномерная метризуемая локально компактная локальная группа локально изоморфна прямому произведению вполне несвязной компактной топологической группы и группы Ли. В частности, всякая локально евклидова локальная группа есть локальная группа Ли, что является утвердительным решением 5-й проблемы Гильберта в локальном случае. Доказано также, что если локально компактная локальная группа G обладает окрестностью единицы, не содержащей нетривиальных подгрупп, то G есть локальная группа Ли. А. Л. Онищик

3555. Об образующих классических групп. Дьёдонне (Sur les générateurs des groupes classiques. Dieudonné Jean), Summa brasil. math., 1955, **3**, № 8, 149—178 (франц.)

Пусть $u \neq e$ — элемент группы $GL(n,k)$ преобразования линейного пространства E над полем K, r — ранг отображения $u-e$, W — ядро этого отображения, $\bar{u}$ — преобразование, индуцируемое u в пространстве E/W. Доказывается, что либо u представимо в виде произведения $r-1$ трансвекций и трансвекции или растяжения по отношению к некоторым гиперплоскостям, либо $r>1$ и $\bar{u}$ — нетождественная гомотетия; в последнем случае u представимо в виде произведения r трансвекций и трансвекции или растяжения. Аналогичный вопрос решается для симплектической, ортогональной и унитарной групп. А. Л. Онищик

3556. Рассеянные подгруппы конечных групп. Бер (Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen. Baer Reinhold), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 7—17 (нем.)

Пусть G — конечная группа, g — ее элемент; их порядки обозначаются соответственно через $\mathfrak{o}(G)$ и $\mathfrak{o}(g)$. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторое множество простых чисел; G — называется $\mathfrak{S}$-группой (соответственно $\mathfrak{S}$-элементом), если все простые делители $\mathfrak{o}(G)$ (соответственно $\mathfrak{o}(g)$) содержатся в $\mathfrak{S}$. Множество всех $\mathfrak{S}$-элементов группы G обозначается через $G_{\mathfrak{S}}$. Подгруппа конечной группы называется холловской, если у нее порядок и индекс взаимно просты.

Пусть σ — некоторое множество простых чисел, в котором введено частичное упорядочение; если простое число p из σ „меньше" простого числа q из σ, то это записывается в виде $p\sigma q$. Хвостом в σ называется совокупность всех x из σ, удовлетворяющих условию $x\sigma p$. Группа G называется σ-рассеянной, если для каждого хвоста $\mathfrak{S}$ из σ подгруппа $G_{\mathfrak{S}}$ группы G является характеристической.

Группа G называется σ-регулярной, если выполняются следующие условия: а) G содержит σ-рассеянную холловскую σ-подгруппу, у которой совокупность простых делителей порядка совпадает с σ; б) всякая подгруппа U группы G содержит σ-подгруппу V, у которой индекс $[U:V]$ не делится ни на какое простое число из σ; в) из $p\sigma q$ вытекает, что никакой элемент из G не индуцирует в q-подгруппе группы G автоморфизм порядка p.

Доказаны следующие теоремы:

1. σ-группа G является σ-рассеянной в том и только в том случае, если $q\sigma p$ следует из того, что некоторый элемент из G индуцирует автоморфизм порядка $p \neq q$ в q-подгруппе группы G.

2. Если U и V — подгруппы группы G, удовлетворяющие нижеприведенным условиям а), б), в), то U сопряжена в G с подгруппой группы V: а) V — σ-рассеянная холловская σ-подгруппа группы G: б) $\mathfrak{o}(U)$ — делитель $\mathfrak{o}(V)$; из $p\sigma q$ всегда следует, что никакой элемент из U не индуцирует автоморфизм порядка p в q-подгруппе группы U; в) если H — холловская подгруппа группы V, p—σ-минимальный простой делитель числа $\mathfrak{o}(H)$ и P — p-подгруппа группы H, сопряженная в G с силовской подгруппой группы U, то число подгрупп, сопряженных с P в H, равно степени числа p.

3. Если H — холловская σ-подгруппа σ-регулярной группы G и U — подгруппа группы G, имеющая порядок, делящий $\mathfrak{o}(H)$, то U сопряжена в G с подгруппой группы H. В. К. Туркин

3557. Замечания о конечных полугруппах и определение полугрупп порядка 4. Тамура (Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. Tamura Takayuki), Токусима дайгаку гакугэй киё (Сидзэн катаку), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci., 1954, **5**, Dec., 17—27 (англ.)

Доказаны некоторые предложения о конечных полугруппах и с их помощью вычислены все 126 полугрупп четвертого порядка. Л. М. Глускин

3558. О представлениях простых полугрупп. Иван (O reprezentácii jednoduchých pologrúp. Ivan Ján), Mat.-fys. časop., 1958, **8**, № 1, 27—39 (словацк.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются матричные представления вполне простых полугрупп без нуля. Статья содержит лишь результаты, полученные ранее другими методами (РЖМат, 1956, 1125; 1957, 1176, C. r. Acad. sci, 1952, **234**, 2413—2414, 2511—1513). Л. М. Глускин.

3559. К теории полугрупп. Сеп (Zur Theorie der Halbgruppen. Szép J.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 344—346 (нем.)

Пусть F — полугруппа, $[a]$ — подполугруппа полугруппы F, порожденная элементом $a \in F$; $\{a\}$ — бесконечная циклическая подгруппа полугруппы F, порожденная элементом $a \in F$; $F_a = \{a\}$, если $\{a\}$ существует и $xe = ex$ для любого элемента $x \in F$ такого, что $x^2 = a$. В противном случае $F_a = [a]$ (e — единица группы $\{a\}$).

Для того чтобы при любом $a \in F$ существовало такое подмножество $C_a \subset F$, что $F_a \cap C_a = \emptyset$ и $F/F_a = F_a C_a$, необходимо и достаточно, чтобы $F = \bigcup G_i$, где G_i — попарно непересекающиеся подгруппы полугруппы F и $e_i e_j = e_j$ для единиц e_i этих групп. Л. М. Глускин

3560. О гомоморфизмах полугруппы на группу. Шютценбергер (Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 17, 2442—2444 (франц.)

Даны две теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия, при которых данный комплекс H элементов полугруппы S с единицей является полным прообразом элемента при гомоморфизме полугруппы S на группу. Теорема 1 сводится к существованию в S нормальной полугруппы, имеющей для любого $x \in S$ непустое пересечение с множеством $x S U S x$.

Примечания референта. 1. Теорема II неверна. Условие теоремы фактически является необходимым и достаточным для того, чтобы комплекс H был полным прообразом элемента группы G при гомоморфизме S на полугруппу S', содержащую идеал G, являющийся группой (этот идеал может быть отличным от всей полугруппы S'). 2. Наличие единицы в полугруппе S несущественно. Л. М. Глускин

3561. О квазиидеалах полугрупп. Штейнфельд (Über die Quasiideale von Halbgruppen. Steinfeld Otto), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 262—275 (нем.)

Непустое подмножество A полугруппы F называется ее квазиидеалом, если $AH \cap HA \subseteq A$. Всякий квазиидеал полугруппы является пересечением ее левого и правого идеалов. Рассмотрен ряд свойств квазиидеалов полугрупп. В частности, рассмотрены квазиидеалы вполне простых полугрупп и полугрупп, являющихся объединениями групп. Л. М. Глускин

3562. Потенциальная делимость элементов в полугруппах. Шутов Э. Г., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 75—103

Пусть A — полугруппа, Ω_1, Ω_2 — подмножества декартова произведения $A \times A$ (одно из них может быть пустым). Для Ω_1, Ω_2 имеет место потенциальная делимость, если существует надполугруппа A' полугруппы A, в которой $x \in z A'$, $t \in A' y$ для любых $(x, z) \in \Omega_1$, $(y, t) \in \Omega_2$. Основная теорема: Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq A \times A$ и удовлетворяют условиям: 1) Если $ax = tb$ $(a, b \in A)$, то найдется такой элемент $c \in A$, что $ax = tcx$, 2) $a_1 x = a_2 x \to a_1 z = a_2 z$, 3) $t b_1 = t b_2 \to y b_1 = y b_2$ $(a_i, b_i \in A)$.

Тогда для Ω_1 и Ω_2 имеет место потенциальная делимость. Среди других следствий в терминах потенциальной делимости дано необходимое и достаточное условие вложимости полугруппы A в полугруппу с левым делением (РЖМат, 1957, 1179). Построен пример полугруппы A, в которой при некоторых $x_1, x_2 \in A$ для $\Omega_1 = (x_1, x_2)$, $\Omega_2 = \emptyset$ и $\Omega_1 = \emptyset$, $\Omega_2 = (x_2, x_1)$ имеет место потенциальная делимость, а для $\Omega_1 = (x_1, x_2)$, $\Omega_2 = (x_2, x_1)$ — нет. Исследован вопрос о потенциальной делимости элементов в полугруппе всех квадратных матриц порядка n над произвольным полем.

Доказано, что для любой полугруппы A существует надполугруппа A', в которой $A \subseteq A' z A'$ для любого $z \in A$. Л. М. Глускин

3563. Обратимость элементов в полугруппах. Лаппин Е. С., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 65—74

Доказано, что при $i = 1, l, r$ или 0 каждое из подмножеств A_i полугруппы A (РЖМат, 1958, 7510) является ее подполугруппой и $A_1 A_i \subseteq A_i$, $A_i A_1 \subseteq A_i$, $A_l A_r \subseteq A_0$, $A_r A_0 \subseteq A_0$, $A_0 A_l \subseteq A_0$. Доказаны также предложения об увеличительных элементах, сформулированные в цитированной выше статье. Л. М. Глускин

3564. Потенциальная сопряженность элементов в полугруппах. Шутов Э. Г., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 105—119

Пусть A — полугруппа с единицей e. Элементы $x, z \in A$ называются сопряженными в полугруппе A, если существует такой элемент $t \in A$, что $x = t z t^{-1}$ $(t t^{-1} = t^{-1} t = e)$. Элементы $x, z \in A$ называются потенциально сопряженными в A, если существует надполугруппа A' полугруппы A, удовлетворяющая условиям: 1) если A имеет единицу e, то e является единицей A', 2) x и z сопряжены в A'. Элементы $x, z \in A$ называются однотипными, если при любых натуральных m, n справедливость одного из равенств $x^m = x^n$, $z^m = z^n$ влечет за собой справедливость другого.

Доказана теорема: Если элементы $x, z \in A$ однотипны и двусторонне обратимы в A (РЖМат, 1958, 7510), то x и z потенциально сопряжены в A. Л. М. Глускин

3565. О полугруппах с минимальными левыми идеалами и без минимальных правых идеалов. Сайто, Хори (On semigroups with minimal left ideals and without minimal right ideals. Saito Toru, Hori Shigeo), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 1, 64—70 (англ.)

Обозначим через $\mathfrak{m}(C)$ мощность множества C. Пусть Λ, A — два произвольных множества. Каждому $\alpha \in A$ поставим в соответствие два бесконечных кардинальных числа $\mathfrak{m}(\alpha)$, $\mathfrak{m}'(\alpha)$; $\mathfrak{m}'(\alpha) \leqslant \mathfrak{m}(\alpha)$. Пусть далее $\{K_{\lambda\alpha}\}$ — совокупность попарно непересекающихся множеств $K_{\lambda\alpha}$ $(\lambda \in \Lambda, \alpha \in A)$, $\mathfrak{m}(K_{\lambda\alpha}) = \mathfrak{m}_\alpha$; $K_\lambda = \bigcup_{\alpha \in A} K_{\lambda\alpha}$; $K_\lambda^* = K_\lambda \cup \lambda$; f_μ^λ — взаимно однозначное отображение K_λ^* в K_μ такое, что $f_\mu^\lambda(K_{\lambda\alpha}) \subset K_{\mu\alpha}$ при любом $\alpha \in A$ и $\mathfrak{m}\left[K_{\mu\alpha} \setminus f_\mu^\lambda(K_{\lambda\alpha})\right] = \mathfrak{m}_\alpha^1$; $\mathfrak{F}_\mu^\lambda$ — множество всех таких отображений f_μ^λ.

Обозначим через $f^\lambda = \left\{f_\mu^\lambda\right\}_{\mu \in \Lambda}$ такой элемент прямого произведения $\Pi_{\mu \in \Lambda} \mathfrak{F}_\mu^\lambda$, что индекс α множества $K_{\mu\alpha}$, содержащего $f_\mu^\lambda(\lambda)$, не зависит от μ; $\mathfrak{F}_\lambda$ — множество всех f^λ; $\mathfrak{F} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_\lambda$. $\mathfrak{F}$ является полугруппой относительно действия операции

$$g \circ f = \left\{g_\nu^\mu f_\mu^\lambda\right\}_{\nu \in \Lambda}, \text{ где } f^\lambda = \left\{f_\mu^\lambda\right\}_{\mu \in \Lambda}, g^\mu = \left\{g_\nu^\mu\right\}_{\nu \in \Lambda}.$$

Полугруппа $\mathfrak{F}$, названная BL-полугруппой, не содержит идемпотентов и является объединением своих минимальных левых идеалов.

Доказана теорема: Если полугруппа S обладает минимальным левым идеалом, не содержащим идемпотентов, то существует гомоморфизм φ ее минимального двустороннего идеала K в некоторую BL-полугруппу. Если при этом K — полугруппа с левым сокращением, то φ — изоморфизм и множество A состоит из одного элемента. Л. М. Глускин

3566. Ранг-функции на полугруппах. Пост (Rank functions on semigroups. Post K. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1958, **A61**, № 3, 332—334; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 332—334 (англ.)

Пусть V — множество всех последовательностей $\{\alpha_j\}$ натуральных чисел α_j, $\{\alpha_j\} \geqslant \{\beta_j\}$, если $\alpha_j \geqslant \beta_j$ при любом j; $\{\alpha_j\} > \{\beta_j\}$, если $\{\alpha_j\} \geqslant \{\beta_j\}$ и $\{\alpha_j\} \neq \{\beta_j\}$. Отображение $\rho(a)$ полугруппы S в V называется ранг-функцией, если: 1) $\rho(ab) \leqslant \rho(a)$, $\rho(ab) \leqslant \rho(b)$, 2) $\rho(a) < \rho(b) \to a \in SbS$.

На множестве ранг-функций полугруппы S определена эквивалентность $\sim$: $\rho_1 \sim \rho_2 \leftrightarrow [\rho_1(a) \leqslant \rho_1(b) \leftrightarrow \rho_2(a) \leqslant \rho_2(b)]$ при любых $a, b \in S$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех классов $\bar{\rho}$ этой эквивалентности. $\mathfrak{A}$ естественным образом частично упорядочено. Если $\mathfrak{A}$ счетно, то оно содержит единственный максимальный элемент $\bar{\sigma}$, который называется рангом.

В полугруппе S с единицей e определена эквивалентность $\equiv$: $a \equiv b \leftrightarrow (a \in SbS, b \in SaS)$. Основной результат статьи: Если $\rho \in \bar{\sigma}$, то $a \equiv b \leftrightarrow \rho(a) = \rho(b)$ для любых $a, b \in S$.

Л. М. Глускин

3567. Заметка об идемпотентных полугруппах. II. Ямада, Кимура (Note on idempotent semigroups. II. Yamada Miyuki, Kimura Naoki), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 2, 110—112 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 9584. Идемпотентная полугруппа S (РЖМат, 1956, 7160; 1958, 9584) называется нормальной (нормальной слева), если при любых $a, b, c \in S$ она удовлетворяет условию $abca = acba$ (соответственно $abc = acb$). Рассматривается строение нормальных и нормальных слева идемпотентных полугрупп в виде полуструктуры (РЖМат, 1956, 1106) вполне простых идемпотентных полугрупп.

Л. М. Глускин

3568. Заметка об идемпотентных полугруппах. III. Кимура (Note on idempotent semigroups. III. Kimura Naoki), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 2, 113—114 (англ.)

На некоторых типах идемпотентных полугрупп (РЖМат, 1956, 7160; 1958, 9584, реф. 3567) эквивалентности $xPy \leftrightarrow (xy = y,\ yx = x)$ и $xQy \leftrightarrow (xy = x,\ yx = y)$ являются регулярными. Рассмотрены соответствующие фактор-полугруппы. Доказательств статья не содержит.

Л. М. Глускин

3569. Связные упорядоченные топологические полугруппы с идемпотентными концами. Клиффорд (Connected ordered topological semigroups with idempotent endpoints. I. Clifford A. H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 1, 80—98 (англ.)

Нитью называется линейно упорядоченная связная топологическая полугруппа, имеющая наименьший и наибольший элементы, являющиеся идемпотентами. Нить S называется стандартной, если ее наименьший элемент является нулем, а наибольший — единицей полугруппы S. Всякая стандартная нить без внутренних идемпотентов топологически изоморфна либо мультипликативной полугруппе всех вещественных чисел из интервала $[0, 1]$ (РЖМат, 1956, 5787), либо полугруппе всех чисел из интервала $[1/2, 1]$ с действием $x \circ y = \max(1/2, xy)$.

Всякая стандартная нить S является объединением своих подполугрупп S_e, соответствующих идемпотентам $e \in S$; $S_e = [e, e_1]$ не содержит идемпотентов, отличных от ее концов e и e_1 (возможно, $e_1 = e$ и $S_e = \{e\}$). Для любых $a \in S_e$, $b \in S_f$ $(e < f)$ имеет место $ab = ba = a$.

Пусть $S = [0, u]$ — стандартная нить, $S' = [f', 0]$ — произвольная нить, φ — непрерывный гомоморфизм нити S в нить S', $\varphi 0 = 0$. Множество $T = SUS'$ $(S \cap S' = 0)$ является нитью, если считать $x \circ y' = \varphi x \cdot y'$, $y' \circ x = y' \cdot \varphi x$, $y' \leqslant x$ $(x \in S,\ y' \in S')$. T называется правым линейным расширением нити S' посредством нити S. Если $\varphi S = e'$, то расширение T называется правым контактным расширением нити S' посредством нити S.

Пусть $T = S \cup S'$, где $S = [0, u]$ — стандартная нить, $S' = [f, 0]$ — нить, двойственная (относительно порядка) стандартной и T — правое линейное расширение нити S' посредством нити S. Тогда T является нитью с единицей u и нулем 0. Обратно, всякая нить с единицей и внутренним нулем имеет описанное строение (либо двойственное ему). При помощи контактных расширений получено описание всех коммутативных нитей с нулем.

Пусть S_2 — стандартная нить, S_1 — нить, топологически изоморфная нити S_2 и двойственная ей относительно порядка; $T = S_1 \cup S_2$, $0_1 = 0_2 = 0$ (через x_1 и x_2 обозначены соответственные элементы при изоморфизме S_1 на S_2, 0_i — нуль полугруппы S_i), $x_1 < y_2$ для любых $x_1 \in S_1$, $y_2 \in S_2$ $(x_1 \neq 0)$; $x_i y_i = (xy)_j$. T называется правосторонней янусовой нитью. Всякая некоммутативная нить с нулем может быть получена из янусовой нити при помощи контактных расширений.

Л. М. Глускин

3570. Определяющие соотношения конечных симметрических полугрупп. Айзенштат А. Я., Матем. сб., 1958, **45**, № 2, 261—280

Пусть Σ_n — полугруппа всех отображений множества n элементов в себя, σ_n — содержащаяся в ней симметрическая группа n-й степени. В статье найдена система соотношений полугруппы Σ_n относительно любого неприводимого множества образующих. Эта система получается добавлением не более семи соотношений к системе определяющих соотношений группы σ_n. Исследована специальная каноническая форма элементов полугруппы Σ_n.

Л. М. Глускин

3571. Об определяющих соотношениях симметрических полугрупп. Айзенштат А. Я., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1958, **166**, 121—142

Пусть Σ_N — полугруппа всех однозначных отображений натурального ряда N в себя (подстановок); Σ_∞ — подполугруппа Σ_N, состоящая из подстановок, переводящих все элементы N, за исключением конечного числа, в себя; Σ — подполугруппа Σ_N, порожденная подстановками $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{pmatrix}$, $S = (1, 2)$, $T = (\dots, 7, 5, 3, 1, 2, 4, 6, \dots)$ и T^{-1}. Всякая полугруппа Σ_n (реф. 3570) может быть изоморфно вложена в Σ_∞ и $\Sigma_\infty \subset \Sigma$. В статье найдены системы определяющих соотношений полугрупп Σ_∞ и Σ.

Л. М. Глускин

3572. Производные операции и ассоциаторы в лупах. Белоусов В. Д., Матем. сб., 1958, **45**, № 1, 51—70

Левым ассоциатором $(S)^l$ лупы S называется совокупность всех таких элементов $s \in S$, что $(sa)b = s(ab)$ для любых $a, b \in S$. Аналогично определяются правый $(S)^r$ и средний $(S)^c$ ассоциаторы лупы S. Известно, что каждый из ассоциаторов лупы является группой. Символ $((S)^l, (S)^s, (S)^r)$ называется типом лупы S. Доказывается, что для произвольных групп G_1, G_2, G_3 существует лупа типа (G_1, G_2, G_3). Кроме того, доказывается, что изотопные лупы имеют один и тот же тип, однако существуют лупы, определенные на одном и том же множестве, имеющие один и тот же тип, но не изотопные.

В конце работы указывается один способ построения по данной лупе новых, так называемых производных луп, и изучаются некоторые свойства последних.

А. И. Ширшов

3573 К. Введение в теорию конечных групп. Ледерман (Introduction to the theory of finite groups. 3rd rev. ed. Ledermann Walter. Edinburgh—London, Oliver and Boyd; New York, Interscience, 1957, ix, 170 pp., 8 sh. 6 d), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 384, 10 (англ.)

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3574. Очерк о числовых системах. Джонс (Miniature number systems. Jones Burton W.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 226—231 (англ.)

Популярная статья, излагающая основные понятия алгебры: кольца (в том числе коммутативного), поля и области целостности — на примерах конечных колец и полей. Б. М. Уразбаев

3575. **Определение числа классов идеалов алгебраических полей 4-го порядка. Гудиев А. Х.**, Уч. зап. Сев.-Осетинск. гос. пед. ин-та, 1957, **21**, № 1, 154—180

Показывается, что некоторые из полей 4-й степени сигнатуры 0 и 1, табулированных в монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940, **11**), являются одноклассными. Имеются опечатки. Б. М. Уразбаев

3576. **Решение уравнения пятого порядка при помощи эллиптических функций. Манара** (La risoluzione dell'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche. Manara C. F.), Period. mat., 1956, **34**, № 2, 65—84 (итал.)

Изложение очень простого метода решения общего уравнения пятого порядка при помощи эллиптических функций и его геометрической интерпретации. Резюме автора.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 9, 713.

3577. **Сведение уравнений к нормальной форме над полем характеристики p. Гарретт** (Reduction of equations to normal form in fields of characteristic p. Garrett James Richard), Duke Math. J., 1956, **23**, № 2, 241—251 (англ.)

Уравнение $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ над полем K характеристики p называется главным, если $a_1 = a_2 = 0$, и нормальным, если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Полагая n и p произвольными (случай $n = 5$, $p = 2, 3, 5$ рассмотрен автором в Duke Math. J., 1951, **18**, 373—384), автор показывает, что подходящим преобразованием Чирнгаузена можно привести заданное уравнение к главному виду в некотором квадратичном расширении поля K и к нормальному виду в некотором его кубическом расширении. При этом вид преобразования Чирнгаузена, осуществляющего это приведение, существенно зависит от того, делится или не делится n на характеристику поля. В. В. Морозов

3578. **О теореме Глисона и Марша. Зирлер** (On the theorem of Gleason and Marsh. Zierler Neal), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 236—237 (англ.)

Пусть K — конечное поле из q элементов и α — отображение кольца $K[x]$ в себя, преобразующее элемент

$$f = f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$$

в элемент

$$f^\alpha = f^\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^{q^i - 1}$$

Доказывается теорема, являющаяся обобщением теоремы указанных в заглавии авторов: Пусть f — неприводимый элемент $K[x]$. Тогда степень всякого неприводимого множителя элемента f^α равна порядку элемента f, т. е. порядку его корней в мультипликативной группе соответствующего расширения основного поля. Б. М. Уразбаев

3579. **Пример, относящийся к группам делимости. Жаффар** (Un exemple concernant les groupes de divisibilité. Jaffard Paul), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 18, 1264—1266 (франц.)

В другой статье автора (РЖМат, 1955, 3635) определено понятие полунормы поля относительно частично упорядоченной абелевой группы и доказано, что для всякой абелевой l-группы Γ существует поле, полунормированное относительно Γ. В настоящей заметке приводится пример абелевой направленной частично упорядоченной группы G, для которой не существует поля, полунормированного относительно G. Е. П. Шимбирева

3580. **Письмо в редакцию. Лапин А. И.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, **20**, № 4, 583—584

Исправление к статьям автора (РЖМат, 1953, 101; 1955, 1117). И. Р. Шафаревич

3581. **Теория двумерных групп когомологий в полных полях с дискретной метрикой. Мория** (Theorie der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern. Moriya Mikao), Math. J. Okayama Univ., 1955, **5**, № 1, 43—77 (нем.)

Подробные доказательства результатов, сообщение о которых было опубликовано автором ранее (РЖМат, 1956, 2012). А. И. Кострикин

3582. **Теория Галуа дифференциальных полей. Колчин** (Galois theory of differential fields. Kolchin E. R.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 753—824 (англ.)

Автор распространяет теорию Галуа расширений Пикара—Вессио (Picar, Vessiot, Ann. Math., 1948, **49**, 1—42; Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 596—603) на „строго нормальные" (обыкновенные и в частных производных) дифференциальные расширения G произвольного дифференциального поля F характеристики 0 при условии, что эти расширения имеют одно и то же поле констант C, как и поле F, и что они конечно порождаются и имеют над F конечную степень трансцендентности. Модифицированное понятие сильной нормальности, используемое в этой статье, позволяет алгебраическо-геометрически характеризовать те подгруппы автоморфизмов группы расширений G над F, которые появляются в устанавливаемом соответствии Галуа. Следуя методам алгебраической геометрии, автор распространяет теорию специализации на дифференциальные поля и доказывает существование универсального расширения F^* поля F. В дальнейшем каждое встречающееся расширение G поля F считается подполем расширения F^*, а каждый изоморфизм σ расширения G предполагается изоморфизмом в F^*.

Изоморфизм σ' расширения G считается специализацией σ, если $(\sigma' \alpha)_{\alpha \in G}$ есть специализация $(\sigma\alpha)_{\alpha \in G}$. Изоморфизм σ расширения G над F называется строгим, если удовлетворяется соотношение

$$G\langle \sigma G \rangle = G\langle C\sigma \rangle = \sigma G \langle C\sigma \rangle,$$

где C_σ обозначает поле констант расширения $G\langle \sigma G \rangle$.

Специализации строгих изоморфизмов также являются строгими. Если через C^* обозначить поле констант расширения F^*, то отображение, относящее каждому автоморфизму расширения $G\langle C^* \rangle$ над $F\langle C^* \rangle$ его ограничение в G, является взаимно однозначным со множеством $\mathfrak{G}^*$ всех сильных изоморфизмов расширения G над F. Следовательно, при естественной идентификации в $\mathfrak{G}^*$ можно определить умножение, которое делает $\mathfrak{G}^*$ подгруппой полной группы $\mathfrak{G}$ автоморфизмов расширения G над F. Подмножество $\mathfrak{M}^*$ множества $\mathfrak{G}^*$ называется неприводимым множеством в $\mathfrak{G}^*$, если оно является множеством всех специализаций одного из его элементов; строгий изоморфизм σ^*, порождающий при этом множество $\mathfrak{M}^*$, называется образующим элементом множества $\mathfrak{M}^*$; степень трансцендентности $\partial^0 G\langle \sigma^* G \rangle / G$, которая не зависит от выбора σ^*, называется размерностью $\mathfrak{M}^*$. Подмножество $\mathfrak{M}^*$ множества $\mathfrak{G}^*$ называется алгебраическим множеством в $\mathfrak{G}^*$, если оно является объединением конечного числа неприводимых множеств в $\mathfrak{G}^*$. Максимальные неприводимые множества, содержащиеся в алгебраическом множестве, называются его компонентами. Так как из $\mathfrak{M}^* \neq (0)$ следует $\mathfrak{M}^* \cap \mathfrak{G} \neq (0)$ и из $\mathfrak{M}^* \neq \mathfrak{N}^*$ для двух алгебраических множеств $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ следует, что $\mathfrak{M}^* \cap \mathfrak{G} \neq \mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{G}$, то алгебраическо-геометрическая структура в $\mathfrak{G}^*$ порождает аналогичную структуру в $\mathfrak{G}$. Алгебраическая группа $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ определяется как подгруппа группы $\mathfrak{G}$, которая также является ал-

гебраическим множеством. Свойства алгебраических групп, разумеется, очень похожи на свойства алгебраических матричных групп.

Автор вводит три типа нормальности для расширения G дифференциального поля F. Расширение G называется строго нормальным, если каждый изоморфизм расширения G над F является строгим; оно называется нормальным, если множество всех автоморфизмов расширения G над F является достаточно полным, и слабо нормальным, если все инварианты группы всех автоморфизмов расширения G над F принадлежат F. Из строгой нормальности следует нормальность, но не наоборот (что можно показать на примере). Из нормальности следует слабая нормальность; вопрос о том, имеет ли место обратное, остается открытым (однако это заведомо неверно, если отбросить ограничение о том, что G имеет то же поле констант, что и F; это тоже можно показать при помощи примера). Если G является строго нормальным расширением над F и его группа $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов над F является алгебраической, то имеется взаимно однозначное соответствие Галуа между множествами всех промежуточных дифференциальных полей и множеством всех алгебраических подгрупп $\mathfrak{G}_\gamma$ группы $\mathfrak{G}$, и степень трансцендентности G над F_γ равна размерности $\mathfrak{G}_\gamma$. Из слабой нормальности промежуточного поля F_γ над F уже следует строгая нормальность и это эквивалентно соотношению $\sigma F_\gamma \subseteq F_\gamma$ для любого автоморфизма $\sigma \in \mathfrak{G}$; это эквивалентно также нормальности соответствующих подгрупп $\mathfrak{G}_\gamma$ группы $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}_\gamma$ нормальна, то $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_\gamma$ изоморфна группе всех автоморфизмов поля F_γ над F. Пусть G — поле алгебраических функций одной переменной над алгебраически замкнутым полем F. Если G является слабо нормальным расширением дифференциального поля F, то оно является строго нормальным над F. Если, сверх того, G имеет род нуль, то его можно получить из F при помощи дополнительного дифференциального поля элемента $\alpha \in G$, удовлетворяющего либо условию $\delta_i \alpha \in F$ для всех производных δ_i группы $\mathfrak{G}$ (в этом случае α будет называться примитивным над F), либо условию $\alpha\, \delta_i \alpha \in F$ (тогда α называется экспоненциальным над F); если G имеет род 1, то его можно получить из F при помощи дополнения элемента $\alpha \in G$, удовлетворяющего условию

$$(\delta_i \alpha)^2 = a_i^2 (4\alpha^3 - g_2 \alpha - g_3),$$

где $a_i \in F$; $g_2, g_3 \in G$, а $4x^3 - g_2 x - g_3$ может иметь только простые корни (тогда α называется вейерштрассовым над F).

Род G не может быть больше 1, так как тогда группа всех автоморфизмов G над F будет конечной и, следовательно, G не может быть слабо нормальным над F. Если F является только относительно алгебраически замкнутым в G, то сказанное остается в силе и для рода 0, но в случае рода 1 найдется вейерштрассов элемент α, поэтому, вообще говоря, только алгебраическое расширение поля $F\langle\alpha\rangle$ равно G.

Пусть теперь α — какой-нибудь элемент одного из трех типов. Если α является трансцендентным над F, то $F\langle\alpha\rangle$ имеет степень трансцендентности 1 над F. Здесь $F\langle\alpha\rangle$ является расширением Пикара—Вессио в первых двух случаях; в третьем случае оно будет таковым только тогда, когда α также является алгебраическим над F. Если расширение H Пикара — Вессио поля F содержится в расширении K поля F, полученном при помощи последовательных дополнений конечного числа элементов, являющихся алгебраическими, примитивными, экспоненциальными или вейерштрассовыми над предыдущим расширением при конструировании K, то H является лиувиллевым расширением поля P. A. Jaeger

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 394.

3583. **Степень идеала или модуля. Рис** (The grade of an ideal or module. Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 28—42 (англ.)

Пусть A — нетерово кольцо с единицей 1 и M — конечно-порожденный унитарный A-модуль. Степенью A-модуля M называется наименьшее натуральное число k, для которого $\mathrm{Ext}_A^k(M, A) \neq 0$. Степенью идеала кольца A называется степень A-модуля $A/\mathfrak{A}$. Если A-модуль M имеет степень k и A-модуль N — гомологическую размерность $l < k$, то $\mathrm{Ext}_A^p(M, N) = 0$ при $p < k - l$. Если $\mathfrak{A}$ — идеал кольца A степени k и $\mathfrak{B}$ — идеал кольца A гомологической размерности $l < k$, то $\mathfrak{B} : \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Идеал g нетерова кольца называется общим идеалом ранга k, если он обладает базисом $g_1, \ldots, g_k$, удовлетворяющим условию:

$$(g_1, \ldots, g_{i-1}) : g_i = (g_1, \ldots, g_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Если A — нетерово кольцо, то конечно-порожденный A-модуль M тогда и только тогда имеет степень $\geqslant k$, когда существует общий идеал ранга k, содержащийся в $0 : M$. Отсюда следует, что степень M равна степени $0 : M$.

Модуль (или идеал) называется совершенным, если его гомологическая размерность равна его степени. Если M — совершенный модуль степени k и элемент $a \in A$ такой, что модуль M/aM имеет степень $\geqslant k + 1$, то M/aM будет совершенным модулем степени $k + 1$. Если $\mathfrak{A}$ — совершенный идеал степени k, то все простые идеалы, присоединенные к идеалу $\mathfrak{A}$, имеют степень k. Если $\mathfrak{B}$ — идеал степени k и $\mathfrak{A}$ — совершенный идеал степени $l < k$, содержащийся в $\mathfrak{B}$, то найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_{k-l}$ идеала $\mathfrak{B}$, что идеал $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_i)$ будет совершенным степени $l + i$ $(i = 1, \ldots, k - l)$.

Доказывается теорема, из которой следует, что если $\mathfrak{g}$ — общий идеал ранга k нетерова кольца A, то максимальный простой идеал, присоединенный к идеалам $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^m$, один и тот же для любого m. Приводятся условия, при которых идеал $\mathfrak{g}$ нетерова кольца A будет общим идеалом ранга k, являющиеся для локального кольца A необходимыми и достаточными. Если $\mathfrak{g}$ — общий идеал ранга k нетерова кольца A, то все простые идеалы, присоединенные $\mathfrak{g}^m$, имеют степень k для любого m.

Нетерово кольцо A называется U-кольцом, если ранг любого идеала $\mathfrak{A}$ кольца A равен его степени. Нетерово кольцо A тогда и только тогда является U-кольцом, когда каждый его общий идеал является U-кольцом. В U-кольце каждая степень общего идеала и каждый совершенный идеал является U-кольцом. Кольцо $k[X_1, \ldots, X_n]$ многочленов n переменных является U-кольцом. Каждое регулярное локальное кольцо является U-кольцом. Нетерово кольцо A тогда и только тогда является U-кольцом, когда локальное кольцо $A_\mathfrak{p}$ является U-кольцом для каждого максимального идеала $\mathfrak{p}$ кольца A.

Локальное кольцо Q называется удовлетворяющим условию A, если степень максимального идеала $\mathfrak{M}$ кольца Q равна его рангу (и, следовательно, равна размерности Q). Если локальное кольцо Q удовлетворяет условию A, то оно является U-кольцом. Если Q — регулярное локальное кольцо и $\mathfrak{A}$ — идеал кольца Q, то для того чтобы $Q/\mathfrak{A}$ было U-кольцом, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{A}$ был совершенным.

Даются некоторые геометрические приложения полученных результатов. А. Х. Лившиц

3584. **Основные теоремы об общих коммутативных кольцах. Нагата** (Basic theorems on general commutative rings. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, A29, № 1, 59—77 (англ.)

Излагаются отдельные результаты из различных разделов общей теории коммутативных колец. Большинство из этих результатов не новы и к некоторым из них приводятся лишь новые доказательства. Относительно рассматриваемого кольца $\mathfrak{o}$ предполагается только, что оно коммутативно и обладает единицей. § 1 посвящен простым идеалам кольца $\mathfrak{o}$. В § 2 проводится известное построение кольца отношений $\mathfrak{o}_S$ кольца $\mathfrak{o}$ относительно произвольного мультипликативно замкнутого подмножества S кольца $\mathfrak{o}$, не содержащего нуля, и указывается ряд свойств кольца $\mathfrak{o}_S$. В § 3 вводится понятие простого дивизора произвольного идеала $\mathfrak{a}$ кольца $\mathfrak{o}$ и формулируется ряд очевидных свойств простых дивизоров. Простой идеал $\mathfrak{p}$ называется максимальным простым дивизором идеала $\mathfrak{a}$, если $\mathfrak{p}$ является максимальным идеалом, не пересекающимся с мультипликативно замкнутым подмножеством S кольца $\mathfrak{o}$, состоящем из всех неделителей нуля по модулю идеала $\mathfrak{a}$. Простой идеал $\mathfrak{q}$ называется простым дивизором идеала $\mathfrak{a}$, если существует по крайней мере одно такое мультипликативно замкнутое подмножество S кольца $\mathfrak{o}$, не пересекающееся с идеалом $\mathfrak{a}$, что простой идеал $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_S$ является максимальным простым дивизором идеала $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_S$. Простой дивизор идеала $\mathfrak{a}$, не, являющийся минимальным простым дивизором идеала $\mathfrak{a}$ называется вложенным простым дивизором.

В § 4 рассматривается кольцо $\mathfrak{o}'$, целое над некоторым своим подкольцом $\mathfrak{o}$. Здесь, в частности, показано, что над каждым простым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{o}$ лежит по крайней мере один простой идеал кольца $\mathfrak{o}'$ и что между любыми двумя простыми идеалами кольца $\mathfrak{o}'$, лежащими над одним и тем же простым идеалом кольца $\mathfrak{o}$, не может иметь место соотношение включения. В § 5 предполагается, что кольцо $\mathfrak{o}$ является областью целостности, и рассматриваются целые расширения кольца $\mathfrak{o}$. § 6 посвящен джекобсоновскому радикалу (J-радикалу) произвольного коммутативного кольца. § 7 посвящен условию минимальности. Здесь, в частности, передоказывается известная теорема Акицуки о том, что кольцо $\mathfrak{o}$ тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности, когда оно нетерово и каждый простой идеал кольца $\mathfrak{o}$ является максимальным идеалом. В § 8 вводится понятие σ ранге коммутативного кольца $\mathfrak{o}$; рангом кольца $\mathfrak{o}$ автор называет то, что обычно принято называть размерностью кольца $\mathfrak{o}$, т. е. такое число r, что в кольце $\mathfrak{o}$ существует убывающая цепочка простых идеалов длины $r+1$ и не существует подобной цепочки большей длины. Определяется также ранг произвольного идеала $\mathfrak{a}$ кольца $\mathfrak{o}$. Ранг фактор-кольца $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ называется коранго м идеала $\mathfrak{a}$. Доказываются известные теоремы о ранге идеала нетерова кольца.

Последний § 9 посвящен нормальным нетеровым кольцам, т. е. нетеровым областям целостности, целозамкнутым в своем поле частных. Приводится несколько необходимых и достаточных условий для того, чтобы данная нетерова область целостности была нормальным кольцом. Доказательства основаны на следующем утверждении: Пусть $\mathfrak{o}$ — нетерова область целостности и a — некоторый отличный от нуля элемент кольца $\mathfrak{o}$, для которого в кольце $\mathfrak{o}$ не существует обратного. Тогда, если главный идеал (a) обладает вложенным простым дивизором, то существует по крайней мере один такой элемент b кольца $\mathfrak{o}$, что элемент b/a целый над $\mathfrak{o}$ и не содержится в $\mathfrak{o}$. Обратно, если такой элемент b существует, то либо главный идеал (a) обладает вложенным простым дивизором, либо среди всех минимальных простых дивизоров идеала (a) имеется по крайней мере один такой простой дивизор $\mathfrak{p}$, что кольцо $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ не нормально.

Е. Г. Шульгейфер

3585. **О производных нормальных кольцах нетеровых областей целостности.** Нагата (On the derived normal rings of Noetherian integral domains. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, **A 29**, № 3, 293—303 (англ.)

Целозамыкание O' области целостности O в ее поле частных K называется производным нормальным кольцом области целостности O. Приводятся новые доказательства известных теорем: 1) Любое кольцо, лежащее между некоторой нетеровой областью целостности O ранга 1 (ранг кольца понимается в смысле предыдущей работы автора (реф. 3584)) и ее производным нормальным кольцом O', является нетеровым кольцом, и производное нормальное кольцо O' нетеровой области целостности O ранга 2 является нетеровым кольцом. 2) Производное нормальное кольцо O' произвольной нетеровой области целостности O является кольцом Крулля и над любым простым идеалом p кольца O лежит лишь конечное число простых идеалов p' кольца O', причем для любого простого идеала p' кольца O' фактор-кольцо O'/p' является почти конечным целым расширением фактор-кольца $O/(p' \cap O)$. (Область целостности O называется кольцом Крулля, если: а) для любого простого идеала p ранга 1 кольца O кольцо отношений O_p является кольцом дискретной оценки и б) каждый главный идеал кольца O представим в виде пересечения конечного числа примарных идеалов ранга 1. В работе показывается, что выполнение в области целостности O условия б) равносильно выполнению следующих двух условий: в) каждый главный идеал кольца O имеет лишь конечное число минимальных простых дивизоров и г) кольцо O совпадает с пересечением всех колец отношений O_p по всем простым идеалам p ранга 1 кольца O.

Е. Г. Шульгейфер

3586. **О проблеме цепочки простых идеалов.** Нагата (On the chain problem of prime ideals. Nagata Masayoshi), Nagoya Math. J., 1956, **10**, June, 51—64 (англ.)

Рассматривается вопрос: длина любой ли максимальной (убывающей) цепочки простых идеалов нетеровой локальной области целостности $\mathfrak{o}$ равна рангу кольца $\mathfrak{o}$? Говорится, что в коммутативном кольце $\mathfrak{o}$ выполняется первая гипотеза цепочки, если длина любой максимальной цепочки простых идеалов кольца $\mathfrak{o}$ равна рангу кольца $\mathfrak{o}$, и выполняется вторая гипотеза цепочки, если для каждого минимального простого дивизора $\mathfrak{p}$ нулевого идеала кольца $\mathfrak{o}$ ранг фактор-кольца $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ равен рангу кольца $\mathfrak{o}$, и в любом целом расширении области целостности $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ выполняется первая гипотеза цепочки. Доказывается, что из выполнения в кольце $\mathfrak{o}$ второй гипотезы цепочки следует выполнение в кольце $\mathfrak{o}$ первой гипотезы цепочки. Если кольцо $\mathfrak{o}$ является областью целостности, то выполнение в кольце $\mathfrak{o}$ второй гипотезы цепочки равносильно выполнению в производном нормальном кольце $\mathfrak{o}'$ кольца $\mathfrak{o}$ первой гипотезы цепочки. Полулокальное кольцо $\mathfrak{o}$ называется квазинесмешанным, если оно нетерово и в его пополнении выполняется первая гипотеза цепочки (каждое несмешанное локальное кольцо является квазинесмешанным). Доказывается, что в каждом квазинесмешанном полулокальном кольце выполняется вторая гипотеза цепочки. Далее строится пример нетеровой локальной области целостности, показывающий, что вторая гипотеза цепочки не равносильна первой гипотезе цепочки и что существуют нетеровы локальные области целостности, в которых не выполняется первая гипотеза цепочки. Приводится ряд достаточных условий, при выполнении которых нетерово локальное кольцо является несмешанным локальным кольцом, а также достаточные условия, при которых нетерова локальная область целостности является несмешанным и аналитически неразветвляемым локальным кольцом.

В заключение ставится несколько проблем, связанных с вопросами, рассматриваемыми в настоящей работе, и

в виде дополнения приводится очень простое доказательство теоремы о том, что если каждый простой идеал коммутативного кольца o имеет конечное число образующих, то кольцо o нетерово. Е. Г. Шульгейфер

3587. Пример аналитически приведенного нормального локального кольца. Нагата (An example of a normal local ring which is analytically reducible. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, **A31**, № 1, 83—85 (англ.)

Ранее автор (РЖМат, 1956, 7185) построил пример нормальной локальной области целостности, нулевой идеал пополнения которой примарен. В настоящей работе строится пример нормальной локальной области целостности, нулевой идеал пополнения которой даже не является примарным идеалом. Отмечается, что этим примером дается также отрицательное решение одной из проблем, поставленной в другой работе автора (реф. 3586). Е. Г. Шульгейфер

3588. Исследования по коммутативно-ассоциативным нильпотентным алгебрам индекса 3 и характеристики 2. Бюке (Untersuchungen über kommutativ-assosiativ und nilpotenten Algebren von Index 3 und von der Charakteristik 2. Büke Altintas), Istanbul Univ. fen fak. mec., 1954, **A19**, Suppl. 145 S. (нем.)

Автор исследует коммутативную и ассоциативную алгебру A над полем K характеристики 2 в предположении, что $A^3 = 0$.

В качестве структурных идеалов рассматриваются следующие идеалы алгебры A: идеал Q всех элементов, квадраты которых равны нулю; идеал R всех x, для которых $xQ = 0$; идеал S всех x, для которых $xR = 0$; различные идеалы, которые получаются из Q, R, S при помощи обычного сложения идеалов. После исследования структуры идеалов автор подробно изучает алгебры рода $(n, 1)$ и $(n, 2)$. При этом алгебра A называется алгеброй рода (n, m), если A/A^2 является n-мерным векторным пространством, а A^2 — m-мерным векторным пространством над полем K. Алгебры рода $(n, 2)$ распределяются на 7 классов, а алгебры рода $(n, 2)$ — 166 классов. Автор определяет таблицы умножения для каждого из этих классов и во всех случаях тщательно исследует структуру идеалов.

Алгебры рода $(n, 1)$ были исследованы ранее Пиккертом (Pickert, Math. Ann., 1938, **116**, 217—280).

A. Rosenberg

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 561.

3589. Теория идеалов внешних дифференциальных уравнений. Ауслендер (An ideal theory for exterior differential equations. Auslander Louis), Ann. Math., 1956, **63**, № 3, 527—534 (англ.)

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел R и V^* — дуальное ему векторное пространство. Через $\Lambda(V)$ и $\Lambda(V^*)$ обозначаются алгебры Грассмана над V и V^* соответственно, являющиеся градуированными алгебрами: $\Lambda(V) = \Lambda^0(V) + \Lambda^1(V) + \ldots + \Lambda^n(V)$, где $\Lambda^0(V) = R$ и $\Lambda^1(V) = V$ и аналогично для $\Lambda(V^*)$. Элемент называется однородным степени r, если он содержится либо в $\Lambda^r(V)$, либо в $\Lambda^r(V^*)$. Идеал $\mathfrak{A}$ алгебры $\Lambda(V^*)$ называется однородным, если он порождается своими однородными элементами. Идеал $\mathfrak{A}$, порожденный своими однородными элементами степени r, называется r-порожденным идеалом. Через A_r обозначается $\mathfrak{A} \cap \Lambda^r(V^*)$, а через аннулятор (Ar) — аннулятор A_r, содержащийся в $\Lambda^r(V)$. Доказывается, что если идеал $\mathfrak{G}$ является аннулятором идеала $\mathfrak{A}$, то для того чтобы идеал $\mathfrak{A}$ был однопорожденным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ был алгеброй Грассмана над аннулятором (A_1).

Однопорожденный идеал $\mathfrak{M}$ называется минимальным идеалом относительно идеала $\mathfrak{A}$, если 1) $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{A}$, 2) не существует однопорожденного идеала, содержащегося в $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющего условию 1). Размерностью однопорожденного идеала называется размерность порождающего его подпространства. Доказывается теорема: Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — два минимальных идеала относительно $\mathfrak{A}$. Тогда $\dim \mathfrak{M}_1 = \dim \mathfrak{M}_2$, если идеал, порожденный $\mathfrak{M}_i$ и W, является минимальным относительно идеала, порожденного $\mathfrak{A}$ и W, где W является подпространством векторного пространства V^* и $i = 1, 2$.

Характеристикой S векторного пространства относительно идеала $\mathfrak{A}$ называется подмножество векторного пространства V, для которого $X \in S$ тогда и только тогда, когда $X \lrcorner Z \in \mathfrak{A}$ для всех $Z \in \mathfrak{A}$, где $\lrcorner$ обозначает некоторую определенную в § 1 внутреннюю операцию.

Доказывается: 1) S — аннулятор (A_1) тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{A}$ однопорожденный, 2) S содержится в пересечении аннуляторов всех минимальных относительно $\mathfrak{A}$ идеалов, 3) Если идеал $\mathfrak{A}$ равен пересечению своих минимальных идеалов, то характеристика S векторного пространства относительно $\mathfrak{A}$ равна пересечению аннуляторов минимальных идеалов.

Если идеал $\mathfrak{A}$ является одно- или двупорожденным, то род $\mathfrak{A}$ равен либо единице, либо размерности $\mathfrak{A}$, когда она определена. Для того чтобы одно- или двупорожденный идеал имел род один, необходимо и достаточно, чтобы пересечение образующих всех минимальных относительно $\mathfrak{A}$ идеалов содержало A_1, не совпадая с ним.

В последнем параграфе дается инвариантная формулировка процесса продолжения и получается характеристика некоторых целых идеалов в продолженной системе.

А. Х. Лившиц

3590. Кольца с хаусдорфовым структурным пространством. Гилман (Rings with Hausdorff structure space. Gillman L.), Fundam. math., 1957, **45**, № 1, 1—16 (англ.)

Система собственных двусторонних идеалов σ произвольного кольца A, удовлетворяющая условию: если I, J — пересечения идеалов из σ, и $I \cap J \subset S \in \sigma$, то $I \subset S$ или $J \subset S$, называется структурной системой кольца A. Важными примерами таких систем являются система $\mathfrak{P}$ всех примитивных идеалов A, система $\mathfrak{D}$ всех собственных первичных идеалов. Пусть $\mathfrak{A} \subset \sigma$. Пользуясь обозначением $\Delta\mathfrak{A} = \bigcap_{S \in \mathfrak{A}} S$, определяют в σ так называемую стоуновскую топологию:

$$\overline{\mathfrak{A}} = \{S \in \sigma : S \supset \Delta\mathfrak{A}\}.$$

Система σ, снабженная этой топологией, называется структурным пространством кольца. Каждому S из σ ставится в соответствие идеал $N(S)$, определенный условием: $a \in N(S)$, если существует такая окрестность $\mathfrak{A}$-идеала S, что $a \in \Delta\mathfrak{A}$. Приводится много факторов, устанавливающих связь между строением идеалов $N(S)$, хаусдорфовостью структурного пространства σ и структурой кольца A. Среди них интересно отметить следующие теоремы:

Если A — коммутативно и $\sigma \subset \mathfrak{D}$, то для каждого $S \in \sigma$ $N(S)$ есть пересечение первичных идеалов. Если σ — хаусдорфово пространство, то для каждого $S \in \sigma$ $N(S)$ содержится точно в одном идеале из σ, а именно в S.

Чисто алгебраически доказывается теорема: Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{A}$ — семейство всех первичных идеалов A, лежащих в данном собственном идеале I, и предположим, что каждый идеал, порожденный конечным числом элементов и лежащий в I, является главным. Тогда $\mathfrak{A}$ вполне упорядочено по включению, и пересечение любого подсемейства из $\mathfrak{A}$ есть первичный идеал.

Кольцо, в котором каждый главный идеал порождается идемпотентом из центра, называется бирегулярным. Доказано, что в бирегулярном кольце каждый собственный первичный идеал является примитивным. Кольцо называется сильно регулярным, если для каждого a

существует x такое, что $a^2 x = a$. Дается необходимое и достаточное условие сильной регулярности кольца. Приводятся также некоторые простые результаты о частично упорядоченных кольцах. Е. Н. Кузьмин

3591. Пространство первичных идеалов кольца. Колс (The space of prime ideals of a ring. Kohls C. W.), Fundam. math., 1957, **45**, № 1, 17—27 (англ.)

Работа состоит в тесной связи с тематикой статьи Гилмана (реф. 3590). Рассматриваются различные условия, при которых структурное пространство σ является хаусдорфовым, бикомпактным и локально бикомпактным. Большинство результатов получены при предположении, что кольцо A коммутативно и $\sigma \subset \Omega$. После некоторых замечаний об идеалах идеалов рассматривается ситуация, когда данное кольцо A без единицы приемом, указанным Мак-Коем (McCoy N. H., Math. Assoc. Amer., 1948, 87—88), вкладывается в качестве идеала в кольцо с единицей. Е. Н. Кузьмин

3592. Обобщение теоремы Гильберта о корнях. Амицур (A generalization of Hilbert's Nullstellensatz. Amitsur S. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 649—656 (англ.)

Автор обобщает теорему Гильберта, формулируя ее в терминах идеалов кольца многочленов от конечного числа некоммутативных неизвестных. Обобщение достигается тем, что рассматриваются нули многочленов, лежащие в полной матричной алгебре $\bar{F}_k$ ранга k^2 над алгебраическим замыканием $\bar{F}$ основного поля F, или нули, лежащие в примитивных кольцах. Доказательства опираются на аппарат радикала Джекобсона. Попутно получаются некоторые результаты, интересные для теории радикала Джекобсона; например, доказано, что если в алгебре с конечным числом образующих выполнено какое-то тождественное соотношение, то ее радикал Джекобсона есть ниль-идеал. Ставится вопрос: верно ли последнее утверждение для произвольных алгебр с конечным числом образующих? Е. Н. Кузьмин

3593. О проблеме Левицкого. Ширшов А. И., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 41—42

Левицким была поставлена проблема: каждое ли ниль кольцо локально нильпотентно? Эта проблема была положительно решена Левицким для случая, когда индексы нильпотентности всех элементов кольца S ограничены в совокупности. Капланский перенес последний результат на ниль-кольца с полиномиальными тождествами. В рецензируемой заметке дается положительное решение проблемы Левицкого для более широкого класса колец, введенного в рассмотрение Дрейзеном.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, h$ — некоторое множество переменных, $\pi(\lambda) = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}$ — некоторый одночлен от этих переменных. Обозначим через $T_\pi(\lambda)$ множество всех одночленов от множества Λ степени $\geqslant R$ и отличных от $\pi(\lambda)$. Для любой последовательности элементов $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, h$, из кольца S через $\pi(x)$ обозначим элемент $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, а через $T_\pi(x)$ — множество элементов кольца S, полученное заменой всех переменных λ_i на соответствующие элементы x_i в каждом одночлене из множества $T_\pi(\lambda)$. Если существует такой одночлен $\pi(\lambda)$, что для любого набора элементов x_i, $i = 1, 2, \ldots, h$, кольца S элемент $\pi(x)$ лежит в правом идеале, порожденном множеством $T_\pi(x)$, то одночлен $\pi(\lambda)$ называется строго опорным одночленом кольца S, а кольцо S — кольцом со строго опорным одночленом. Автор для краткости такие кольца называет *SP*-кольцами. Дрейзин показал, что класс *SP*-колец содержит кольца с условием минимальности для правых идеалов и кольца с полиномиальными тождествами. Доказывается теорема, что всякое ниль-*SP*-кольцо локально нильпотентно. В. А. Андрунакиевич

3594. Сравнение глобальной и алгебраической размерности. Ауслендер (Comparison of global and algebra dimension. Auslander Maurice), Nagoya Math. J., 1957, **11**, 61—65 (англ.)

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей. Кольцо Λ называется полупримарным, если его радикал Джейкобсона нильпотентен и если $\Gamma = \Lambda/N$ удовлетворяет условию минимальности. Основным результатом является теорема: Пусть Λ — полупримарная алгебра над полем K, N — радикал алгебры Λ и $\Gamma = A/N$. Если $\dim \Lambda < \infty$ и $(\Gamma : K) < \infty$, то $\dim \Lambda = \operatorname{glob\,dim} \Lambda$. Здесь $\dim \Lambda$ обозначает размерность Λ как K-алгебры. Эта теорема при более сильном ограничении $(\Delta : K) < \infty$ была доказана Эйленбергом (РЖМат, 1956, 8648).

В. А. Андрунакиевич

3595. Заметка о полугомоморфизмах альтернативных колец. Гавел (Poznámka o semihomomorfismech alternativních okruhů. Havel Václav), Mat.-fys. časop., 1958, **8**, № 1, 3—6 (чешск.; рез. русск., нем.)

Исправляя ошибку предыдущей статьи (РЖМат, 1956, 6833), автор доказывает, что для того чтобы полугомоморфизм σ альтернативного кольца R был автоморфизмом или антиавтоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $a^\sigma [b^\sigma (ab)^\sigma] = (a^\sigma b^\sigma (ab)^\sigma$ для любых $a, b \in R$.

Л. А. Скорняков

3596. Две теоремы о квадратичных неассоциативных алгебрах. Албада (Two theorems about quadratic nonassociative algebras. Albada P. J. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1958, **A61**, № 3, 319—321; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 319—321 (англ.)

Доказывается, что всякая квадратичная эластичная (т. е. удовлетворяющая тождеству $(ab)a = a(ba)$) алгебра характеристики $\neq 2$ симметрична (РЖМат, 1957, 2948), но существуют неэластичные симметрические алгебры с делением ранга 4 над полем действительных чисел.

Л. А. Скорняков

3597. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Хион Я. В., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, **21**, № 3, 311—328

Используются определения и результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1958, 2750). Ассоциативное кольцо R называется нормированным при помощи упорядоченной полугруппы P, если всякому элементу a из R поставлен в соответствие элемент $w(a)$ из P, причем удовлетворяются условия: 1) $w(a-b) \leqslant \max(w(a), w(b))$, 2) $w(ab) = w(a) \cdot w(b)$, 3) для всякого α из P существует такое a из R, что $w(a) = \alpha$, 4) если $w(a) = 0$, то $a = 0$. Для случая тел понятие нормированного кольца совпадает с обычным понятием нормированного тела.

Подгруппа G аддитивной группы нормированного кольца R называется выпуклой, если из $a \in C$, $w(a) \geqslant w(b)$ следует $b \in G$. Подкольцо (идеал) называется выпуклым, если выпукла его аддитивная группа.

Установлено, что, для того чтобы ассоциативное кольцо R можно было нормировать при помощи упорядоченной полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы в R существовала полная система подгрупп аддитивной группы, удовлетворяющая условиям:

1) $b \in G_a \to bc \in G_{ac}$ и $cb \in G_{ca}$ для всех $c \in R$,

2) $b \notin G_a$, $c \in R$, $bc \in G_{ac} \to bc = ac = 0$; $b \in G_a$, $c \in R$, $cb \in G_{ca} \to cb = ca = 0$, где G_a — минимальная подгруппа системы, содержащая элемент a. Доказано, что для любой упорядоченной полугруппы P существует кольцо R, нормированное при помощи этой полугруппы. Естественным образом определяется понятие гомоморфного отображения и изоморфизма для нормированных колец, и для них доказывается теорема типа теоремы о гомоморфизмах.

Элемент a нормированного кольца R называется целым, если $w(a)$ является целым элементом в P. Оказывается, что во всяком нормированном кольце множество K всех целых элементов является выпуклым подкольцом, а всякая выпуклая подгруппа аддитивной группы подкольца K является в нем двусторонним идеалом.

Говорят, что кольцо R без делителей нуля нормировано тривиально, если нормирующая полугруппа состоит из нуля и ε, где $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Пусть M — множество, состоящее из 0 и всех таких a из R, что $w^2(a) < w(a)$. Тогда при $M \neq K$, M является максимальным выпуклым двусторонним идеалом в K, M — простой идеал в K-и фактор-кольцо K/M тривиально нормировано. Доказано, что если нормированное кольцо R ($R^2 \neq 0$) разлагается в прямую сумму двух колец, то одно из них будет кольцом с нулевым умножением. В нормированном кольце R совокупность N всех нильпотентных элементов является выпуклым двусторонним идеалом, и фактор-кольцо R/N не имеет делителей нуля. Радикалы Бэра, Левицкого и Кете нормированного кольца совпадают с N. Дается пример, показывающий, что радикалы Джейкобсона и Брауна — Маккоя в нормированном кольце не обязательно выпуклы.

Нормированное кольцо R называется простым, если оно не содержит выпуклых двусторонних идеалов, отличных от 0 и R. Доказано, что если $R \neq M$, то в R существует максимальный выпуклый двусторонний идеал L, и фактор-кольцо R/L — простое нормированное кольцо. Показано, что простое нормированное кольцо не содержит и нетривиальных односторонних идеалов, а также, что простое нормированное кольцо либо не имеет делителей нуля, либо является кольцом с нулевым умножением.

Нормированное кольцо называется целым (мультипликативно архимедовским), если оно нормируется при помощи целой (архимедовской) упорядоченной полугруппы. Из приведенных выше результатов следует, что общая теория нормированных колец сводится к теории нормированных ниль-колец целых нормированных колец, простых нормированных колец и к теории расширения для нормированных колец (которая еще не построена). Целое нормированное кольцо R тогда и только тогда является мультипликативно архимедовским, когда оно не содержит отличных от 0 и R выпуклых простых двусторонних идеалов.

В целом нормированном кольце R существует полная система выпуклых двусторонних идеалов, в которой фактор-кольцо всякого идеала по непосредственно предшествующему (в том случае, когда он существует) является целым мультипликативно архимедовским нормированным кольцом.

Если R — кольцо, нормированное при помощи полугруппы P, и в P задано отношение конгруэнтности, относительно которого 0 составляет отдельный класс и фактор-полугруппа Σ по этому отношению является упорядоченной полугруппой, то определяется норма $\overline{w}$ кольца R относительно Σ: $\overline{w}(a) = \overline{w(a)}$, которая называется более слабой, чем w, ($\overline{a}$ есть класс элемента a из P). Доказано, что для всякого целого архимедовского нормирования кольца R существует более слабое нетривиальное нормирование при помощи подполугруппы мультипликативной полугруппы неотрицательных действительных чисел. Доказано, что в нормированном кольце R, удовлетворяющем условию обрыва убывающих цепей для выпуклых левых идеалов, любой левый идеал кольца R, содержащийся в M, нильпотентен.

Показано, что всякое ассоциативное упорядоченное кольцо можно нормировать при помощи упорядоченной полугруппы его архимедовских классов. Это нормирование упорядоченного кольца называется естественным. Ввиду полученной связи между нормированными и упорядоченными кольцами на последние могут быть перенесены большинство из перечисленных ранее результатов, при этом получаются доказательства ряда теорем работы (РЖМат, 1957, 8475), приведенных там без доказательства. Доказано, что для любой упорядоченной полугруппы P существует упорядоченное кольцо R, для которого P является полугруппой архимедовских классов. Имеются опечатки. Е. П. Шимбирева

См. также: 3401, 3473, 3485, 3599, 3632, 3944, 3952, 3963—3965, 3972, 4094, 4105, 4251, 4252, 4254

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

3598. **О рефлексивных симметрических отношениях и графах. Курепа** (O refleksivnim simetričnim relacijama i grafovima. Kurepa Duro. Razpr. Slov. akad. znan. in umetn. Razred mat., fiz. in tehn. vede, 1953, **A4**, № 4, 28 str.) (словенск., англ.)

Под графом понимается множество G с бинарным рефлексивным симметрическим отношением ρ. Пусть kM — кардинальное число $M \subset G$, $k_c G = \sup kM$ (M — связный подграф) $k_s G = \sup kM$ (несвязный подграф).

Основной результат: $kG \leqslant (2k_s G)^{k_c G}$ и для любых α и $n \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$ существует граф g с $kg = n, k_c g \leqslant \aleph_\alpha, k_s g \leqslant \aleph_\alpha$ (неравенства строго достижимы). Кнастером был поставлен вопрос о существовании графа G со свойством k_c, $k_s \leqslant \aleph_0$. Серпинский указывал на трудность проблемы Кнастера в случае $kG \geqslant \aleph_1$. На основании доказанных утверждений и при предположении справедливости гипотезы-континуума можно утверждать, что проблема Кнастера, вообще говоря, неразрешима и имеет решение в указанных предположениях для случая $kG \leqslant 2^{\aleph_0} (= \aleph_1)$. J. Schmidt.

Перевод из Zbl. Math., 1957, **53**, 222

3599. **Теория пересечения многообразий с операторами и приложения к теории узлов. Бланчфилд** (Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory. Blanchfield Richard C.), Ann. Math., 1957, **65**, № 2, 340—356 (англ.)

$\mathfrak{M}$ — триангулируемое и ориентируемое многообразие, G — фундаментальная группа, $IG = R$ — групповое кольцо. Автоморфизм $\gamma \to \gamma^{-1}$ в группе G порождает автоморфизм $\alpha \to \bar{\alpha}$ в R, называемый сопряжением.

Пусть R_π — локальное поле по π, а R_π/π^m — локальное поле вычетов по mod π^m, R_0 будет обозначать целые, а R — рациональные числа. Доказываются следующие теоремы двойственности Пуанкаре-Лефшеца для индекса пересечения и коэффициента зацепления в локальном поле: Группы гомологий как R-модули ортогональны относительно индекса пересечения в любом локальном поле R_π/π^m.

Аннулятор модуля циклов в R/π^m является подмодуль слабо гомологичных нулю. Аннулятор модуля слабо гомологичных нулю циклов относительно R/R_0 есть подмодуль слабо гомологичных нулю для всех π и $m > 0$. Эле-

3*

ментарные делители модуля кручения $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots$ симметричны относительно сопряжения. Доказывается, что для накрывающего по коммутанту дополнительного пространства кратного узла элементарные делители также симметричны. Зейферт доказал симметричность Δ_0-полинома Александера, а Торрес — для любого кратного узла. Вопрос о сопряженности Δ_i для $i \geqslant 1$ остается открытым. В. К. Белов.

3600. Обобщение леммы Урысона. Холодовский Е. П., Уч. зап. Читинск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 2, 139—143

Даны некоторые следствия хорошо известной теоремы П. С. Урысона о продолжении непрерывной функции с замкнутого подмножества. И. А. Шведов

3601. О понятии битопологических пространств и о пространствах Бэра. Мочан (Sur la notion d'espace bitopologique et sur les espaces de Baire. Motchane Léon), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 26, 3121—3124 (франц.)

См. реф. 3602.

3602. К характеризации пространства Бэра. Мочан (Sur la caractérisation des espaces de Baire. Motchane Léon), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 2, 215—218 (франц.)

Эта работа является новым изложением предыдущей работы (реф. 3601) с исправлением допущенных неточностей. Две топологии τ, τ', определенные на множестве E, называются связными, если $\tau \subset \tau'$ и для всякого открытого множества $O' \in \tau'$ найдется открытое множество $O \in \tau$ такое, что $O' \subset O$, $\overline{O}^{\tau} = \overline{O}^{\tau'}$. Связные топологии τ, τ' называются сильно связными, если из $\omega_i \in \tau'$, $\Theta_i \in \tau$, $\omega_i \subseteq \Theta_i$, $i = 1,2$, следует, что $\omega_1 \cap \omega_2$ пусто только тогда, когда $\Theta_1 \cap \Theta_2$ пусто. Множество E с двумя сильно связными топологиями τ, τ' называется битопологическим пространством. Топологическое пространство называется пространством Бэра, если пересечение счетного числа всюду плотных открытых множеств будет всюду плотным множеством. С помощью понятия битопологических пространств и равномерной топологии дается характеристика бэровского пространства. А. Д. Тайманов

3603. Об инвариантности окрестности. Уайберн (On the invariance of openness. Whyburn Gordon T.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 5, 464—466 (англ.)

Автор говорит, что пространство обладает свойством Брауэра, если всякое подмножество этого пространства, гомеоморфное его открытому множеству, само является открытым.

Доказывается теорема: Пусть $f(X) = Y$ — отображение связного, локально связного, локально бикомпактного пространства X на такое же пространство Y. Если существует замкнутое множество F в Y такое, что никакое локально бикомпактное множество, гомеоморфное подмножеству множества F, не разделяет никакую область в Y и такое, что f локально топологично на $X \setminus f^{-1}(F)$, то из наличия свойства Брауэра у пространства X вытекает наличие этого свойства и у пространства Y.

Связное, локально связное, локально бикомпактное пространство, никакая область которого не разбивается множеством размерности $\leqslant n-2$ называется локально канторовым многообразием размерности $\geqslant n$.

Следствие 1. Пусть X — локально канторово многообразие размерности $\geqslant n$ и пусть $f(X) = Y$ — вполне несвязное открытое отображение, локально топологичное всюду, за исключением подмножества F многообразия X такого, что F и $f(F)$ — оба размерности $\leqslant n-2$. Тогда, если X обладает свойством Брауэра, то им обладает и Y.

Следствие 2. Пусть f замкнуто и монотонно и только одна точка имеет невырожденный полный прообраз K. Предположим, что ни K и никакая отдельная точка не разбивает области в X. Тогда Y обладает свойством Брауэра, если им обладает X.

Приводятся примеры пространств, не являющихся многообразиями, но обладающих свойствами Брауэра. А. С. Пархоменко

3604. О полусводимых мерах. II. Исии (On semireducible measures. II. Ishii T.), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 4, 241—244 (англ.)

Некоторые результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 240) распространены на случай топологически полных вполне регулярных пространств (пространство топологически полно, если оно полно как равномерное пространство, порожденное максимальной равномерной структурой).

Теорема. Следующие 4 условия эквивалентны: а) всякое замкнутое дискретное множество имеет мощность (двузначной) меры 0; б) всякая бэровская (двузначная) мера полусводима; в) всякая бэровская (двузначная) мера всюду равна нулю, если она локально равна нулю (т. е у каждой точки есть окрестность меры нуль); г) для любой бэровской (двузначной) меры и для каждой дискретной системы открытых множеств меры 0 их сумма также имеет меру 0 (система множеств называется дискретной, если она локально конечна и если замыкания множеств попарно не пересекаются). Ю. М. Смирнов

3605. Регулярный класс пространств Бэра. Шоке (Une classe régulière d'espaces de Baire. Choquet Gustave), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 2, 218—220 (франц.)

Сеткой над топологическим пространством E называется бинарная операция $[$, определенная в семействе всех непустых открытых подмножеств, удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$T_1.\ (A\,[\,B) \Rightarrow (A \subset B).$$

$$T_2.\ (A\,[\,B);\ B\,[\,C;\ C \subset D) \Rightarrow (A\,[\,D).$$

T_3. Для всякого непустого открытого множества A существует открытое множество A' такое, что $A'\,[\,A$.

T_4. Для всякой последовательности $\{A_n\}$, $A_{n+1}\,[\,A_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, открытых множеств пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ непусто. Пространство с определенной сеткой называется просеянным пространством. Просеянные пространства являются бэровскими пространствами. Просеянное пространство называется сильно просеянным, если удовлетворяет следующей аксиоме:

T_5. Для всякого непустого открытого множества A совокупность всех таких открытых множеств A', что $A'\,[\,A$, образует базу окрестностей в A.

Сформулированы характеристики метризуемых просеянных и метрируемых сильно просеянных пространств, поставлены нерешенные проблемы. Доказательств нет. А. Д. Тайманов

3606. О слабо компактных регулярных пространствах. Н. Касахара (On weakly compact regular spaces. H. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 5, 255—259 (англ.)

Дан ряд характеристик слабой компактности пространства через свойства локально конечных и звездно конечных покрытий этого пространства. А. С. Шварц

3607. Заметка о некоторых топологических пространствах. Касахара (A note on some topological spaces. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 8, 453—454 (англ.)

Для хаусдорфова пространства E следующие условия эквивалентны между собою: 1. Каждое точечно-конечное открытое покрытие пространства E конечно. 2. Каждая система попарно непересекающихся открытых множеств в E конечна. 3. E конечно.

Для того чтобы топологическое пространство E было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая локально конечная система открытых множеств в E была конечной. П. И. Папич

3608. Заметки о бикомпактификации. I. Вагнер (Notes on compactification. I. Wagner F. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 2, 171—176; Indagationes math., 1957, **19**, № 2, 171—176 (англ.)

Рассматривается способ бикомпактификации топологических пространств с помощью построения пространств фильтров (РЖМат, 1957, 6908) для данного пространства. Фильтр на X называется открытым, если каждое образующее его множество содержит открытое множество, также входящее в этот фильтр. Пространством фильтров над X называется всякое множество открытых фильтров на X, содержащее все фильтры окрестностей точек пространства X и снабженное естественной топологией (сильной топологией в смысле РЖМат, 1957, 6908). Отмечается тесная связь пространств фильтров с построением границы пространства по А. Д. Мышкису (Матем. сб., 1949, 25, 387—414). Доказывается, что T_0 — пространство X^* со всюду плотным подмножеством X гомеоморфно некоторому пространству фильтров над X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x^* \in X^*$ и каждой ее окрестности U^* в X^* найдется такая (как оказывается, содержащаяся в ней) ее окрестность V^* в X^*, что $X^* \setminus U^* \subset \overline{X \setminus V^*}$. Это условие, а значит и утверждение теоремы, всегда выполняется в случае регулярности пространства X^*.

Далее, фильтр на вполне регулярном пространстве X называется вполне регулярным (Бурбаки, Гос. изд. физ.-матем. лит. М., 1958), если для всякого множества F этого фильтра найдется содержащееся в нем множество G фильтра, для которого существует непрерывная действительная функция, определенная на X, заключенная между 0 и 1 и принимающая значение 0 на множестве G и значение 1 на множестве $X \setminus F$. Показывается, что пространство фильтров φ над вполне регулярным пространством X бикомпактно тогда и только тогда, когда φ есть регулярное пространство и каждый максимальный вполне регулярный фильтр на X сильнее хотя бы одного фильтра из φ (т. е. содержит все входящие в него множества). Приводится пример, показывающий, что условие регулярности φ в этом предложении нельзя отбросить.

В приведенных терминах чеховское бикомпактное расширение вполне регулярного пространства X есть пространство всех максимальных вполне регулярных фильтров на X, а александровское бикомпактное расширение локально бикомпактного пространства получается добавлением к фильтрам окрестностей всех точек пространства еще одного фильтра, состоящего из всех таких множеств, замыкание дополнения которых бикомпактно.

М. Ф. Бокштейн

3609. Заметки о бикомпактификации. II. Вагнер (Notes on compactification. II. Wagner F. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **60**, № 2, 177—181; Indagationes math., 1957, **19**, № 2, 177—181 (англ.)

В этой второй заметке (реф. 3608) рассматриваются два других метода бикомпактного расширения пространств.

1. Пусть X есть вполне регулярное пространство, а B_0—семейство всех ограниченных действительных непрерывных функций на X. Введение нормы

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| (f \in B_0)$$

превращает B_0 в банахово пространство. Пусть B—его замкнутое линейное подпространство, а B^*—сопряженное пространство для B. Тогда отображение $e(x) = x^* \in B^*$, где $x^*(f) = f(x)$ для всех $f \in B$ будет непрерывным отображением X в B^*. Множество $F \subset B_0$ называется банахово-отделяющим, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности U существует такой элемент $f \in F$, что $\inf_{y \in U} |f(y) - f(x)| \neq 0$. Если B есть замкнутое линейное подпространство пространства B_0, порожденное таким множеством F, то замыкание образа пространства X при отображении $e(x)$ всегда будет, как оказывается, бикомпактным расширением X, которое называется его банаховой F-бикомпактификацией и обозначается через $X^*(F)$. При этом, кроме того, каждая функция $f \in B$ непрерывно продолжаема на $X^*(F)$. Если $\boldsymbol{U}$—прекомпактная равномерная структура на X, совместимая с его топологией, то множество B всех функций $f \in B_0$, равномерно непрерывных относительно $\boldsymbol{U}$, всегда будет банахово-отделяющим замкнутым линейным подпространством пространства B_0, а банахова B-бикомпактификация $X^*(B)$ будет гомеоморфна пополнению пространства X относительно равномерной структуры $\boldsymbol{U}$. Так как всякое бикомпактное расширение пространства X гомеоморфно его пополнению относительно равномерной структуры, порожденной этим расширением, то отсюда, в частности, следует, что указанным способом получаются все бикомпактные расширения X.

2. Пусть X—вполне регулярное пространство, а R_0—линейное кольцо всех ограниченных действительных непрерывных функций на X. Множество $F \subset R_0$ называется отделяющим множеством в кольце R_0, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности U найдется такой элемент $f \in F$, что $f(x) \neq 0$, а $(f)y = 0$ для всех $y \notin U$. Если $R(F)$ есть наименьшее линейное подкольцо кольца R_0, содержащее такое множество F и единичную функцию, а $\mu(F)$—множество максимальных идеалов кольца $R(F)$, снабженное соответствующей естественной топологией, то отображение $e: X \to \mu(F)$, определенное формулой $e(x) = \{f \in R(F) | f(x) = 0\}$, будет изоморфным вложением, а $\mu(F)$ будет бикомпактным расширением пространства X, называемым его кольцевой F-бикомпактификацией. Если $\boldsymbol{U}$—прекомпактная равномерная структура на X, совместимая с его топологией, а $R \subset R_0$ состоит из всех равномерно непрерывных относительно $\boldsymbol{U}$ функций, входящих в R_0, то R будет отделяющим множеством в R_0 и его линейным подкольцом, а R-бикомпактификация пространства X будет гомеоморфна пополнению X относительно равномерной структуры $\boldsymbol{U}$ (откуда, как и раньше, вытекает полнота системы бикомпактификаций пространства с помощью колец функций). М. Ф. Бокштейн

3610. Замечание о бикомпактификациях множества. Мрувка (A remark on compactifications of a set. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 12, 1105—1108, XCI (англ.; рез. русск.)

В реферируемой работе (частично являющейся модернизацией рассуждений де Вриса, РЖМат, 1959, 188) для произвольного множества S мощности $\geqslant \aleph$ и взаимно однозначного отображения φ множества S на себя строится компактное T_2-пространство, для которого S служит множеством всех его точек, а φ гомеоморфизмом. В конце работы ставится проблема о справедливости теоремы автора, если в ней заменить $\aleph$ на $\aleph_1$ без использования континуум-гипотезы. И. И. Паровиченко

3611. О функциональной замкнутости вполне регулярных пространств. Кац Г. И., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 5, 953

Вполне регулярное пространство G называется функционально замкнутым (Q-пространством), если для любого вполне регулярного пространства S, содержащего G как плотное подмножество, существует непрерывная, заданная на G функция, которую нельзя продолжить непрерывным образом на S.

Вполне регулярное пространство G называется топологически полным пространством, если оно полно относительно какой-либо равномерной структуры.

Доказывается теорема: Если функционально замкнуты дискретные пространства мощности, не превосходящей m,

то функционально замкнуты любые полные топологические пространства мощности m.

Из доказанной Ю. М. Смирновым теоремы о функциональной замкнутости дискретных пространств достижимой мощности (т. е. мощности, меньшей первой недостижимой) и формулированной выше теоремы следует, что вполне регулярное полное топологическое пространство достижимой мощности функционально замкнуто.

А. А. Кубенский

3612. Теорема об AU-покрытиях и компактность. Исэки (AU-covering theorem and compactness. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 7, 363—367 (англ.)

Помимо некоторых утверждений об AU-покрытиях (РЖМат, 1958, 5595), доказываются следующие необходимые и достаточные условия слабой компактности и абсолютной замкнутости (T_2-пространство R является абсолютно замкнутым, соответственно слабо компактным, если во всяком его открытом покрытии существует конечное число множеств Γ_i таких, что $U[\Gamma_i]=R$): 1) Условия для того, чтобы пространство было слабо компактным: а) всякое локально конечное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, б) всякое локально конечное открытое покрытие содержит AU-покрытие, в) всякое счетное открытое покрытие содержит AU-покрытие. 2) Условия для того, чтобы T_2-пространство было абсолютно замкнутым (соответственно слабо компактным): для любой убывающей трансфинитной (соответственно счетной) последовательности замкнутых множеств $F\lambda$ и замкнутого множества Ф такого, что $\bigcap_\lambda F_\lambda \subseteq \langle \Phi \rangle$, где $\langle \Phi \rangle$ — открытое ядро, существует такое λ_0, что $\langle F_{\lambda_0} \rangle \subseteq \langle \Phi \rangle$.

Ю. М. Смирнов

3613. Об одной теореме на функциональном пространстве Гротендика. Исэки (On a theorem on function space of A. Grothendieck. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 605—607 (англ.)

Рассматривается обобщение результатов Гротендика о компактности функциональных пространств (Grothendieck A., Amer. J. Math., 1952, **74**, 168—186). Пусть E—псевдокомпактное пространство. $C_s(E)$—топологическое пространство всех непрерывных функций на E с обычной топологией. Тогда всякий условный бикомпакт в $C_s(E)$ есть просто условный компакт. $\{x_n\}$— любое счетное множество, $\{f_n\}$ — любая последовательность функций, а $C=\Gamma_p\{x_n\}$. Тогда для того чтобы $A \subset C_s(E)$ было условным компактом, необходимы и достаточны следующие условия: 1) A точечно ограничено (существует $\max_{f\in A}|f(x)|$ для всех $x\in E$) и для $x\in C$ $f(x)$ есть точка сгущения, 2) A точечно ограничено и каждое $\{x_n\} \subset E\{f_n\}$ имеет хотя бы одну двойную точку сгущения. Отсюда следует, что этих признаков достаточно в применении ко всему E, чтобы всякая непрерывная функция на E была ограничена.

А. А. Кубенский

3614. Заметки о топологических пространствах. II. Некоторые свойства топологических пространств с лебеговым свойством. Исэки (Notes on topological spaces. II. Some properties of topological spaces with Lebesgue property. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 3, 171—173 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 232. Доказываются теоремы

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$—соответственно полунепрерывные сверху и снизу функции на равномерном пространстве S со счетным лебеговым свойством и предположим, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x в S. Тогда для любого положительного ε существует окрестность диагонали V из системы окрестностей, задающих равномерную структуру в S, такая что $f(x') < g(x'') + \varepsilon$ для любых x', $x'' \in V(x)$ и каждой точки $x \in S$ (определение лебегова свойства см. РЖМат, 1956, 5146).

2. Если каждая непрерывная функция на связном метрическом пространстве S равномерно непрерывна, то S—бикомпакт.

Теорема 1 обобщает известную теорему Серпинского (Fundam math., 1927, **9**, 1—2).

Е. Г. Скляренко

3615. О полных пространствах близости. Мрувка С., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 4, 587—590

Автор распространяет понятие полноты пространства на пространства близости, пользуясь при этом псевдометриками, задаваемыми на данном пространстве близости. При этом он не связывает свое понятие полноты с понятиями, предлагавшимися другими авторами.

В. А. Ефремович

3616. Аксиома 1′ Моора и метризуемость. Джонс (R. L. Moore's axiom I′ and metrization. Jones F., Burton), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 487 (англ.)

Пусть S—хаусдорфово пространство, в котором существует последовательность G_1, G_2,... открытых покрытий такая, что 1) для каждого n $G_n \supseteq G_{n+1}$, 2) если H и K— непересекающиеся замкнутые подмножества S, одно из которых бикомпактно, то для некоторого n никакой элемент G_n не пересекает одновременно H и K. Автор доказывает, что для такого пространства S справедливы предпосылки метризационной теоремы Моора (РЖМат, 1957, 6913).

Е. Г. Скляренко

3617. Пространство, на котором каждая непрерывная действительная функция является равномерно-непрерывной (общий случай). Ацудзи, Сугаку, 1957, 8, № 4, 211—213 (японск.)

См. реф. 3618

3618. Равномерная непрерывность непрерывных функций на метрических пространствах. Ацудзи (Uniform continuity of continuous functions of metric spaces. Atsuji Masahiko), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 1, 11—16 (англ.)

Устанавливается ряд необходимых и достаточных условий для того, чтобы любая непрерывная функция на метрическом пространстве S была равномерно непрерывной. Наиболее интересное условие следующее: множество A всех неизолированных точек пространства S есть компакт, и если $[x_n]$—любая последовательность из $S \setminus A$, не имеющая предельных точек в S, то $\inf \rho(x_n, S \setminus x_n) > 0$.

Пространство S называется конечно-сцепляемым (finitely chainable), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное n и конечное множество точек $p_1,..., p_i$ такие, что для любой точки $x \in S$ найдутся такое $j \leqslant i$ и такие точки $x_0=p_j$, $x_1,..., x_n$, что $\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \varepsilon$ и $\rho(x_n, x) \leqslant \varepsilon$. Доказывается теорема: Метрическое пространство S допускает равномерно непрерывную неограниченную функцию тогда и только тогда, когда S не является конечно-сцепляемым. Доказано также: Если связное метрическое пространство не является конечно-сцепляемым, то множество всех равномерно непрерывных функций не есть кольцо. Последнее утверждение исправляет аналогичное предложение для не вполне ограниченных пространств, высказанное Т. Исивата и оказавшееся ошибочным.

Е. Г. Скляренко

3619. Метризация множества, данного вместе с однозначным отображением в себя. Грот, Врис (Metrization of a set which is mapped into itself. Groot J. de, Vries H. de), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 34, 144—148 (англ.)

Доказаны следующие теоремы:

1. Если S—бесконечное множество и дано отображение $\Phi S \subset S$, то в S можно ввести недискретную метрику ρ так, чтобы отображение Ф было непрерывным отображением метрического пространства (S, ρ) в (S, ρ).

2. Если $\bar{S} \subset C$ и $\Phi S \subset S$, то (S, ρ) можно вложить в канторово совершенное множество так, что Ф будет непрерывно.

3. Если Ф—взаимно однозначное отображение, то $\Phi : (S, \rho) \to (S, \rho)$ есть топологическое отображение.

А. Д. Тайманов

3620. Одно свойство метрики Буземана для подпространства произвольного метрического пространства. Вальe-Флорес (Una propiedad de la metrica de Busemann para los subespacios en un espacio métrico arbitrario. Valle Flores Enrique), Bol. soc. mat. mexicana, 1953, **10**, № 1-2, 71—75 (англ.)

Пусть расстояние между множествами M, N метрического пространства X с метрикой $r(x,y)$ определено в смысле Буземана, т. е.

$$\rho_p(M, N) = \sup_{x \subset R} \{|r(x, M) - r(x, N)| \exp - r(p,x)\},$$

и в этом же смысле определен метрический предел последовательности подмножеств $\{M_\nu\}$. Доказывается, что если последовательность подмножеств $\{M_\nu\}$ удовлетворяет для метрики Буземана условию Коши, то M_ν сходится топологически. Доказательство является модификацией доказательства аналогичной теоремы для случая метрики Хаусдорфа

$$(\rho(M,N) = \sup_{x \in R} |r(x, M) - r, x, N|)$$

в книге Alexandroff P., Hopf H., Topologie, I, Bd., 1935, S. 112.

Р. И. Пименов

3621. О древовидных множествах. Уорд (On dendritic sets. Ward L. E., Jr), Duke Math. J., 1958, **25**, № 3, 505—513 (англ.)

Хаусдорфово пространство X называется древовидным, если оно связно, локально связно и каждые две его точки могут быть отделены третьей. Пространство X называется выпуклым, если множества $L(x)$ и $M(x)$ (РЖМат, 1955, 3112) составляют псевдобазис для замкнутых множеств, оно же называется дугообразно связным, если для любого множества, содержащего по крайней мере две точки, можно найти континуум из X, содержащий это множество.

Если X—древовидное пространство, то всякий континуум, содержащийся в X, является деревом. Обратно, X—связное, локально дугообразно связное хаусдорфово пространство, каждый континуум в котором является деревом—древовидно; последнее условие можно заменить отсутствием простой замкнутой линии. В локально связном хаусдорфовом пространстве древовидность эквивалентна наличию частичной упорядоченности со свойствами I—IV (РЖМат, 1956, 1189, 1959, 1318). Отсюда следует, что связное, локально связное, локально бикомпактное хаусдорфово пространство, у которого каждый подконтинуум является деревом, древовидно. Строится пример локально бикомпактного связного хаусдорфова пространства, не являющегося древовидным, в котором каждый континуум есть дерево, а также пример древовидного пространства, не являющегося локально бикомпактным. Теорема. Выпуклое древовидное пространство может быть включено топологически и изоморфно, в смысле частичной упорядоченности, в некоторый тихоновский куб $T = P\{Ia : a \in A\}$. При этом тогда и только тогда $x \leqslant y$ в T, когда $xa \leqslant ya$ для всех $a \in A$. Всякое выпуклое древовидное пространство может быть бикомпактифицировано до дерева; указывается пример, когда древовидное пространство не допускает бикомпактификации до дерева.

А. С. Пархоменко

3622. M-связность и внутренние полиэдральные аппроксимации плоского пеановского континуума. Томинага (m-connectedness and polyhedral inner approximations of plane peano continua. Tominaga Akira), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, **A20**, № 2, 65—77 (англ.)

Пусть M — плоский континуум Пеано, т. е. множество, гомеоморфное локально связному континууму на плоскости. Используя теорию циклических элементов (Whyburn G. T. Analytic topology, Amer. Math. Soc., 1942, 28, New York) для каждого локально связного континуума M на плоскости, строятся индуктивно определяемые системы множеств C_n, G_n, K_n, Γ_n, Q_n.

Пусть $\{C_i\}$ — последовательность истинных циклических элементов M, ω_i — простая замкнутая кривая, являющаяся границей неограниченной компоненты дополнения C_i в плоскости.

D_i—внутренняя к ω_i область. Легко видеть, что либо $D_i \cap D_k = \Lambda$, либо $D_i \subseteq D_k$, либо $D_i \supseteq D_k$. C_i назовем истинным циклическим элементом первого порядка, если для каждого $k = 1, 2, \ldots$, $D_i \supseteq D_k$ или $D_i \cap D_k = \Lambda$. Через $C_1 = \{C_{i_1}\}$ обозначим множество циклических элементов 1-го порядка. $D_1 = \{D_{i_1}\}$. Тогда, как известно, замыкание каждой компоненты $T \subset M / \overline{U_{i_1} D_{i_1}}$ — невырожденный дендрит. $\tau_0 \{\overline{T}^p\}$ — множество замыканий компонент $M \setminus \overline{U_{i_1} D_{i_1}}$.

$G_n = \{G_{i_1 j_1}\}_{i_1, j_1 = 1, 2, \ldots}$ — множество ограниченных компонент дополнения C_{i_1} в плоскости. $\overline{K_1} = \{\overline{K}_{i_1 j_1 k_1}\}$ — множество замыканий компонент $K_{i_1 j_1 k_1} \subset M / C_{i_1}$, содержащихся в $G_{i_1 j_1}$ при некоторых i_1 и j_1.

По индукции определяются C_n, Q_n, G_n, K_n и Γ_n; например,

$G_n = \{C_{i_1 j_1 k_1, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, k_{n-1}, i_n}\}$ — множество истинных циклических элементов порядка n, причем $C_{i_1 j_1 k_1, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, k_{n-1}, i_n} \subset K_{i_1 j_1 k_1, \ldots, i_{n-1} j_{n-1} k_{n-1}}$, $G_n = \{G_{i_1 j_1 k_1, \ldots, i_n j_n}\}$ — множество ограниченных компонент дополнения к $C_{i_1 j_1 k_1, \ldots, i_n}$.

Плоский пеановский континуум называется m-связным, если $G_m = \Lambda$. Если $G_m \neq \Lambda$ ни для какого n, то M ∞-связно. M просто связно, если из того, что простая замкнутая дуга принадлежит M, следует, что и внутренняя область, ограниченная этой дугой, тоже принадлежит M. Непосредственно из определения m-связности следует теорема 1: Если M — m (или ∞)-связно, тогда для каждого $n \leqslant m$ (или $n < \infty$) существует единственный минимальный n-связный плоский континуум M_n, содержащий M. И, следовательно,

$$M = \bigcap_{n \leqslant m (n < \infty)} M_n \qquad (M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M).$$

В теореме 2 формулируются 8 эквивалентных между собой свойств плоского пеановского континуума, причем относительно новыми являются свойства 1) — 3) : 1) M просто связен, 2) M обладает выпуклой метрикой такой, что для каждой пары точек x и y существует единственный геодезический сегмент, соединяющий их, 3) M стягиваемо.

Назовем M внутренней полиэдральной аппроксимацией если M гомеоморфно множеству $\overline{\cup_i P_i}$, где P_i — евклидовы полиэдры. Тогда имеет место следующая теорема Каждый плоский континуум Пеано M — внутренняя полиэдральная аппроксимация.

Дается определенный процесс построения полиэдрального множества, замыкание которого гомеоморфно M.

М. Я. Антоновский

3623. Заметка о теории размерности метрических пространств. Нагата (Note on dimension theory for metric spaces. Nagata J.), Fundam. math., 1958, **45**, № 2, 143—181 (англ.)

Приведены полные доказательства результатов, содержащихся в предыдущих заметках (РЖМат, 1957, 6909; 1958, 1079, 3610).

Ю. М. Смирнов

3624. Одно топологическое определение размерности. Калеро (Una definición topológica de dimensión. Calero Gonzalo), Rev. mat. hisp.-amer., 1954, **14**, № 4-5, 194—199 (исп.)

Попытка определения размерности топологического пространства, исходя из положения: если два множества H и X удовлетворяют условиям $X \subset H$ и $\overline{H \setminus X} = \overline{H}$, то размерность множества H больше размерности множества X. Ясно, однако, что таким путем мы даже при правильных рассуждениях придем не к понятию размерности в обычном смысле, а лишь к известной классификации замкнутых счетных множеств (т. е. не выйдем за пределы даже нульмерных множеств). Автор же вообще не дает действительно корректного определения, а поступает так: фиксируя какое-нибудь множество A_0 (по идее автора, нульмерное), для которого из $\overline{A_0 \setminus X} = \overline{A_0}$ вытекает, что множество X пусто, он затем принимает за A_1 (т. е. за одномерные множества) наименьшее из таких множеств H, для которых $\overline{H \setminus A_0} = \overline{H}$ (т. е. $\overline{H \setminus A_0} = \overline{H}$, но $\overline{H' \setminus A_0} \neq \overline{H'}$ для любого отличного от H множества $H' \subset H$), тогда как на самом деле таких наименьших множеств, конечно, не существует. М. Ф. Бокштейн

3625. Некоторые применения теории открытых отображений. Сикорский (Some applications of interior mappings. Sikorski R.), Fundam. math., 1958, **45**, № 2, 200—212 (англ.)

Дается применение двух следующих теорем:

Теорема 1 (A. Z. Wallace). Отображение φ топологического пространства X в топологическое пространство Y только тогда открыто, когда $\varphi^{-1}(\overline{A}) = \overline{\varphi^{-1}(A)}$ для любого $A \subset Y$.

Теорема 2 (А. С. Шварц). Если топологическое пространство X со счетной базой имеет мощность $\overline{\overline{X}} \leqslant 2^{\aleph_0}$, то X есть открытый образ некоторого множества иррациональных чисел. Выражение α, содержащее переменные A, B, C операции суммы $(+)$, пересечения $(\cdot)$, дополнения $(-)$, замыкания $(^-)$, применяемые к конечному числу элементов, называется топологическим полиномом, если переменные A, B, C пробегают множество подмножеств топологического пространства X и операции рассматриваются как теоретико-множественные. Топологический полином α есть отображение α_X, ставящее системе подмножеств топологического пространства X подмножество того же пространства X.

$\alpha_X \equiv 0$, если при любых значениях, входящих в α переменных, значение отображения α_X равно 0.

$\alpha \equiv 0$, если для любого топологического пространства X имеем $\alpha_X \equiv 0$.

Мак-Кинси и Тарский (Mckinsey J. C. C., Tarski A., Ann. Math., 1944, **45**, 141—191) показали, что существует метрическое пространство X_0 со счетной базой такое, что если $\alpha_{X_0} = 0$, то $\alpha \equiv 0$. В работе доказывается аналогичная теорема для счетных топологических полиномов.

Теорема 3. Существует такое множество z иррациональных чисел, что для любого счетного топологического полинома α из $\alpha_z \equiv 0$ следует $\alpha \equiv 0$.

Каждую форму логического исчисления Левиса можно рассматривать как счетный топологический полином и теорема 3 легко переносится в исчисление Левиса. Пусть $H(X)$ — множество открытых подмножеств топологического пространства X со следующими операциями: $A + B$ — теоретико множественная сумма, $A \cdot B$ — пересечение, $A \to B = \mathrm{int}[(X \setminus A) \cup B]$. Отображение $h : H(Y) \to H(X)$ называется H-гомоморфизмом, если сохраняются операции $+, \cdot, \to$. Если $\varphi : X \to Y$, то h определяется равенством $h(A) = \varphi^{-1}(A)$ для любого $A \in H(Y)$. Отображение φ непрерывно только тогда, когда $h(H(Y)) \subset H(X)$. Отображение φ открыто, если h есть H-гомоморфизм. Если Y — хаусдорфово пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, и h есть H-гомоморфизм, то φ — открытое отображение. А. Д. Тайманов

3626. Связные отображения хаусдорфовых пространств. Первин, Левин (Connected mappings of Hausdorff spaces. Pervin William J., Levine Norman), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 488—496 (англ.)

Отображение хаусдорфова пространства на хаусдофово пространство, сохраняющее связность подмножеств, называется связным. Взаимно однозначное и в обе стороны связное отображение, при котором и образ и прообраз — локально связные бикомпакты, есть гомеоморфизм.

Строятся примеры неизмеримой связной функции на $[0, 1]$ и связной функции на квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, непрерывной по каждому из переменных, но разрывной по их совокупности. А. С. Чернавский

3627. О квазиоткрытых отображениях. Ханаи (On quasi-interior mappings. Hanai Sitiro), Math. japon., 1955, **3**, № 3, 117—120 (англ.)

Непрерывное отображение $f(S) = E$ T_1-пространств S в E называется квазиоткрытым, если любая точка $p \in E$ будет внутренней точкой множества $f(u)$, где u — произвольное открытое в S множество, содержащее бикомпактную компоненту множества $f^{-1}(p)$.

Если $f(S) = E$ — такое квазиоткрытое отображение, что все $f^{-1}(p)$ бикомпактны, то при f сохраняются следующие свойства пространства: 1) локальная бикомпактность, 2) локальная связность, 3) наличие счетной базы.

Доказана теорема: Пусть S локально связно и $f(S) = E$ — такое замкнутое, квазиоткрытое отображение, что все $f^{-1}(p)$ — бикомпактные множества. Если R — связное открытое множество в E, то каждая компонента множества $f^{-1}(R)$ отображается при f на R. А. Д. Тайманов

3628. Теорема о квазикомпактных отображениях. Макдугл (A theorem on quasi-compact mappings. McDougle Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 474—477 (англ.)

Отображение f называется квазикомпактным, если множество открыто в образе тогда и только тогда, когда его прообраз открыт (РЖМат, 1955, 3659). Непрерывное отображение называется полузамкнутым, если образ всякого бикомпактного подмножества замкнут (образ не предполагается хаусдорфовым). Непрерывное отображение f называется P_2-отображением, если для любой точки y образа имеется бикомпактное множество $C \subset f^{-1}(y)$ такое, что для любой его окрестности U всегда $y \in \mathrm{int} f(U)$, где $\mathrm{int} A$ обозначает открытое ядро множества A.

Доказывается теорема: Пусть f — квазикомпактное отображение локально компактного сепарабельного метрического пространства X на топологическое пространство Y; тогда Y — локально компактное метризуемое пространство со счетной базой тогда и только тогда, когда f есть полузамкнутое P_2-отображение.

Доказательство существенно основывается на результатах работы Стоуна (РЖМат, 1957, 8495).

Примечание референта. Автор утверждает, что в формулировке теоремы нельзя отказаться от условия локальной компактности. Однако приведенный пример является ошибочным: отображение не полузамкнуто, а пространство разбиений нехаусдорфово. Е. Г. Скляренко

3629. Равномерная сходимость монотонных отображений. Уайберн (Uniform convergence for monotone mappings. Whyburn Gordon T.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 11, 992—998 (англ.)

Пространство Y циклично, если для любой точки $y \in Y$ множество $Y - y$ связно. Пространство Y полулокально связно, если для любых точек $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки y диаметра $< \varepsilon$, что $Y \setminus u$ имеет конечное число компонент. Отображение $f : X \to Y$ называется монотонным, если для всех $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ связно. Подмножество X_0 регулярной кривой X называется базой регулярности, если для любой точки $x \in X$ и любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется окрест-

ность U точки x диаметра $<\varepsilon$ граница которой состоит из конечного числа точек, лежащих в X_0.

Дан ряд достаточных условий того, чтобы последовательность f_n непрерывных отображений пространства X в пространство Y сходилась равномерно. Приводим некоторые из них.

1. Пусть X и Y — континуумы, где Y циклично и полулокально связно. Пусть далее $f_n(x)$ — последовательность монотонных отображений X на Y. Если существует непостоянное отображение $f: X \to Y$ такое, что для каждого $x \in X$ существует произвольно малая окрестность U точки x с границей C и $\limsup [f_n(C)] \subset f(C)$; тогда $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на X, и если Y локально связно, то f монотонно.

2. Пусть X — регулярная кривая, Y циклична и $\{f_n(x)\}$ — последовательность монотонных отображений множества X на Y. Если существует непостоянное отображение $f: X \to Y$ такое, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ во всех точках базы регулярности, то $f_n(x)$ сходится равномерно $f(x)$ на X, $f(x)=Y$. Даны аналогичные признаки для последовательности отображений некомпактных пространств.

А. Д. Тайманов

3630. О ханнеризации вполне нормальных пространств. Исэки (On the hannerization of completely normal spaces. Iseki Kiyoshi. Rev. Fac. Ci., Univ. Lisboa, 1954, **A3**, 143—146) (англ.)

Если X и Y полные нормальные топологические пространства, B любое замкнутое подмножество Y и f непрерывное отображение B в X, то существует полное нормальное пространство Z, которое образуется из X и Y через отождествление каждого $y \in B$ с $f(y) \in X$.

Перевод из Zbl Math 1955, 56, 159. T. Ganea

3631. О классах патологических функций. Гинсбург (On the class of pathological functions. Ginsburg Seymour), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 797—805 (англ.)

Пусть X и Y — метрические пространства со счетной базой. Однозначное отображение $d: X$ в Y называется дисгомеоморфизмом, если ни одно подмножество $E \subset X$ мощности $2^{\aleph_0}$ не отображается с помощью d гомеоморфно на $d(E)$. Основной результат работы: Всякое однозначное отображение F X в Y может быть равномерно аппроксимировано с помощью последовательности d_n дисгомеоморфизмов X на $f(x)$.

На аппроксимирующие отображения и на X, Y могут быть наложены более тесные предположения (например, условие периодизации). Доказательство опирается на результат Лаврентьева (Fundam. math., 1924, 6, 149), по которому каждый гомеоморфизм подмножества D из X в Y, предполагаемое полным, может быть продолжен до гомеоморфизма G_δ-подмножества D' в Y с $D \subset D' \subset X$.

H. Bauer

Перевод из Zbl. Math., 1956, 65, 381

3632. Тензорные произведения систем групп и теоремы об универсальных коэффициентах для гомологий и когомологий. Бокштейн М., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1066—1069

Доказывается формула универсальных коэффициентов

$$H^q(X, G) \approx H_0^q(X) \otimes G + \mathrm{Tor}(H_0^{q+1}(X), G)$$

для спектральных групп когомологий топологического пространства в смысле Чеха. Здесь $H^q(X, G)$ — q-мерная спектральная группа когомологий пространства X по группе коэффициентов G; $H_0^q(X) = H^q(X, I)$, где I — аддитивная группа целых чисел; $\otimes$ — знак тензорного произведения, Tor — знак произведения кручения. Универсальность группы I была ранее доказана автором (РЖМат, 1957, 6226) без явного указания формулы, дающей группу $H^q(X, G)$.

Е. С. Голод

3633. Об одном спектре гомологических групп комплекса. Бокштейн (Sur le spectre d'homologie d'un complexe. Bockstein Meyer), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 3, 259—261 (франц.)

Доказывается, что группы гомологий комплекса без кручения относительно любой группы коэффициентов определяются спектром гомологий комплекса.

Под комплексом понимается последовательность абелевых групп L:

$$\ldots \xrightarrow[\alpha]{} L^{q-1} \xrightarrow[\alpha]{} L^q \xrightarrow[\alpha]{} L^{q+1} \xrightarrow[\alpha]{} \ldots,$$

связанных гомоморфизмом d таким, что $d\,d=0$, а под группой гомологий степени q комплекса L относительно абелевой группы коэффициентов G понимается фактор-группа

$$H^q(L, G) = \ker(L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G) / im(L^{q-1} \otimes G \to L^q \otimes G).$$

Предполагается, что группы L^q не содержат элементов конечного порядка.

Автор вводит следующие определения: Системой групп $\{G_\alpha; \pi\}$ называется множество абелевых групп G_α, связанных гомоморфизмами $\pi = \pi_\beta^\alpha$: $G_\alpha \to G_\beta$, определенными для некоторых пар этих групп. Две системы $\{G_\alpha, \pi\}$ и $\{H_\alpha, \omega\}$ называются сопряженными, если они определены для одного и того же множества индексов и ω_α^β определены для тех же пар, для которых определены π_β^α. Тензорным произведением $\{G_\alpha, \pi\} \otimes \{H_\alpha, \omega\}$ двух сопряженных систем групп называется фактор-группа прямой суммы $\Sigma_\alpha G_\alpha \otimes H_\alpha$ относительно ее подгруппы, порожденной всеми элементами вида

$$g_\alpha \otimes \omega_\alpha^\beta h_\beta - \pi_\beta^\alpha g_\alpha \otimes h_\beta \quad (g_\alpha \in G_\alpha,\ h_\beta \in H_\beta).$$

Спектром гомологий степени q комплекса L называется система групп $\{H_m^q(L); \pi, \omega\}$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$, где $H_0^q(L) = H^q(L, I)$, $H_m^q(L) = H^q(L, I_m)$, I и I_m означают соответственно аддитивную группу целых и группу вычетов по модулю m, а $\pi = \pi_m^{m'}$, $\omega = \omega_{m'}^m$ определены для пар (m, m') таких, что $m \mid m'$ и являются гомоморфизмами, отвечающими соответственно естественной проекции $\varphi_m^{m'}: I_{m'} \to I_m$ и естественному вложению $\psi_{m'}^m: I_m \to I_{m'}$ групп коэффициентов.

Основным результатом работы является следующая формула, позволяющая выразить группы гомологий комплекса L через его спектр гомологий:

$$H^q(L, G) = \{H_m^q(L); \pi, \omega\} \otimes \{{}_mG; i, j\},$$

где ${}_mG$ для $m=0$ совпадает с G, для $m \neq 0$ есть группа таких элементов $g \in G$, для которых $mg=0$, а $i = i_{m'}^m$ и $j = j_{m'}^m$ определены для пар (m, m') таких, что $m \mid m''$ и представляют собой соответственно вложение и умножение на m'/m.

Е. С. Голод

3634. Формула универсальных коэффициентов для групп гомологий. Бокштейн (Sur la formule des coefficients universels pour les groupes d'homologie. Bockstein Meyer), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 4, 396—398 (франц.)

Классическая формула универсальных коэффициентов

$$H^q(L, G) \approx H_0^q(L) \otimes G + \mathrm{Tor}(H_0^{q+1}(L), G),$$

известная ранее для свободных комплексов, распространяется на комплексы, состоящие из произвольных абелевых групп без элементов конечного порядка. Для топологических пространств это дает формулу универсальных коэффициентов для групп когомологий в смысле Чеха, полученную ранее автором непосредственно (реф. 3633).

Самостоятельный интерес представляет доказанная в работе новая формула для произведения кручения двух абелевых групп:

$$\mathrm{Tor}(H, G)=\{{}_mH; j, i\}\otimes\{{}_mG; i, j\} \qquad (m\neq 0)$$

${}_mH$, ${}_mG$ — подгруппа элементов H, G, для которых $mh=0$, $mq=0$.

Е. С. Голод

3635. О пространствах, на которых действует группа действительных чисел по mod 1. Коннер (On the action of the circle group. Conner P. E.), Michigan Math. J., 1957, 4, № 3, 241—247 (англ.)

Пусть S^1 — группа действительных чисел по mod 1; X — континуум Пеано и F — множество точек X, неподвижных относительно группы S^1. Через $H^i(X; Q)$ обозначается i-мерная группа когомологий с коэффициентами из поля рациональных чисел. Доказывается, что если существует такое число n, что $H^t(X; Q)=0$ для всех $t\geqslant n$, то $H^t(F; Q)=0$ для всех $t\geqslant n$. Кроме того, выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\dim H^{2t}(F; Q)\leqslant\sum_{t=0}^{\infty}\dim H^{2t}(X; Q),$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\dim H^{2t+1}(F; Q)\leqslant\sum_{t=0}^{\infty}\dim H^{2t+1}(X; Q).$$

X — имеет бесконечную когомологическую локальную связность clc^{∞}, если для каждой точки $x\in X$ и каждой ее замкнутой окрестности U_x существует такая замкнутая окрестность $V_x\subset U_x$, что для всех целых чисел n гомоморфизмы i^*: $\tilde{H}^n(U_x; Q)\to\tilde{H}^n(V_x; Q)$ являются тривиальными ($\tilde{H}^n$ суть редуцированные группы и включение индуцирует i^*). Аналогично, X имеет бесконечную когомологическую локальную связность clc^m, если для каждой точки $x\in X$ и каждой ее замкнутой окрестности U_x существует такая замкнутая окрестность $V_x\subset U_x$, что для целых чисел $n\leqslant m$ гомоморфизмы i^*: $\tilde{H}^n(U_x; Q)\to\tilde{H}^n(V_x; Q)$ являются тривиальными.

Доказано, что если X — конечно-мерно и U имеет clc^{∞}, то F также имеет clc^{∞}.

М. Гриндлингер

3636. Топологическая степень и теоремы существования неподвижных точек для многозначных отображений n-мерной клетки. Даль-Сольо (Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n-celle. Dal Soglio Letizia), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 103—121 (итал.)

Результаты, полученные автором для трехмерного случая (РЖМат, 1957, 6920), распространяются без какого-либо существенного изменения метода на случай многозначных отображений n-мерной клетки в себя. На отображение накладываются такие же ограничения, как и раньше. Доказательство существования неподвижных (т. е. содержащихся в своем образе) точек при таких отображениях опять основывается на должным образом определенном понятии топологической степени отображения относительно $(n-1)$-мерного цикла. Как и в трехмерном случае, отсюда, в частности, вытекает существование неподвижных точек при не более чем двузначных непрерывных отображениях n-мерной клетки в себя.

М. Ф. Бокштейн

3637. О сдвигах прообразов точек. Вейер (Über dimensionale Verschiebung. Weier J.), Fundam. math., 1958, 45, № 2, 130—137 (нем.)

Сформулирована следующая теорема: Пусть P и Q — замкнутые ориентируемые многообразия, f — непрерывное отображение P в Q, a — точка в Q; $C=f^{-1}(a)$ и $\dim C=n$. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое гомотопное f отображение f_1, что $C_1=f_1^{-1}(a)$ является полиэдром размерности $\leqslant n$ и существует ε-сдвиг C в G.

Доказательство проведено в предположении, что $n=0$, $\dim P=\dim Q+1$ и некоторых дополнительных условиях.

Р. Л. Фрум-Кетков

3638. Коциклы совпадения двух отображений и одна формула в теории расслоенных пространств. Хопф Хопф (Die Coinzidenz-Cozyklen und eine Formel aus der Fasertheorie. Hopf H.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 263—279 (нем.)

Доказывается формула автора (Sur une formule de la theorie des espaces fibres. Colloque de Topologie (Espaces fibres.) Bruxell, 1950) относящаяся к теории продолжения отображений, теории препятствий в расслоенных пространствах. Пусть (R, X, Y, p) — расслоенное пространство, базой которого является полиэдр X, слоем — n-мерное ориентируемое многообразие Y. Пусть K^s обозначает s-мерный остов X σ—симплекс из K; r—ретракция множества $p^{-1}(\sigma\times Y)$, один слой. Классы когомологий обозначаются черв той сверху.

Для любых двух секущих поверхностей f и g, заданных над K^n и находящихся в общем положении, т. е. $f(K^{n-1})\cap g(K^{n-1})=0$, автор называет „Coinzidenz-Cozyklus" f и g целочисленный коцикл $\omega(f, g)$, значение которого на σ^n равно индексу пересечения $f(\sigma^n)$ и $g(\sigma^n)$ в $\sigma^n\times Y$. Любые две секущие поверхности f и g, заданные над K^n, произвольно малой деформацией можно привести в общее положение. Класс когомологий $\bar{\omega}(f, g)$ не изменяется при непрерывной деформации f и g и является первым препятствием к разъединению f и g. При выводе формулы предполагается, что X является N-мерным полиэдром, $N=n+q$, $q>1$; Y асферично во всех размерностях до q; целочисленные группы гомологий $H_q(Y)$ и $H_n(Y)$ образуют тривиальную локальную систему коэффициентов; f и g — секущие поверхности, заданные над K^{N-1}. $H_q(Y, J)$ обозначает q-мерную группу гомологий Y при области коэффициентов J. Тогда определена различающая $\alpha(f, g)$, являющаяся q-мерным коциклом с областью коэффициентов $H_q(Y, J)$. Обозначим через $\Gamma(f)$ N-мерную цепь, значение которой на σ^N равно элементу $c(F)\in H_q(Y, J)$, равному образу $H_0(Y)$ в $H_q(Y, J)$ при гомоморфизме Гизина, порожденным отображением $F=rf$ множества $\dot{\sigma}^N$ в Y. Так как $K=K^N$, то $\Gamma(f)$ — коцикл.

При симплициальном отображении F S^{N-1} в Y^n прообраз точки из Y^n является $(q-1)$-мерным циклом z^{q-1}. Образ цепи, ограничивающей z^{q-1}, определяет элемент $c(F)\in H_q(Y, J)$; $c(F)$ порождает гомоморфизм $\pi_{N-1}(Y)$ в $H_q(Y)$.

Доказываемая формула такова:

$$\bar{\Gamma}(f)-\bar{\Gamma}(g)=\bar{\alpha}(f, g)\cup\bar{\omega}(f, g).$$

При этом группа J является произвольной для четного n и J—группа второго порядка для нечетного n. Для случая $R=X\times Y$ эта формула выражена в терминах теории отображений.

Р. Л. Фрум-Кетков

3639. Гомотопическая эквивалентность расслоенных пространств. Кертис, Лашоф (Homotopy equivalence of fiber bundies. Curtis M. L., Lashof R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 2, 178—182 (англ.)

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы для расслоенных пространства E_1 и E_2 одинаковыми базой B, слоем F и структурной группой G были послойно гомотопно эквивалентны, при этом база предполагается полиэдральной, слой-локально компактным и структурная группа — имеющей компактно-откры тую топологию.

Пусть Ω — пространство петель в базе, P — пространство путей с фиксированным началом. Петля $\omega \in \Omega$ отождествляется с парой путей (p, q); $p(t) = \omega\left(\frac{t}{2}\right)$, $q(t) = \omega\left(1 - \frac{t}{2}\right)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Существуют отображения $\Phi : \Omega \to G$ и отображения $R_i : P \times F \to E_i$, $i = 1,2$, такие, что $\Phi_i(p, q) = p_i^{*-1} g_i^*$, где $p_i^* = R_i | p \times F$. Необходимым и достаточным условием эквивалентности расслоенных пространств оказывается существование отображения $\psi : P \to M$ такого, что

$$j\Phi_2(p, q)\, \psi(q) = \psi(p)\, j\Phi_1(p, q),$$

где M — группа непрерывных отображений слоя в слой, имеющих гомологически обратные отображения.

Используя утверждение о том, что $(j\Phi_1)^*(H^*(M))$ и $(j\Phi_2)^*(H^*(M))$ изоморфные подкольца кольца $H^*(\Omega)$, которое следует из этой теоремы, проведено исследование расслоенного пространства (H, p, S_n, Q), где S_n — n-мерная сфера, H — группа отображений S_n в S_n гомотопных тождественному и $p(h) = h(y_0)$, y_0 — некоторая фиксированная точка сферы.

Доказано: При n нечетном: 1) $H_p(H)$ конечна для всех $p > 0$, $p \neq n$. 2) $p_* H_n(H) \to H_n(S_n)$ — есть отображение на. 3) $H_{n-1}(Q) \approx H_{n-1}(H)$. При n четном: $p_* H_n(H) \to H_n(S^n)$ — тривиально, так что либо $H_n(H) \approx H_n(Q)$, либо $H_n(H) \approx H_n(Q)/Z_2$. В. И. Кузьминов

3640. Понятие максимального главного расслоенного пространства. Араньоль (Notion d'espace fibré principal maximal. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 26, 3570—3572 (франц.)

Пусть (E, X, G, p) — главное расслоенное пространство с односвязной базой X и группой G, допускающей универсальное накрытие. Пусть S — образ группы $\pi_2(X)$ при характеристическом гомоморфизме в $\pi_1(G)$. Расслоение E называется максимальным, если $S = \pi_1(G)$. Автор говорит, что задано расслоенное накрытие пространства E, если заданы главное расслоение (E', X, G', p) и накрытия $E' \to E$, $G' \to G$, согласованные с p, p' и между собой. Доказывается, что два максимальных расслоенных накрытия расслоения E изоморфны между собой. Далее, если пространство X допускает покрытие односвязными областями, над каждой из которых расслоение E тривиально, то существует максимальное расслоенное накрытие расслоения E такое, что $\pi_1(G') = S$. Наконец, расслоение E допускает расслоенное накрытие с односвязной структурной группой тогда и только тогда, когда его первое препятствие тривиально. А. Л. Онищик

3641. Канонические связности и классы Понтрягина. Кобаяси (Canonical connections and Pontrjagin classes. Kobayashi Shoshichi), Nagoya Math. J., 1957, **11**, 93—109 (англ.)

В первой части работы устанавливаются взаимоотношения между каноническими связностями в главных косых произведениях $O(n+k)$, $P_{n,k} = O(n+k)/\{1\} \times O(k)$, $P^*_{n,k} = O(n+k)/O(n) \times \{1\}$ над грассмановым многообразием $M_{n,k} = O(n+k)/O(n) \times O(k)$.

Рассмотрим в ортогональной группе $O(n+k)$ левоинвариантную дифференциальную форму Θ, принимающую значения в алгебре Ли $\mathfrak{o}(n+k)$ и определяемую условием $\Theta(s) = s^{-1}\bar{s}$, где $\bar{s}$ принадлежит касательному пространству точки s. Канонические связности в указанных выше произведениях определяются с помощью проекций значений формы Θ соответственно на алгебры $\mathfrak{o}(n+k)$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{o}(k)$, причем первая из этих связностей является (в некотором естественном смысле) произведением двух других. Показывается явным образом, что она индуцирует на $M_{n,k}$ инвариантную риманову связность. Для канонических связностей в $O(n+k)$, $P_{n,k}$ $P^*_{n,k}$ над $M_{n,k}$ устанавливаются группы голономий (соответственно $SO(n+k) \cap (O(n) \times O(k))$, $O(n)$, $O(k)$) и вычисляются формы кривизны.

Далее приводится следующее определение характеристических классов главного косого произведения P над многообразием M (с группой G и проекцией π). Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли для G, Ω — форма кривизны на P (двумерная, принимающая значения в $\mathfrak{G}$), соответствующая некоторой инфинитезимальной связности. Пусть далее f — однородный полином на $\mathfrak{G}$, инвариантный относительно G. Тогда найдется замкнутая форма $f(\Omega)^*$ на M такая, что $\pi^*(f(\Omega)^*) = f(\Omega)$. Ее класс когомологий и называется характеристическим классом. Если M — риманово многообразие и P — пучок ортогональных базисов над M, то классы Понтрягина для многообразия M являются характеристическими классами в этом смысле.

Во второй части работы вычисляются (в терминах матричных коэффициентов) значения на алгебре Ли ортогональной группы симметрических многочленов различных видов (p_r — сумма различных произведений по r элементов, t_r — сумма r-х степеней). Им соответствуют характеристические классы произведений $P_{h,k}$ и $P^*_{h,k}$, реализующиеся с помощью дифференциальных форм $\tilde{p}_r, \tilde{t}_r, \tilde{p}^*_r, \tilde{t}^*_r$ на многообразии $M_{n,k}$. Между этими формами имеют место соотношения: $\tilde{t}_r + \tilde{t}^*_r = 0$ (теорема двойственности У Вэнь цзюня) и

$$\tilde{p}_r + \tilde{p}_{r-1}\tilde{p}^*_1 + \tilde{p}_{r-2}\tilde{p}^*_2 + \ldots + \tilde{p}^*_r = 0.$$

Для n-мерного многообразия M в $(n+k)$-мерном евклидовом пространстве можно рассмотреть естественные отображения пучков его касательных и нормальных базисов соответственно в $P_{n,k}$ и $P^*_{n,k}$. Дуальные отображения индуцируют на M дифференциальные формы $p_r(M)$, $p^*_r(M)$ и др., являющиеся инвариантами римановой связности многообразия и представляющие классы Понтрягина. Последние зависят только от дифференциальной стуктуры многообразия M. И. З. Розенкноп

3642. Группы преобразований гомологического многообразия. Янг (Transformation groups on a homological manifold. Yang C. T.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 2, 261—283 (англ.)

Пусть X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, $\hat{X}$ — его одноточечная компактификация, $\mathfrak{P}$ — группа действительных чисел по mod 1. Если A — замкнутое подмножество X, то через $H_k(X, A)$ обозначается k-мерная группа гомологий пространства $\hat{X}$ по модулю $\hat{A}$ с коэффициентами в $\mathfrak{P}$. Связное конечномерное локально компактное хаусдорфово пространство X называется $(\mathfrak{P}, n)$-многообразием, если для каждой точки $x \in X$ существуют такая относительно бикомпактная окрестность U и такая подгруппа $S \subset H_n(X, X \setminus U)$, изоморфная $\mathfrak{P}$, что выполнены следующие условия: 1) если W — непустое открытое подмножество U, то естественный гомоморфизм $H_n(X, X \setminus U) \to H_n(X, X \setminus W)$ изоморфно отображает S; 2) если $y \in U$ и V — относительно бикомпактная окрестность точки y, то существует окрестность $W \subset U \cap V$ точки y такая, что образ группы $H_k(X, X \setminus V)$ при естественном гомоморфизме в $H_k(X, X \setminus W)$ $k \neq n$ является нулевым, а при $k = n$ содержится в образе подгруппы S при указанном в условии 1) гомоморфизме. Доказывается, что размерность $(\mathfrak{P}, n)$-многообразия равна n.

Основные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах: 1) Пусть X — $(\mathfrak{P}, n)$-многообразие и H — конечная группа, эффективно действующая на X. Если H нетривиальна, то размерность множества точек X, неподвижных при всех преобразованиях из H не превосходит $n-1$. 2) Пусть G — бикомпактная группа Ли, эффективно действующая на $(\mathfrak{P}, n)$-многообразии X, так что максимальная размерность орбит равна r. Тогда объединение всех орбит размерностей $\leqslant k\,(0 \leqslant k < r)$ есть замкнутое множество размерности $n-r+k-1$. В случае, когда X — n-мерное многообразие, теорема 2 была ранее доказана Монтгомери, Замельсоном и Зиппином (РЖМат, 1957, 2163). А. Л. Онищик

3643. Орбиты наивысшей размерности. Монтгомери, Ян (Orbits of highest dimension. Montgomery D., Yang C. T.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 2, 284—293 (англ.)

Пусть G — компактная связная группа Ли, действующая на $(\mathfrak{P}, n)$- многообразии X (реф. 3642), r — наивысшая размерность орбит, F — множество точек, орбиты которых имеют размерности $< r, s$ — наименьшее число компонент в стационарной подгруппе Gx точки $x \in X \setminus F$, E — множество точек $x \in X \setminus F$, для которых число компонент группы G_x больше s. Доказывается, что если $(n-1)$-мерная группа гомологии по модулю 2 одноточечной бикомпактификации пространства X тривиальна, то $\dim E \leqslant n-2$. В случае, когда X — дифференцируемое n-мерное многообразие и G действует дифференцируемым образом, этот результат был ранее получен Монтгомери, Замельсоном и Яном (РЖМат, 1958, 3615). А. Л. Онищик

3644. Некоторые теоремы о группах преобразований. Бредон (Some theorems on transformation groups. Bredon Glen E.), Ann. Math., 1958, **67**, № 1, 104—118 (англ.)

Пусть G — конечномерная локально компактная топологическая группа, эффективно действующая на хаусдорфовом пространстве X. Орбита точки $x \in X$ называется локально связной относительно G, если каждая окрестность единицы в G содержит такую окрестность единицы v, что орбита точки x под действием v локально связна. Если X — связное многообразие, то G является группой Ли тогда и только тогда, когда все орбиты локально связны относительно G. В случае, когда X — метрическое пространство, а G обладает тем свойством, что из каждого ее открытого покрытия можно выбрать счетное покрытие, из локальной связности орбиты вытекает ее локальная связность относительно G. Отсюда выводится, что если компактная группа G эффективно действует на n-мерном связном многообразии X и если все орбиты наивысшей размерности локально связны, то G — группа Ли. Далее, если при тех же предположениях относительно G и X существует $(n-1)$-мерная орбита или если существует $(n-2)$-мерная орбита, но нет $(n-1)$-мерных, то G — группа Ли. Наконец, доказывается, что всякая локально компактная группа, эффективно действующая на связном трехмерном многообразии, есть группа Ли.

А. Л. Онищик

3645. Гомологии p-й циклической степени конечного комплекса (p — простое нечетное число). Иосиока (L'homologie du produit cyclique d'ordre p d'un complexe fini (p premier impair). Yoshioka Tsunéo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 1, 32—37 (франц.)

Автор вычисляет целочисленные группы гомологий p-й циклической степени конечного полиэдра (p — простое нечетное число). Указываются базы этих групп гомологий и формулы, позволяющие вычислить числа Бетти и коэффициенты кручения циклической степени полиэдра через числа Бетти и коэффициенты кручения полиэдра. Для $p = 2$ соответствующие результаты были получены Стейном (РЖМат, 1955, 3124). А. С. Шварц

3646. О невозможности расслоения некоторых многообразий на компактные слои. Коннер (On the impossibility of fibring certain manifolds by a compact fibre. Conner P. E.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 3, 249—255 (англ.)

Пусть M^n — замкнутое односвязное многообразие, W^n — открытое многообразие, получающееся из M^n удалением одной точки. Автор доказывает, что всякое расслоение многообразия W^n на компактные слои тривиально (т. е. слой такого расслоения состоит из единственной точки). Ранее этот результат был известен в случае, когда многообразие M^n является n-мерной сферой (Borel и Serre, C. r. Acad. sci., 1950, **230**, 2258—2260). В доказательстве этой теоремы используется следующее предложение, принадлежащее Мостову и впервые публикуемое в реферируемой статье: Если на компактном ориентируемом многообразии M^n действует периодическое преобразование T простого периода p, то преобразование T не может иметь точно одну неподвижную точку. А. С. Шварц

3647. Некоторые свойства ($n-1$)-мерных многообразий в n-мерном пространстве. Тао (Some properties of $(n-1)$-manifolds in n-space. Tao Junzo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 2, 92—95 (англ.)

Топологическое многообразие M^m (с краем или без края), лежащее в евклидовом пространстве R^n, называется нормально расположенным, если на нем существует непрерывное поле трансверсальных $(n-m)$-мерных плоскостей (плоскость H^{n-m} называется трансверсальной к M^m в точке $x \in M^m$, если существует такая окрестность этой точки в M^m и такое $\varepsilon > 0$, что всякая прямая, проходящая через две точки окрестности, образует с H^{n-m} угол, больший ε). Если M^m расположено в R^n полиэдрально и звезда каждой вершины расположена в R^n нормально, то расположение многообразия M^m называется локально нормальным. Доказывается, что при $m=n-1$ локально нормальное расположение всегда является нормальным. На основании известных теорем Уитни (Ann. Math., 1936, **37**, 865—878) и Кэрнса (Ann. Math., 1940, **41**, 796—808) отсюда выводится, что в случае локально нормального расположения многообразие M^{n-1} может быть аппроксимировано гомеоморфным ему аналитическим многообразием и может быть включено в аналитическое однопараметрическое семейство таких многообразий, заполняющее окрестность многообразия M^{n-1} в R^n. В тех же предположениях для M^{n-1} определяется и изучается интегральная кривизна.

Подробное изложение см. в Osaka Math. J., 1958, **10**, № 1, 137—146. В. А. Рохлин

3648. Асимптотические циклы. Шварцман (Asymptotic cycles. Schwartzman Sol), Ann. Math., 1957, **66**, № 2, 270—284 (англ.)

Работа является попыткой применить алгебраическую топологию в топологической динамике. Показывается роль первой группы Бетти пространства. Рассматривается топологическая группа преобразований (X, G, π) (РЖМат, 1957, 2971). Пространство X предполагается компактным метрическим. G — аддитивной группой вещественной прямой в обычной топологии; π — отображение $X \times G \to X$, $C(X)$ означает множество всех непрерывных комплекснозначных функций f на X по модулю равных 1; $R(X) \subset C(X)$ — множество функций, представимых в форме $\exp(2\pi i H(x))$ с непрерывной и вещественной $H(x)$; $\Delta_{(p,\,pt)} \arg f$ — угловое изменение $f(x)$ вдоль орбиты от p; до pt.

Для каждой квазирегулярной точки $p \in X$ отображение

$$f(x) \to \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{2\pi t} \Delta_{(p,\,pt)} \arg f$$

определяет гомоморфизм $C(X)/R(X)$ в вещественную

прямую, который можно распространить в линейный функционал A_p на первой группе когомологий Чеха с вещественными коэффициентами. Инвариантной нормированной мере μ также сопоставляется линейный функционал A_μ, являющийся средним значением функционалов A_p относительно меры μ: $A_\mu(f) = \int_X A_p(f)\,d\mu(p)$. Если первое число Бетти конечно, то функционалам A_p и A_μ соответствуют элементы первой группы гомологий. Они называются (p)-асимптотическим и (μ)-асимптотическим циклами и показывают соответственно, как орбита точки p вьется в X и как „средняя" орбита вьется в X.

В некоторых случаях можно вычислить A_μ без решения дифференциальных уравнений. В случае потоков на торе коэффициенты асимптотического цикла орбиты являются числами вращения Пуанкаре. Если f — собственная функция потока, то $A_\mu(f)$ равно собственному значению этой функции. Поток имеет сечение тогда и только тогда, когда $A_\mu(f) > 0$ для любой положительной инвариантной меры μ. Как приложение рассматриваются гамильтоновы потоки на дифференцируемом многообразии.

И. Н. Врублевская

3649 К. Пучки и теория когомологий. Хирцебрух, Шейя (Garben- und Cohomologietheorie. Hirzebruch F., Schej-a Günter. Münster, Aschendorff, 1957, 236 S., 25.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 38, 2760 (нем.)

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

3650. Интеграл Лебега. Деэвель (L'intégrale de Lebesgue. Deheuvels R.), Ann. Inst. Fourier, 1957, **7**, 383—393 (франц.)

Краткое изложение теории абстрактного интеграла Лебега. Предварительно интеграл определяется для линейных комбинаций характеристических функций множеств того кольца, на котором задана мера; после этого, пользуясь порожденной ею внешней мерой, сходимостью в среднем и сходимостью почти всюду последовательностей функций упомянутого вида, автор строит общее определение интеграла Лебега, без введения понятия измеримой функции. П. И. Романовский

3651. Некоторые вопросы, касающиеся точек Лебега. У Цун-синь, Хань Цзянь-шу, Хаэрбинь гун-е дасюэ сюэбао, Тр. Харбинск. политехн. ин-та, 1958, № 1, 48—51 (кит.)

Теорема 1. Для того чтобы x_0 была точкой Лебега измеримой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного числа $\varepsilon > 0$ имело место соотношение

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}[\varepsilon+(n-1)]\,\mathrm{mes}\,H_n(x_0,\ \varepsilon,\ \delta)}{\delta}=0,$$

где

$$H_n(x_0,\ \varepsilon,\ \delta)=\{x\,|\,\varepsilon+n>|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon+(n-1),\ |x-x_0|\leqslant\delta\}.$$

Отсюда выводится несколько следствий. Так, например, для измеримой и почти везде конечной функции точка аппроксимативной непрерывности совпадает с точкой Лебега.

Теорема 2. Для того чтобы измеримая функция $f(x)$ была равномерно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}f(x+t)\,dt=f(x)$$

равномерно выполнялось для всех x.

Это же условие является необходимым и достаточным для того, чтобы множество измеримых функций $\{f(x)\}$ было равностепенно непрерывно (здесь условие должно выполняться равномерно не только для x, но и для любой $f(x)\in\{f(x)\}$). Ши Чжун-цы

3652. Обобщение лемм Марцинкевича и Файна с приложением к сингулярным интегралам. Остроу, Стейн (A generalization of lemmas of Marcinkiewicz and Fine with applications to singular integrals. Ostrow E. H., Stein E. M.), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, **11**, № 3-4, 117—135 (англ.)

Пусть P — замкнутое подмножество сегмента $[0,2\pi]$ и $D(x)=\rho(x,P)$ — расстояние точки $x\in[0,2\pi]$ до множества P, и пусть $\mu(t)$ — положительная мера в $[0,2\pi]$.

В работе доказывается, что если функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}d\mu(t)\leqslant A,\ 0<\tau<2\pi,\qquad(1)$$

то величина

$$I_\mu(x)=\int_0^{2\pi}\frac{D(x+t)}{t^2}\,d\mu(t)$$

является конечной почти для всех $x\in P$.

Отсюда при специально выбранных мерах $\mu(t)$ получаются леммы Марцинкевича (Marcinkiewicz J., J. London Math. Soc., 1935, 10, 264—268) и Файна (РЖМат, 1956, 4604).

Применяя этот результат, авторы устанавливают, что если $F(t)$ — периодическая функция, $F(t)\in L^2(0,2\pi)$, $F'(t)$ существует на множестве E положительной меры и $\mu(t)$ удовлетворяет (1), то интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{[F(x+t)-2F(x)+F(x-t)]^2}{t^3}\,d\mu(t)$$

конечен почти всюду в E.

Доказывается, что если $F(t)$ периодическая, $F(t)\in L(0,2\pi)$, $F'(t)$ существует на множестве E положительной меры и $\mu(t)$ удовлетворяет (1), то предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{F(x+t)-2F(x)+F(x-t)}{t^2}\,d\mu(t)$$

существует и конечен для почти всех $x\in E$. А. В. Ефимов

3653. О существовании интеграла Беркилла. Кобер (On the existence of the Burkill integral. Kober H.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 115—121 (англ.)

Пусть R_n есть n-мерный куб из n-мерного евклидова пространства E_n и для любого n-мерного интервала $I\subset R_n$ определена действительная функция $f(I)$. Пусть $I=\sum_{k=1}^{m}I_k$, $I_i\cdot I_j=0$, $i\neq j$. Тогда будем писать $\mathfrak{S}(I)=\sum_{k=1}^{m}I_k$, а $f(\mathfrak{S})=\sum_k f(I_k)$. Если $\delta(I_k)$ есть диаметр I_k, то $\|\mathfrak{S}\|=\max\{\delta(I_k)\}$. Верхний и нижний интегралы Беркилла определяются соответственно формулами

$$\overline{B}(f,R)=\overline{\lim_{\|\mathfrak{S}\|\to 0}}\,f(\mathfrak{S}),$$

$$\underline{B}(f, R) = \lim_{|\mathfrak{S}| \to 0} f(\mathfrak{S}),\ \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(R).$$

Если $\overline{B} = \underline{B}$, то $f(I)$ интегрируема в смысле Беркилла. Функция интервала $f(I) \subset S\,A$, если для любого $R \subseteq R_n$ имеем

$$f(\mathfrak{S}) \geqslant f(R), \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(R).$$

Функция интервала $f(I)$ называется бесконечно мало аддитивной на $R \subset R_n$, если для любого $(n-1)$-мерного интервала $i \subset R$ имеем $f(I_1) + f(I_2) - f(I) \to 0$ при $|I| \to 0$, когда $I_1 \cdot I_2 = i$ и $I = I_1 + I_2 \subset R$.

Теорема 1. $f(I)$ интегрируема в смысле Беркилла, если 1) $f(I) \subset S\,A$; 2) $\overline{B}(|f|, R_n) < \infty$; 3) $f(I)$ есть бесконечно мало аддитивная на R_n.

Пусть $C\{x_1(t), \ldots, x_m(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant a$, $x_i(0-) = x_i(0)$; $x_i(a+) = x_i(a)$ есть кривая в n-мерном пространстве E_n. Кривая C называется нормальной, если все $x_i(t)$ с ограниченной вариацией на $(0, a)$ и

$$x_i(t) = \rho_i\, x_i(t-) + (1 - \rho_i)\, x_i(t+),$$
$$0 \leqslant \rho_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, m.$$

Пусть $F(I) = \left\{\sum_{i=1}^{m} (x_i(I))^2\right\}^{1/2}$, $I = (t_1, t_2) \subset R = (0, a)$, $x_i(I) = x_i(t_2) - x_i(t_1)$.

Теорема 3. Функция интервала $F(I)$ интегрируема в смысле Беркилла тогда и только тогда, когда C есть нормальная кривая. А. Г. Джваршейшвили

3654. Некоторые замечания к теории меры и интеграла. Мишик (Poznámky k teórii miery a integrálu. Mišík Ladislav), Mat.-fyz. časop., 1958, 8, № 2, 81—102 (словацк.; рез. русск., нем.)

Проводится исследование интеграла Даниеля (D-интеграла) и пространства D-интеграла. Изучается структура минимального σ-расширения пространства D-интеграла, а также предлагается метод построения по D-интегралу пространства с мерой в случае, когда пространство D-интеграла может и не быть полным σ-пространством. Л. М. Абрамов

3655. О сходимости последовательности произвольных функций к непрерывной функции. Шандор (Sur la convergence vers une fonction continue d'une suite de fonctions arbitraires. Sandor Stefan), Rend. mat. e. applic., 1957, **16**, № 3-4, 430—446 (франц.)

Последовательность действительных функций $\{f_n(x)\}$, определенных в интервале I, сходится почти непрерывно в точке $\bar{x} \in I$ $\left(\{f_n(x)\} \xrightarrow[\bar{x} \in I]{\text{p. c.}}\right)$, если для всякой последовательности $\{x_n\} \to \bar{x}$ существует такая монотонная последовательность натуральных чисел ν_k, что для всякой последовательности $\{n_k\}$, $n_k \geqslant \nu_k$

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x_k)$$

существует и не зависит от последовательности n_k.

Понятие непрерывной сходимости, введенное Ханом (приведено в РЖМат, 1958, 217), и понятие почти непрерывной сходимости не эквивалентны. Первое влечет второе, но не наоборот.

Для того чтобы предел сходящейся на I последовательности функций $f_n(x)$ был непрерывен в точке $\bar{x} \in I$, необходимо и достаточно, чтобы $\{f_n(x)\} \xrightarrow[\bar{x} \in I]{\text{p. c.}}$.

Предложение $\mathfrak{A}$: $\{f_n(x)\} \xrightarrow[\bar{x} \in I]{\text{p. c.}}$ эквивалентно предложению $\mathfrak{B}$:

1) существует окрестность $V_{\bar{x}}$ точки $\bar{x}$, в которой существуют $\overline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \overline{f}(x)$ и $\underline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \underline{f}(x)$ (оба они конечны);

2) $\overline{f}(\bar{x}) = \underline{f}(\bar{x})$;

3) функции $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ непрерывны в $\bar{x}$.

Последовательность функций $f_n(x)$, определенных на отрезке I, равностепенно почти непрерывна в точке $\bar{x} \in I$, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такая окрестность $V_{\bar{x}}$ точки $\bar{x}$, что для любого $x \in V_{\bar{x}}$ существует такое $N = N(\varepsilon, x)$, что для $n > N$

$$|f_n(x) - f_n(\bar{x})| < \varepsilon\ (\{f_n(x)\} \in \{\text{é·p·c.} \mid \bar{x}\}).$$

Каждое из предложений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентно предложению $\mathfrak{C}$:

1) Последовательность $f_n(\bar{x})$ сходится,

2) $\{f_n(x)\} \in \{\text{é·p·c.} \mid \bar{x}\}$.

Справедлива следующая теорема типа Арцела:

Для того чтобы последовательность $\mathfrak{M}$ функций, определенных на I, содержала последовательность $\{f_n(x)\}$, почти непрерывно сходящуюся в $\bar{x} \in I$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ содержала последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, равностепенно почти непрерывную в $\bar{x}$ и ограниченную (но не равномерно) в каждой точке окрестности $V_{\bar{x}}$.

Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, почти непрерывно сходящаяся в точке $\bar{x} \in I$, непрерывно сходилась в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы $f_n(x)$ сходилась равномерно в $\bar{x}$.

Для того чтобы последовательность функций $f_n(x)$, определенных на I, сходилась на I к функции $f(x)$, обладающей свойством Бэра, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество первой категории A, что последовательность $f_n(x)$ будет сходиться в точках множества $I - A$ почти непрерывно относительно $I - A$.

Для того чтобы последовательность функций $f_n(x)$, определенных на I, сходилась на I к измеримой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество сколь угодно малой меры A, что $f_n(x)$ будет сходиться в точках множества $I - A$ почти равномерно относительно этого множества.

Все эти теоремы остаются справедливыми для функций на произвольных множествах, лежащих на действительной оси.

Некоторые из них могут быть сформулированы при более общих условиях относительно множеств определения и множеств значений функций. Б. М. Гагаев

3656. Существование инвариантного множества, состоящего из двух точек, при некоторых непрерывных отображениях отрезка в себя. Мышкис А. Д., Лепин А. Я., Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1957, вып. 32, 29—32

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, причем $f(x) \not\equiv x$ на отрезке $[c, d] \subseteq [a, b]$. Пара точек x_1 и x_2 называется циклом на $[c, d]$, если $c \leqslant x_1 < x_2 \leqslant d$, $f(x_1) = x_2$ и $f(x_2) = x_1$. Каждое из следующих двух условий достаточно для существования цикла на $[c, d]$:

1) $f[f(c)] \geqslant c$, $f[f(d)] \leqslant d$, $f(c) \leqslant d$, $\max_{c \leqslant x \leqslant x_0} f(x) \geqslant x_0$ и $\min_{x_0 \leqslant x \leqslant d} f(x) \leqslant x_0$ для $c \leqslant x_0 \leqslant d$;

2) $c = \underline{\lim}\, x^i$, $d = \overline{\lim}\, x^i$,

где последовательность x^i $(i = 1, 2, \ldots)$ расходится, $a \leqslant x^i \leqslant b$, $x^{i+1} = f(x^i) + \varepsilon^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $\lim_{i \to \infty} \varepsilon^i = 0$.

На стр. 29, в строке 20 снизу, имеется опечатка: должно быть $f((\beta, \gamma])$ вместо $f([\beta, \gamma])$. З. Л. Лейбензон

3657. О неравенствах между верхними гранями функции и ее двух любых производных на полупрямой. Оловянишников В. М., Тр. Моск. автомоб.-дор. ин-та, 1957, вып. 20, 235—238

Для произвольной функции, имеющей n последовательных производных, ограниченных на полупрямой, справедливо неравенство (Gorny A., Acta math., 1939, 71, 317—358) $M_k^n \leqslant P_{nk}^n M_0^{n-k} M_n^k$, где $P_{nk} = 4e^{2k}\left(\frac{n}{k}\right)^k$, а $M_k = M_k(f) = \sup\limits_{x>0} |f^{(k)}(x)|$.

Автор показывает, что P_{nk} можно заменить константой

$$Q_{nk} \leqslant P_{nk},\ Q_{nk}^n = \frac{K_{nk}^n}{K_{nn}^k},$$

$$K_{nk} = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!} = T_n^{(k)} \quad (1)$$

($T_n(x)$ — n-ый полином Чебышева). Для $n < 4$ константа Q_{nk} — точная. Доказательство основано на экстремальных свойствах полиномов Чебышева. А. М. Родов

3658. Построение некоторых действительных функций от n переменных, обладающих интересными свойствами. Четкович (Формиранье неких реалних функција од коначно много променљих необичних особина. Четковић Симон), Весн. Друштв. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 3-4, 169—182 (сербохорв.; рез. франц.)

Изучаются функции $F_{ab}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равные нулю в точках с иррациональными координатами, равные Q^{-a} в точках, среди координат которых есть как иррациональные, так и рациональные числа, и равные q^{-b} в точках с рациональными координатами; здесь Q — наибольший из знаменателей рациональных координат (представленных несократимыми дробями), а q — наименьший из них, $a > 2$, $b \leqslant 1$ или $b > 2$.

1) Для $b \leqslant 0$ F_{ab} всюду разрывна; на всюду плотном множестве точек имеет все частные производные первого порядка, которые в каждой точке этого множества разрывны; для каждой заданной группы переменных существует такое всюду плотное множество, что на нем F_{ab} имеет частные производные первого порядка по каждой переменной этой группы, и только по ним, и эти частные производные разрывны.

2. Для $0 < b \leqslant 1$ F_{ab} разрывна на всюду плотном множестве; непрерывна на всюду плотном множестве, но не имеет в точках этого множества частных производных; непрерывна на всюду плотном множестве и имеет в точках этого множества частные производные; непрерывна на всюду плотном множестве, и имеет в точках этого множества частные производные по одним произвольно выбранным переменным, но не имеет их по другим; нигде не дифференцируема.

3. Для $b > 2$ F_{ab} разрывна на всюду плотном множестве; непрерывна на всюду плотном множестве, но не имеет в точках этого множества частных производных; непрерывна на всюду плотном множестве и имеет в точках этого множества частные производные по одним произвольно выбранным переменным, но не имеет их по другим; на всюду плотном множестве дифференцируема. В. И. Левин

3659. Об интеграле от почти периодической функции. Каракоста, Досс (Sur l'intégrale d'une fonction presque périodique. Caracosta Georges, Doss Raouf), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 23, 3207—3208 (франц.)

Исходя из классов почти периодических функций Во Бора и S Степанова (суммируемых), авторы изучают интегралы функций этих классов, которые образуют соответственно новые классы I_{Bo} и I_S. По определению, $F(x) \in I_{\text{Bo}}$, если $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, где $f(x) \in$ Bo; аналогично, $F(x) \in I_S$, если $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, где $f(x) \in S$.

Теорема. Необходимое и достаточное условие того, что $F(x) \in I_{\text{Bo}}$, состоит в выполнении следующих условий: 1) dF/dx равномерно непрерывна, 2) $[F(x+\delta) - F(x)] \in$ Bo для любого δ.

Пусть $\overline{I}_{\text{Bo}}^{\text{Bo}}$ есть замыкание класса I_{Bo} в смысле равномерной сходимости.

Теорема. Необходимое и достаточное условие того что $F(x) \in \overline{I}_{\text{Bo}}^{\text{Bo}}$, состоит в следующем: 1) $F(x)$ равномерно непрерывна, 2) $[F(x+\delta) - F(x)] \in$ Bo при любом δ.

Теорема (Иные условия). Необходимое и достаточное условие того, что $F(x) \in \overline{I}_{\text{Bo}}^{\text{Bo}}$, состоит в следующем: $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \varphi(x)$, где $f(x) \in$ Bo и $\varphi(x) \in$ Bo. Алгебраически последняя теорема записывается так:

$$\overline{I}_{\text{Bo}}^{\text{Bo}} = I_{\text{Bo}} + \text{Bo}.$$

Аналогично строятся замыкания $\overline{I}_S^{\text{Bo}}$ и $\overline{I}_S^S$ для класса I_S соответственно для случая равномерной сходимости и сходимости в смысле метрики Степанова:

$$D_S(f, \varphi) = \sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{x+1} |f - \varphi| dt.$$

Для них имеет место теорема, выражаемая следующими равенствами: $\overline{I}_S^{\text{Bo}} = \overline{I}_{\text{Bo}}^{Bo} = I_{\text{Bo}} + \text{Bo} = I_S + \text{Bo}$,

$$\overline{I}_S^S = \overline{I}_{\text{Bo}}^S = I_{\text{Bo}} + S = I_S + S.$$

Для частного случая S-функций, а именно для функций RS (Римана—Степанова (РЖМат, 1957, 3003)), рассматриваются замыкания $\overline{I}_{RS}^{\text{Bo}}$ и $\overline{I}_{RS}^{RS}$ соответственно в смысле равномерной сходимости и сходимости в смысле метрики: $D_{RS}(f, g) = \inf\limits_{r(x)} D_S(r(x), 0)$, где $r(x)$ — такой тригонометрический полином, что $|f(x) - g(x)| < r(x)$. Для указанных замыканий имеет место:

Теорема. $\overline{I}_{RS}^{\text{Bo}} = \overline{I}_{\text{Bo}}^{\text{Bo}} = I_{\text{Bo}} + \text{Bo} = I_{RS} + \text{Bo}$,

$$\overline{I}_{RS}^{RS} = \overline{I}_{\text{Bo}}^{RS} = I_{\text{Bo}} + RS = I_{RS} + RS.$$

А. С. Кованько

3660. Почти периодичность в смысле Чезаро—Перрона. Беркилл (The Cesàro—Perron scale of almost periodicity. Burkill H.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 28, 481—497 (англ.)

Данное в реферируемой статье определение почти периодичности тесно связано с предыдущими работами автора (Proc. London Math. Soc., 1935, **39**, 541—552; 1951, **53**, 32—42; 1952, **12**, 150—174) и основывается на обобщении интеграла Данжуа—Перрона.

Используются следующие обозначения:

$$\Delta^r\{f(x); h\} = \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-1)^{r-i} f(x+ih),$$

$$f_r(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots dx_{r-1} \int_0^{x_{r-1}} f(t)\,dt$$

(где $f(x)$ интегрируема в смысле Данжуа—Перрона). Вводится метрика:

$$D_{C_rP}[f, g] = \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty,\\ 0\leqslant h\leqslant 1}} \left| \int_x^{x+h} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+h} dx_2 \dots \right.$$
$$\left. \dots dx_r \int_{x_r}^{x_r+h} [f(t)-g(t)]dt \right|.$$

Она обладает, в частности, следующими свойствами: 1) $D_{C_rP}[f, g] \geqslant D_{C_{r+1}P}[f, g]$, 2) если $D_{C_rP}[f, g]=0$, то $f=g$ почти всюду.

Функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется C_rP почти периодической (C_rP п.п.), если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, существует относительно плотное множество чисел $\{\tau\}$ (почти периодов) таких, что

$$D_{C_rP}[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

Свойства C_rP п.п. функций:
1) Если $f(x)$ является C_rPп.п., то $f(x)$ будет C_sP п.п. для $s>r$.
2) Если $f(x)$ является C_rP п.п., то, как бы мало ни было $h>0$, $\Delta^s\{f_s(x); h\}$ будет $C_{r-s}P$п.п. для $s=1, 2, \dots, r$ и $\Delta^{r+1}\{f_{r+1}(x); h\}$ — почти периодическая в смысле Бора.
3) Предел последовательности C_rPп.п. функций в смысле метрики D_{C_rP} есть функция C_rPп.п.

4) Если $f(x)$ есть $C_{r-1}P$ п. п., то $\Delta^r\{f_r(x); h\} = \varphi(x, h)$ есть непрерывная функция в области $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant h\leqslant 1$.

Из 4) следует, что $\Delta^r\{f_r(x); h\} \underset{h\to 0}{\to} 0$ равномерно относительно x.

Функция $\Phi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ называется Δ^r-непрерывной в точке x, если $\Delta^r\{\Phi(x); h\}\to 0$ при $h\to 0$ (в частности, равномерно относительно x) (при $r=1$ обычная непрерывность). Функция $\Phi(x)=x^k$ будет равномерно Δ^r-непрерывной функцией на $(-\infty<x<\infty)$, если $k\leqslant r$, но неравномерно непрерывной в обычном смысле.

1. Если $\Phi(x)$ ограничена и равномерно Δ^r-непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то она равномерно непрерывна на $(-\infty, \infty)$.

2. Если $f(x)$ есть C_rP п. п. и непрерывная, то $f(x)$ будет почти периодической в смысле Бора.
Имеет место теорема аппроксимации.

3. Класс C_rPп.п. функций совпадает с замыканием в смысле метрики D_{C_rP} класса тригонометрических полиномов вида $\sum_1^n a_k e^{i\lambda_k x}$

Из этой теоремы как следствие вытекает, что сумма двух C_rPп.п функций есть C_rP п. п. функция и если $f(x)$ есть C_rP п. п., то $D_{C_rP}[f(x), 0] < \infty$.

4. Если $f(x)$ является $C_{r-1}P$ п. п., $u(x)$ есть п. п. в смысле Бора и $u'(x), \dots, u^{(r)}(x)$ ограничены, то $f(x)\,u(x)$ будет $C_{r-1}P$ п.п.

5. (Теорема о среднем). Если $f(x)$ есть $C_{r-1}P$ п. п., то существует предел

$$M_r\{f(x)\} = \lim_{X\to\infty} \frac{r}{X^r} \int_0^X (X-x)^{r-1} f(x)dx = \lim_{X\to\infty} \frac{r!}{X^r} f_r(X).$$

Из двух последних теорем следует, что существует $A(\lambda) = M_r\{f(x)e^{-ix\lambda}\}$.
Показывается, что множество значений λ, для которых $A(\lambda)\neq 0$, не более чем счетное. Это множество образует спектр $f(x)$, а соответствующие $A(\lambda)$ — коэффициенты Фурье $f(x)$. Строится ряд Фурье и доказывается для него теорема единственности (с точностью до множества меры нуль). C_r-производной от $F(x)$ называется предел

$$\lim_{h\to 0} \Delta^r\{F(x); h\}/h^r = D_rF(x).$$

Имеет место почти всюду соотношение: $D_rf_r(x) = f(x)$.

6. Если $f(x)$ есть $C_{r-1}P$п.п. и существует почти всюду конечная $D_rf(x)$, то $f(x)$ является C_rP п. п.

7. Если $f(x)$ есть C_rPп.п., то необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f_1(x)$ была $C_{r-1}P$ п. п., состоит в равномерной непрерывности функции $h\,\Delta^r\{f_{r+1}(x); h\}$ на области $0\leqslant h\leqslant 1$ при любом x. А. С. Кованько

3661. О квадратичном приближении функций с их производными. Паулаускас (Apie funkciju ir ju išvestiniu kvadratini aproksimavima. Paulauskas V.), Уч. зап. Вильнюсск. ун-та. Сер. матем., физ. и хим. н., Mokslo darbai. Vilniaus univ. Matem., fiz. ir chem. mokslu ser., 1957, 7, 5—12 (лит.; рез. русск.)

Отыскивается минимум выражения

$$I_n = \sum_{m=0}^{s} \int_a^b P_n^{(m)}(x) - f^{(m)}(x)|^2 \psi_m(x)\,dx,$$

где $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k u_k(x)$, $u_k(x)$ образуют ортогональную систему с весом $\psi_0(x)$, а их производные $u_k^{(m)}(x)$ ортогональны относительно весов $\psi_m(x)$ $(m=1, 2, \dots, n$; $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ не отрицательны при $a\leqslant x\leqslant b)$; $f(x)$ — данная функция, имеющая производные до порядка n включительно.

Доказывается, что собственные функции уравнения

$$(a_0x^2+a_1x+a_2)\frac{d^2u_k(x)}{dx^2} + (b_0x+b_1)\frac{du_k(x)}{dx} = \lambda_k u_k(x),$$

приводимого к самосопряженному виду

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_k(x)}{dx}\right] = \lambda_k r(x)\,u_k(x)$$

с краевыми условиями

$$\frac{p^{m+1}(x)}{r^m(x)} \cdot \frac{d^{m+1}u_k(x)}{dx^{m+1}} \cdot \frac{d^m u_k(x)}{dx^m}\Bigg|_a^b = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

образуют ортогональную систему с весом $\psi_0(x) = p(x)$, а производные $u_k^{(m)}(x)$ — ортогональные системы с весами

$$\psi_m(x) = \frac{p^m(x)}{r^{m-1}(x)} \qquad (m = 1, 2, \dots).$$

Для многочленов Лежандра, Якоби, Гегенбауера, Чебышева, Чебышева второго рода, обобщенных многочленов Лагерра и многочленов Эрмита вычислены веса $\psi_m(x)$ и нормы

$$h_n^{(m)} = \int_a^b \left(\frac{d^m u_n(x)}{dx^m}\right)^2 \psi_m(x)\,dx$$

производных любого порядка m многочленов $u_n(x)$.

Примечание референта. Доказываемая автором ортогональность $u_n^{(m)}(x)$ относительно веса $\psi_m(x)$ непосредственно следует из полученного им уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{p^{m+1}(x)}{r^m(x)} \cdot \frac{d^{m+1}u_k(x)}{dx^{m+1}}\right] = (\lambda_k - s_m)\frac{p^m(x)}{r^{m-1}(x)} \cdot \frac{d^m u_k(x)}{dx^m},$$

где $s_m = m(ma_0 - a_0 + b_0)$, и краевого условия (1).

Б. М. Гагаев

3662. Интерполирование на классах полиномов и неравенство А. А. Маркова. Стейн (Interpolation in polynomial classes and Markoff's inequality. Stein

Elias M.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 467—476 (англ.)

Положим $\tau_n^{(r)}(f) = \alpha_1^r \sigma_{n-1}^{(r)} + \alpha_2^r \sigma_{2n-1}^{(r)} + \ldots$ $\ldots + \alpha_{r+1}^r \sigma_{(r+1)n-1}^{(r)}$, где α_i^r — параметры, зависящие от n и r (n и r — целые неотрицательные числа), $\sigma_n^{(r)}$ — чезаровские средние r-го порядка $\{s_n(f)\}$ и $s_n(f) = \sum_0^n a_k \varphi_k(x)$ — частичные суммы Фурье разложения функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_k(x)$ ($k = 0,1,2,\ldots$).

В реферируемой работе доказывается, что существует набор параметров α_i^r ($i = 1,2, \ldots, r+1$), равномерно ограниченных относительно n, и целое число $N \geqslant 0$ такие, что: а) $\tau_n^{(r)}(f)$ — полином порядка $n(r+1)$, б) $\tau_n^{(r)}(f) \equiv f$, если f — полином порядка $n(n \geqslant N)$.

Суммы $\tau_n^{(r)}(f)$, которые удовлетворяют перечисленным требованиям, называются обобщенными усеченными средними r-го порядка, а суммы $s_n(f) = \sum_0^n a_k \varphi_k(x)$ — полиномами n-го порядка.

Ортонормальная система функций $\varphi_k(x)$ называется регулярной, если существует некоторое целое число r такое, что чезаровские средние r-го порядка обладают следующим свойством:

$\| \sigma_n^{(r)}(f) \|_{L_p} \leqslant A \| f \|_{L_p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где A не зависит ни от n, ни от f.

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — регулярная ортонормальная система функций и T — линейное преобразование, определенное на полиномах этой системы. Предположим, что имеются числа $p, p_1, p_2, \alpha, \beta, \gamma$ такие, что $1 \leqslant p_1 < p < p_2 \leqslant \infty$, $-\infty < \alpha, \beta, \gamma < \infty$, и параметр $t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, которые связаны соотношениями $1/p = (1-t)/p_1 + t/p_2$, $\gamma = (1-t)\alpha + \beta t$.

Пусть далее

$$\| T(f) \|_{L_{p_1}} \leqslant A_1 n^{\alpha} \| f \|_{L_{p_1}},$$

$$\| T(f) \|_{L_{p_2}} \leqslant A_2 n^{\beta} \| f \|_{L_{p_2}},$$

где f — полином n-го порядка.

Тогда $\| T(f) \|_{L_p} \leqslant A n^{\gamma} \| f \|_{L_p}$, где $A = B A_1^{1-t} A_2^t$ и B — постоянная, зависящая только от γ и системы функций $\varphi_k(x)$.

Метод доказательства этой теоремы основывается на понятии обобщенных усеченных средних и на интерполяционной теореме М. Рисса. Используя эту теорему и некоторые другие методы, автор получает ряд неравенств, которые по своему содержанию примыкают к неравенству А. А. Маркова или его обобщают.

Сформулируем эти результаты.

Пусть $\| f \|_{L_p} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \, dx \right)^{1/p}$, $L[f] = (1-x^2) f'' - [(\alpha-\beta) - (\alpha+\beta+2)x] f'$, где $\alpha, \beta > -1$, f — полином Якоби n-й степени.

Тогда $\| L(f) \|_{L_p} \leqslant A n^2 \| f \|_{L_p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Пусть далее $-1 \leqslant \lambda$, $-1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $1 \leqslant p$, r — целое $\geqslant 0$, $M[f] = (1-x^2) f''(x)$ и $f(x)$ — алгебраический полином степени n. Тогда:

$$\int_{-1}^{1} |f(x)| (1-x^2)^{\beta/2} \, dx \leqslant A_{\beta} n^{\alpha-\beta} \int_{-1}^{1} |f(x)| (1-x^2)^{\alpha/2} \, dx,$$

$$\int_{-1}^{1} |f'(x)| (1-x^2)^{r/2} \, dx \leqslant A_r n \int_{-1}^{1} |f(x)| (1-x^2)^{(r-1)/2} \, dx,$$

$$\int_{-1}^{1} |f'(x)|^p (1-x^2)^{\lambda/2} \, dx \leqslant A_{\lambda}^p n^{2p} \int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x^2)^{\lambda/2} dx,$$

$$\int_{-1}^{1} |M(f)|^p (1-x^2)^{\lambda/2} \, dx \leqslant A_{\lambda}^p n^{2p} \int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x^2)^{\lambda/2} \, dx,$$

где A_{β}, A_r, A_{λ} — постоянные, зависящие соответственно только от β, r и λ.

Г. К. Лебедь

3663. О понятии поверхностного интеграла. Чезари, Тернер (On the concept of surface integral. Cesari L., Turner L. H.), Proc. Nat. Acod. Sci. USA, 1958, **44**, № 1, 42—43 (англ.)

Рассматривается поверхность $S = (T, A)$, где A — допустимое множество евклидовой плоскости, а T — непрерывное отображение A в E_3. Через (T_r, A) $(r = 1, 2, 3)$ обозначаются ортогональные проекции (T, A) на соответствующие координатные плоскости.

Пусть S имеет конечную площадь в смысле Лебега. Для открытого в A множества $G \subset A$ обозначим через $V(T, G)$, $V(T_r, G)$, $V^+(T_r, G)$, $V^-(T_r, G)$ соответственно площадь (T, G), полную вариацию (или площадь) (T_r, G), полную положительную или отрицательную вариацию (T_r, G) в смысле Чезари.

Рассмотрим функцию $f(p, t)$, $p = (x, y, z)$, $t = (t_1, t_2, t_3)$, ограниченную и равномерно непрерывную на $T(A) \times R$, где R — единичная сфера $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$. Чезари определил (Cesari L., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1948, **13**, 78—117) поверхностный интеграл

$$J(T, A, f) = \int_S f(p, t)$$

как предел сумм вейерштрассовского типа.

В реферируемой работе вводится новое понятие поверхностного интеграла $H(T, A, f)$ следующим образом.

Пусть для множества K функция $\varphi(K)$ определена как $\inf V(T, G)$ по всем $G \supset K$ и $\varphi_r(K)$, $\varphi_r^+(K)$, $\varphi_r^-(K)$ — аналогичные функции множеств, определенные, соответственно для $V(T_r, G)$, $V^+(T_r, G)$, $V^-(T_r, G)$. Положим $\mathfrak{B}_r = \varphi_r^+ - \varphi_r^-$ $(r = 1, 2, 3)$. Из свойств мер φ следуют существование и B-измеримость производной Радона — Никодима $\theta_r = d\mathfrak{B}_r / d\varphi$. Если для $w \in A$ через $\theta(w)$ обозначить вектор-функцию $\theta(w) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, то можно определить

$$H(T, A, f) = \int_A f[p(w), \theta(w)] \, d\varphi.$$

Доказывается, что для любой функции $f(p, t)$, ограниченной и равномерно непрерывной на $T(A) \times R$, и любой поверхности $S = (T, A)$ конечной лебеговой площади поверхностные интегралы J и H существуют и имеет место равенство $J(T, A, f) = H(T, A, f)$.

Р. С. Гутер

3664. Граничные свойства функций, имеющих конечный интеграл Дирихле с весом. Вашарин А. А., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 5, 742—744

Рассматривается класс $W_{2(\alpha)}^k$, $k = 0, 1, 2\ldots$, $0 \leqslant \alpha < 1$, функций $f(x, y)$, определенных в некоторой плоской области G с достаточно гладкой границей Γ, для которых

$$D_{\alpha}^k(f) = \int_G \left[\sum_{\beta_1+\beta_2=k} \frac{k!}{\beta_1! \beta_2!} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}} \right)^2 \right]^{\alpha} dG < \infty,$$

где $\sigma = \sigma(P)$, $P = (x, y) \in G$, — положительная, $2k$ раз непрерывно дифференцируемая в области G функция такая, что если обозначить через $\rho(P)$ расстояние „по нормали" от точки $P \in G$ до границы Γ, то при некоторых положительных постоянных c_1 и c_2 имеет место

$$c_1 \rho(P) \leqslant \sigma(P) \leqslant c_2 \rho(P), \quad P \in G.$$

Через A_l^α, $l = 0, 1, \ldots$, обозначается класс 2π-периодических функций $\varphi(s)$, имеющих абсолютно непрерывные производные до порядка $l-1$, а l-я производная которых при любом $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi^{(l)}(s+h) - \varphi^{(l)}(s)|^2}{h^{2-\alpha}}\, ds\, dh < \infty.$$

Доказывается, что если $f \in W_{2(\alpha)}^k$, то $\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma \in A_{k-\lambda-1}^\alpha$, $\lambda = 0, 1, \ldots, k-1$ (n — направление нормали), и обратно, если на Γ задана система функций $\varphi_\lambda \in A_{k-\lambda-1}^\alpha$, $\lambda = 0, 1, \ldots, k-1$, то существует определенная на области G функция $f \in W_{2(\alpha)}^k$ такая, что $\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma = \varphi_\lambda$.

Далее показывается, что всякая минимизирующая интеграл $D_\alpha^k(f)$ последовательность функций $f \in W_{2(\alpha)}^k$ с фиксированными граничными значениями $\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma = \varphi_\lambda$, $\lambda = 0, 1, \ldots, k-1$, сходится в соответствующей метрике к функции того же класса $W_{2(\alpha)}^k$, которая является обобщенным решением уравнения Эйлера функционала $D_{2(\alpha)}^k$. При этом решение рассматриваемой краевой задачи для указанного дифференциального уравнения единственно в классе $W_{2(\alpha)}^k$.

Указанные результаты автора представляют собой развитие соответствующих исследований С. М. Никольского (РЖМат, 1955, 5034) и референта (РЖМат, 1959, 2676) и содержат в себе как частный случай (при $\alpha = 0$) соответствующие результаты В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого (РЖМат, 1957, 3147).

Примечание референта. В работе имеется небольшая неточность в формулировке утверждения, что функции минимизирующей последовательности сходятся в смысле $L_2(G)$ вместе со всеми своими производными до порядка k включительно. Для старших производных, т. е. для производных порядка k, это, вообще говоря, неверно. Для указанных производных это имеет место лишь для любой области G^* такой, что $\overline{G^*} \subset G$, а во всей области G это справедливо в несколько другой метрике, учитывающей вес $\sigma(P)$; тем самым указанная неточность не влияет на справедливость окончательных результатов, полученных автором. В работе имеются опечатки. Л. Д. Кудрявцев

3665 К. Измеримые и P-измеримые множества. Мера линейных множеств. Разреженность множеств меры нуль. Дюге (Ensembles mesurables et probabilisables. La mesure des ensembles linéaires. La raréfaction des ensembles de mesure nulle. Dugué Daniel. Paris, Dunod, 1958, XII, 82 p., ill.) (франц.)

Содержится краткое элементарное введение в теорию меры линейных множеств, изложенную в стиле первоначальных работ ее основателей Бореля и Лебега. Содержание глав: I. Основные понятия, относящиеся к линейным множествам. II. Мера множеств. III. Интеграл Лебега. IV. Обобщения меры. V. Разреженность множеств меры нуль. Работы Бореля. П. И. Романовский

3666 К. Интеграл Стилтьеса и его приложения. Гохман Э. Х. Гос. изд-во. физ.-матем. лит., 1958, 191 стр., 4 р. 80 к.

Дается детальное элементарное изложение теории интеграла Стилтьеса, определенного на основе понятия предела по Шатуновскому, и некоторых приложений интеграла Стилтьеса. Рассматриваемое определение интеграла Стилтьеса несколько шире классического и совпадает с ним в случае, когда функция, по которой интегрируют, непрерывна. Наименования глав книги: I. Функции ограниченной вариации. II. Интеграл Стилтьеса. III. Интеграл $\int f dg$ для случая, когда g есть вещественная функция ограниченной вариации. IV. Интеграл Лебега — Стилтьеса. П. И. Романовский

3667 К. Теория ортогональных рядов. Качмаж С., Штейнгауз Г., Перев. с нем. Ред. и доп. Н. Я. Виленкина. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 507 стр., 17 р. 50 к.

Эта книга, вышедшая первым изданием в 1935 г. представляет собой 6-й том серии монографий, выпущенной группой известных польских математиков. В оригинальном авторском тексте дано систематическое изложение обширной совокупности вопросов, связанных с ортогональными рядами. Эта часть книги состоит из 8 глав. Первая из них имеет вводный характер. В ней в очень сжатой форме, частично без доказательств, приводится ряд сведений из теории функций вещественной переменной и функционального анализа, используемых в дальнейшем изложении.

В гл. 2 дано определение ортогонального множества функций, сопровожденное разнообразными примерами (системы тригонометрические, Штурма — Лиувилля, Радемахера, Хара). Определяются понятия полноты (относительно некоторого пространства) и замкнутости (в некотором пространстве) системы функций, также проиллюстрированные рядом примеров. Вводятся понятия ортогонального ряда и ортогонального разложения (или ряда Фурье) некоторой функции. Глава заканчивается постановкой вопроса о наилучшей аппроксимации в метрике L_2 заданной функции с помощью линейных комбинаций функций данной ортонормальной системы и выяснением связи этого вопроса с замкнутостью упомянутой системы.

Гл. 3 посвящена теории ортогональных рядов в пространстве L_2. Здесь доказывается теорема об ортогонализации линейно независимых систем, а также устанавливаются некоторые результаты о возможности такого доопределения функций, заданных на некотором отрезке, на более длинный отрезок, которое превращает исходную систему в ортогональную. Возвращаясь к проблеме наилучшей аппроксимации функций, авторы дают ее полное решение и получают величину отклонения с помощью определителей Грама. Доказывается, что ортонормальная система не более чем счетна. Изучаются свойства полноты и замкнутости и доказывается, что для L_2 они равносильны. Доказывается теорема Рисса — Фишера, а также теорема Мюнтца о системах степеней. Глава заканчивается некоторыми замечаниями о тех особенностях, которые возникают при рассмотрении бесконечных интервалов. В качестве иллюстрации приведен известный пример Стилтьеса.

Гл. 4 посвящена различным конкретным ортонормальным системам. Изучаются многочлены Лежандра и Чебышева, тригонометрическая система, доказана равномерная разложимость любой непрерывной функции по функциям Хара, приводится аналогичная система Франклина, состоящая из непрерывных функций. Обстоятельно рассмотрена система Радемахера, относительно которой доказаны теоремы Радемахера, Колмогорова и Хинчина, причем полученным результатам дана и „вероятностная" интерпретация. Вводятся система Уолша и еще одна система комплекснозначных функций $\theta_n(t)$, связанная с некото-

рыми вероятностными вопросами. Вкратце рассмотрены многочлены Лагерра и Эрмита. Глава заканчивается стоящей несколько в стороне теоремой Штейнгауза об одном общем способе построения полных систем.

В гл. 5 изучаются вопросы сходимости ортогональных рядов в связи с поведением коэффициентов этих рядов (например, теорема Планшереля о стремлении к нулю коэффициентов почти всюду сходящегося ортогонального ряда по ограниченным функциям, теорема об эквивалентности свойств Кантора и Лузина — Данжуа и др.). Доказано несколько теорем о сходимости рядов Фурье. В частности, введено понятие функции Лебега для данной системы и получены некоторые критерии разложимости функции в терминах функции Лебега. Обстоятельно изучается проблема сходимости ряда Фурье почти везде. В частности доказана теорема Меньшова — Радемахера о том, что функция $\log^2 n$ является универсальной функцией Вейля, и теорема Меньшова о неулучшаемости этого результата. Устанавливается ряд предложений по поводу перестановок членов ортогональной системы. В той же главе многие теоремы о сходимости ортогональных рядов переносятся на случай суммируемости этих рядов при помощи методов Тёплица. Специально рассматриваются методы Чезаро и Абеля — Пуассона.

Гл. 6 посвящена рассмотрению свойств ортогональных рядов в пространствах, отличных от L_2. Главным образом здесь речь идет о пространствах C, M и L_p. Изучаются свойства полноты и замкнутости и, в частности, устанавливается связь полноты системы относительно некоторого пространства с ее замкнутостью в сопряженном пространстве. Доказываются принадлежащие Юнгу, Хаусдорфу и Риссу обобщения теоремы Рисса — Фишера и примыкающие сюда теоремы Пейли.

Изучаются условия того, чтобы заданный ряд был рядом Фурье функции заданного класса, и тесно связанный с этим вопрос о множителях, преобразующих ряды Фурье функций одного класса в ряды Фурье функций того же или другого класса (теория мультипликаторов). Рассматриваются некоторые особенности ортогональных рядов. Глава заканчивается рассмотрением так называемых мажорант и „множителей расходимости".

В гл. 7 излагается теория лакунарных ортогональных рядов. Определив лакунарную ортонормальную систему порядка $p > 2$ как такую, для которой всегда

$$\left\{\int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)\right|^p dt\right\}^{1/p} \leqslant C\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2},$$

где C не зависит от n и a_k (пример — система Радемахера), авторы обстоятельно изучают свойства таких систем. В частности, доказано, что они всегда неполны. Установлен ряд принадлежащих Банаху теорем об эквивалентных между собою свойствах лакунарных систем. Рассмотрены некоторые вероятностные применения теории.

Гл. 8 посвящена биортогональным системам и системам, ортогональным относительно какого-либо веса. Понятие биортогональности вводится в самом общем виде. Именно, биортогональной называется такая система пар $\{x_\alpha, U_\alpha\}$, где x_α — элементы некоторого пространства, а U_α — линейные функционалы в этом пространстве, для которой $U_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. В дальнейшем это понятие конкретизируется. Доказывается теорема о возможности биортогонализировать любую линейно независимую систему функций из L_p. Изучаются свойства разложений по биортогональным системам. В частности, это делается для случая, когда элементы системы принадлежат L_2 (это пространство самосопряжено). В заключительных разделах главы рассмотрены простейшие свойства многочленов, ортогональных относительно некоторого веса (рекуррентная формула, формула Кристоффеля — Дарбу, полнота, теорема разложения).

Богатство содержания и мастерское изложение давно уже сделали книгу классической и ее перевод был весьма желателен. Однако с момента выхода книги прошло более 20 лет и появилось много новых результатов. Поэтому весьма ценным добавлением явился написанный переводчиками Р. С. Гутером и П. Л. Ульяновым обзор (большей частью с подробными доказательствами) этих новых результатов.

§ 1 обзора посвящен критериям полноты и замкнутости ортогональных систем (теоремы Айенгара, Далзелла, Грейвса). Там же доказаны некоторые теоремы В. Я. Козлова о полных ортонормальных системах (ОНС) и Боаса — Полларда о пополнении неполных систем.

В § 2 излагаются некоторые результаты Марцинкевича и Д. Е. Меньшова о сходимости подпоследовательности частных сумм ортогональных рядов. Там же доказывается теорема Д. Е. Меньшова о возможности за счет перестановки членов ОНС превратить любую функцию $w(n) > 0$ $[w(+\infty) = +\infty]$ в функцию Вейля, а также некоторые другие теоремы о перестановках в ОНС. Излагаются некоторые результаты А. А. Талаляна об универсальных ортогональных рядах.

В § 3 приведены теоремы П. Л. Ульянова, в которых доказано, что некоторые результаты А. Н. Колмогорова и референта о сходимости почти всюду рядов по ортогональным многочленам сохраняются и при перестановках этих многочленов. В § 4 излагаются результаты С. Б. Стечкина и Фрёйда об абсолютной сходимости ортогональных рядов. В § 5 доказываются теоремы Д. Е. Меньшова и Алексича о суммируемости ортогональных рядов. Специально различным свойствам коэффициентов ортогональных разложений посвящен § 6. В § 7 дан обзор теорем Алексича, Галя и Реньи о лакунарных рядах. В § 8 излагаются исследования Н. К. Бари об устойчивости тех или иных свойств ОНС. В § 9 изучаются базисы в L_2, являющиеся обобщением ОНС. Здесь нашли место некоторые результаты Н. К. Бари, И. М. Гельфанда, К. И. Бабенко, М. Ш. Альтмана и др.

§ 10 посвящен „почти ортогональным" системам, т. е. системам $\{\Phi_n(x)\} \subset L_2(a, b)$, для которых

$$\int_a^b \Phi_n^2\, dx = 1, \quad \sum_{m \neq n} \left(\int_a^b \Phi_m \Phi_n\, dx\right)^2 < +\infty.$$

Эти системы изучались Белманом, распространившим на них многие теоремы об ОНС. Наконец, в § 11 излагаются различные свойства некоторых конкретных систем ОНС.

Заканчивается книга статьей редактора Н. Я. Виленкина, состоящей из двух параграфов. § 1 посвящен теории мультипликативных систем функций. Здесь излагаются некоторые старые результаты Хара и более новые результаты автора, относящиеся к случаю периодических мультипликативных систем. В § 2 изучаются так называемые „ортогональные ядра", представляющие собой континуальные аналоги ОНС. И. П. Натансон

3668 Д. О базисах в банаховых пространствах и некоторых их обобщениях. Гапошкин В. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

3669. О разложении евклидова пространства на однородные множества. Эрдёш, Маркус (Sur la décomposition de l' espace euclidien en ensembles homogènes. Erdös P., Marcus S.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 443—452 (франц.)

Множество E точек евклидова пространства называется однородным, если, каковы бы ни были точки X и Y этого множества, параллельный перенос XY преобразует E в себя.

Не существует никакого разложения евклидова пространства на конечное число > 1 непустых, попарно не пересекающихся однородных множеств.

Если $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ и $\bigcup_l E_l$ есть разложение прямой на бесконечное мощности $\mathfrak{m}$ множество однородных, попарно не пересекающихся, конгруэнтных и неизмеримых по Лебегу множеств, то для любого измеримого множества E внешняя мера пересечения $E_l \cap E$, где E_l — любое множество этого разложения, равна мере множества E. Верен также дескриптивный аналог этой теоремы: если $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ и $\bigcup_l E_l$ есть разложение прямой на бесконечное мощности $\mathfrak{m}$ множество однородных, попарно не пересекающихся и конгруэнтных множеств, не обладающих свойством Бэра, то, каково бы ни было множество E, обладающее свойством Бэра, всякое множество, содержащееся в разности $E - E_l$, где E_l — любое множество разложения, необходимо первой категории.

Каково бы ни было кардинальное число $\mathfrak{m}$, $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$, существует разложение прямой на бесконечное мощности $\mathfrak{m}$ множество попарно не пересекающихся и конгруэнтных множеств, каждое из которых содержит совершенное подмножество и пересекается с каждым измеримым множеством E по множеству с внешней мерой, равной мере множества E.

Относительно разложения сегмента на конгруэнтные множества см. также реф. 3670. Б. С. Содномов

3670. О разложении сегмента на конгруэнтные множества и родственных проблемах. **Мыцельский** (On the decomposition of a segment into congruent sets and related problems. Mycielski Jan), Colloq. math., 1957, **5**, № 1, 24—27 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Если $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$, то каждый из промежутков (0,1), [0,1), [0,1] является суммой $\mathfrak{m}$ непересекающихся множеств мощности $2^{\aleph_0}$, конгруэнтных друг другу при смещении. Сформулированы некоторые родственные результаты относительно разложения промежутков и пространственных сфер на непересекающиеся множества, полученные в основном с помощью аксиомы выбора. Приведены также некоторые нерешенные проблемы аналогичного характера.

Относительно разложения прямой на конгруэнтные множества см. реф. 3669. Р. Ю. Мацкина

3671. Элементарная комбинаторная теорема с приложением к аксиоматической теории множеств. **Хайнал, Калмар** (An elementary combinatorial theorem with an application to axiomatic set theory. Hajnal András, Kalmár László), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 431—449 (англ.)

Рассматриваются упорядоченные последовательности (кортежи) $< x_1, \ldots, x_n >$ произвольных элементов, определяемые, как у Гёделя (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1), и операции вида $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, преобразующие кортеж из n элементов $\mathbf{A}$ в кортеж из n элементов $\mathbf{B}$. Доказывается следующая теорема: Каждая операция вида $x_p \to < x_1, \ldots, x_n >$ или $< x_p, x_q > \to < x_1, \ldots, x_n >$ $(n = 1, 2, \ldots; p, q = 1, \ldots, n; p \neq q)$ может быть получена с помощью итерации из операций следующих трех форм: $x \to < x, y >$, $< x, y > \to < y, x >$, $< x, y, z > \to < z, x, y >$.

С помощью этой теоремы устанавливается, что аксиома B8 системы Бернайса—Гёделя является следствием остальных аксиом этой системы. А. В. Гладкий

3672. О регрессивных функциях. **Курепа** (On regressing functions. Kurepa George), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1958, **4**, № 2, 148—156 (англ.)

Основным содержанием работы является следующая теорема (обобщающая теорему П. С. Александрова и П. С. Урысона (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, **31**, дополнительное замечание)): Пусть S — абстрактное множество мощности $\aleph_\mu$, где ω_μ не конфинально ω, и пусть f — однозначное отображение S в себя, а φ — однозначное отображение S в класс всех порядковых чисел, причем $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ $(x \in S, \varphi(x) > 0)$ и мощность $\varphi^{-1}(\alpha)$ меньше мощности регулярного числа, конфинального ω_μ $(\alpha \in \varphi(S))$; тогда существует такое $E \subseteq S$, что регулярное число, конфинальное $\varphi(E)$, равно регулярному числу, конфинальному ω_μ, и для любых x_1 и x_2 из E имеет место: $\varphi(f(x_1)) < \varphi(x_2)$, а если $\varphi(S) \subseteq W(\omega(S))$, то $\sup \varphi(E) = \omega(S)$.

Теорема Александрова—Урысона получается при $S = W_1 = W(\omega_1)$ и $\varphi(x) \equiv x$. Автор рассматривает другие специализации своей теоремы для случаев, когда S — деревья различных родов. И. И. Паровиченко

3673. О λ-размерности произведения порядков. **Хирагути** (On the λ-dimension of the product of orders. Hiraguchi Tosio), Sci. Repts Kanazawa Univ., 1957, **5**, № 1, 1—5 (англ.)

Понятие λ-размерности порядков пределяется следующим образом (порядком автор называет частичный порядок; обычный порядок он называет линейным порядком).

Пусть λ обозначает линейный порядок, определенный на множестве действительных чисел, упорядоченных по их возрастанию. Линейное расширение порядка P называется λ-расширением, если оно изоморфно подпорядку λ. λ-реализатором порядка P называется множество $R = \{L_s \mid s \in S\}$ λ-расширений L_s порядка P такое, что $P = \bigcap_S L_s$. λ-реализатор порядка P, имеющий наименьшую мощность, называется минимальным λ-реализатором. λ-размерностью порядка называется мощность его минимального реализатора.

λ-размерность порядка P обозначается через $D_\lambda[P]$.

Относительно λ-размерности порядка доказаны следующие теоремы:

1. Пусть A и S — счетные множества. Если L — линейный порядок, определенный на множестве A, то

$$D_\lambda[L^S] = \aleph_0.$$

2. Если S — счетное множество, то $D_\lambda[\lambda^S] = \aleph_0$.

3. Количественное произведение $\prod_S P_s$ системы счетного числа порядков, имеющих λ-размерность, имеет λ-размерность. Если при этом $R_s = \{L_{t(s)} \mid t(s) \in T_s\}$ — наименьший λ-реализатор P_s и Φ — множество всех отображений φ множества S в $\bigcup_S R_s$ таких, что $\varphi(s) \in R_s$ для всех $s \in S$, то $D_\lambda\left[\prod_S P_s\right] \leqslant \sum_\Phi D_\lambda\left[\prod_S \varphi(s)\right]$.

Р. Ю. Мацкина

3674. Подмножества множеств с отношением. **Шпеккер** (Teilmengen von Mengen mit Relationen. Specker Ernst), Comment. math. helv., 1957, **31**, № 4, 302—314 (нем.)

Пусть M — некоторое множество и a — кардинальное число. Через (M) обозначается совокупность всех подмножеств множества M, состоящих из a элементов.

Для натуральных чисел m, n и порядкового числа второго класса α пусть $A(m, n, \alpha)$ обозначает следующее утверждение: для всякого m-местного симметрического отношения R на множестве S порядкового типа α либо имеется подмножество S' из n элементов такое, что если $x \in \binom{S'}{m}$, то имеет место $R(x)$, либо существует подмножество S'' типа α такое, что если $x \in \binom{S''}{m}$, то $R(x)$ не имеет места. Доказано ранее, что $A(m, n, \omega)$ (Ramsey F. P.,

Proc. London Math. Soc., 1930, **30**, 264—286). В реферируемой работе доказано: $A(2, n, \omega^2)$ для каждого $n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (теорема 1);

$\sim A(3, 4, \omega^2)$ (теорема 2); $\sim A(2, 3, \omega^3)$ (теорема 3); $\sim A(m, n, \alpha)$ $(3 \leqslant m < n,\ \omega < \alpha)$ (теорема 5).

Ставятся следующие вопросы: 1) верно ли $A(2, 3, \omega^\omega)$; 2) следует ли из $A(r, 3, \alpha)$ верность $A(r, n, \alpha)$?

Для порядковых чисел второго класса α и β пусть $S(\alpha, \beta)$ означает утверждение: существует отображение f упорядоченного множества A типа α на упорядоченное множество типа β такое, что для всякого $X \subseteq A$ типа α тип fX равен β. Если $S(\alpha, \beta)$, то из $A(m, n, \alpha)$ следует $A(m, n, \beta)$ (утверждение A_6). Ставится проблема: для каких α имеет место $S(\alpha, \omega^3)$? Г. Курепа

3675. О произведении порядковых чисел. Мацусака, Сугаку, 1956, 8, № 2, 95—96 (японск.)

3676. Трансфинитные шахматы. Багемихл Фредерик (Transfinitely endless chess. Bagemihl Frederick), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, **2**, № 3, 215—217 (англ.)

Известен результат (Morse M., Hedlund G. A., Duke Math. J., 1944, **11**, 1—7), согласно которому так называемое германское правило в шахматной игре не исключает возможности бесконечной партии (германское правило гласит, что последовательное трехкратное повторение одной и той же серии ходов в партии ведет к ничьей). При этом в любой такой бесконечной партии существуют позиции, повторяющиеся бесконечное число раз. Рассматривается следующее обобщение шахматной игры: если дана бесконечная серия ходов, пронумерованных натуральными числами, то для хода с номером ω выбирается одна из позиций, повторенных бесконечно много раз. И так для любого предельного трансфинитного числа. Показывается, что возможна бесконечная игра, где никакая (конечная или бесконечная) серия ходов не повторяется последовательно трижды. В. А. Янков

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3677. О коэффициентах некоторых рядов Фурье. Кеннеди (On the coefficients in certain Fourier series. Kennedy P. B.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 196—207 (англ.)

Рассматриваются 2π-периодические функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$, у которых коэффициенты Фурье a_n, b_n отличны от нуля разве лишь при $n = n_k$, где $\{n_k\}$ — некоторая возрастающая подпоследовательность натуральных чисел. Нобл (РЖМат, 1955, 4339) доказал, что если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ в некотором интервале длины δ и

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} \to \infty \quad (k \to \infty), \tag{1}$$

то $a_n, b_n = O(n^{-\alpha})$. Если же $\alpha > 1/2$, то

$$\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{2}$$

Он высказал предположение, что интервал длины δ может быть заменен на любое множество положительной меры. Автор за счет замены условия (1) на более сильное

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1 \tag{3}$$

доказывает, что для того чтобы ряд $\sum (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x)$ был рядом Фурье функции $f(x)$, принадлежащей классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ на некотором множестве E положительной меры, необходимо и достаточно, чтобы $a_{n_k} = O(n_k^{-\alpha})$, $b_{n_k} = O(n_k^{-\alpha})$ $(f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на множестве E, $\mathrm{mes}\, E > 0$, если

$$f(x + h) - f(x) = O(|h|^\alpha) \tag{4}$$

равномерно по всем $x \in E$ при $h \to 0$ произвольно). Кроме того, установлена

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ на множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ таком, что для каждого натурального $N > 1$ E содержит N точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$, для которых $|x_p - x_q| > CN^{-1}$ $(p \neq q)$, где C — некоторое положительное число (каждое подмножество $E \subset [-\pi, \pi]$ положительной меры обладает указанным свойством). Тогда из соотношения

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k^\beta \log n_k} \to \infty \quad (k \to \infty;\ 0 < \beta < 1) \tag{5}$$

вытекает

$$a_n = O(n^{-\alpha\beta}), \quad b_n = O(n^{-\alpha\beta}) \quad (n \to \infty). \tag{6}$$

При $\alpha > 1/2\,(\beta^{-1} - 1)$ выполняется даже (2).

Автор замечает, что если (4) выполняется при $h \to 0$, $x, x + h \in E$, то из соотношения (5) даже при наличии условия $\mathrm{mes}\, E > 0$, вообще говоря, не следует ни при одном $\varepsilon > 0$, что $a_n, b_n = O(n^{-\varepsilon})$. По вопросу о точности оценки (6) показано, что, каковы бы ни были данные $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon$ $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ 0 < \mu < 2\pi,\ \varepsilon > 0)$, существуют последовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющая условию (5), и такая непрерывная функция $f(x)$ периода 2π, что: а) ее коэффициенты Фурье a_n, b_n отличны от нуля разве лишь при $n = n_k$, б) $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на множестве $A \subset [-\pi, \pi]$ меры μ, в) $|a_n| + |b_n| \neq O(n^{-\alpha\beta-\varepsilon})$.

И. М. Ганзбург

3678. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье и сопряженных к ним рядов. Флетт (On the absolute summability of a Fourier series and its conjugate series. Flett T. M.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 30, 258—311 (англ.)

Пусть $f(\theta)$ — 2π-периодическая функция, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$;

$$\varphi(t) = f(\theta + t) + f(\theta - t),\ \psi(t) = f(\theta + t) - f(\theta - t),$$

$$\omega(t) = \int_t^\infty u^{-1} \psi(u)\, du\ (t > 0),\ \varphi^*(t) = \varphi(t) - 2s,\ \psi^*(t) = \psi(t) - 2s$$

а $\Phi_\alpha(t)$ есть α-й интеграл функции $\varphi(t)$ в смысле Римана—Лиувилля, т. е.

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \varphi(u)\, du\ (t > 0, \alpha > 0),\ \Phi_\alpha(0) = 0,$$

$$\Phi_0(t) = \varphi(t);$$

$\Psi_\alpha(t)$, $\Omega_\alpha(t)$, $\Phi_\alpha^*(t)$, $\Psi_\alpha^*(t)$ суть соответственно α-е интегралы функций $\psi(t)$, $\omega(t)$, $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, $\Lambda_1(t) = t\varphi(t) - \Phi_1(t)$,

$$\Lambda_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-2} \Lambda_1(t)\, dt$$

$(\alpha > 1,\ t > 0)$, $\Lambda_\alpha(0) = 0$.

Пусть далее $A_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$, $B_n(\theta) = a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $A_0(\theta) = a_0/2$, где a_n и

b_n коэффициенты Фурье функции $f(x)$, так что

$$f(\theta)\sim\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta), \qquad (1)$$

$$\varphi(t)\sim 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta)\cos nt,$$

$$\psi(t)\sim -2\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\theta)\sin nt.$$

Пусть σ_n^β, $\overline{\sigma}_n^\beta$, $g_n^\beta(\alpha)$, $\overline{g}_n^\beta(\alpha)$ обозначают чезаровские средние порядка β соответственно для ряда (1), последовательностей $B_n(\theta)$, $n^{\alpha+1}A_n(\theta)$, $n^{\alpha+1}B_n(\theta)$ ($g_n^\beta(0)=t_n^\beta$, $\overline{g}_n^\beta(0)=\overline{t}_n^\beta$), а C — положительную константу. Рассматривается суммируемость $|C,\beta|_r$ ряда Фурье (1) и ему сопряженного $\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\theta)$, эквивалентная соответственно сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,t_n^\beta\,|^r \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,\overline{t}_n^\beta\,|^r.$$

Доказывается:

1. Если $r\geqslant k>1$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant\alpha+\max(1/k, 1/r')$, то

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,\overline{t}_n^\beta|^r\right\}^{1/r}\leqslant C\left\{\int_0^\pi |\,\Psi_\alpha(t)\,|^k\,t^{-1-k\alpha}dt\right\}^{1/k}+$$
$$+C\int_0^\pi |\,\psi(t)\,|\,dt. \qquad (2)$$

При $0<\alpha\leqslant 1$ можно в правой части (2) опустить второй член. При $k=1$ ($\alpha\geqslant 0$) (2) также выполняется, но при $\beta>\alpha+1$. Если же $\beta=\alpha+1$, то (при $\alpha\geqslant 0$, $r\geqslant k=1$) неравенство (2) остается справедливым, если подынтегральную функцию в первом члене правой части умножить на $L(t)=\left(\log^+\frac{|\,D_\alpha(t)\,|}{t^{1+\alpha}}\right)^{1/r}$, $D_\alpha(t)=\Psi_\alpha(t)$.

2. Если $k=1$, $\alpha\geqslant 0$ и $\int_0^\pi |\,\Psi_\alpha(t)\,|\,t^{-1-\alpha}\,dt<\infty$, то

$$\overline{t}_n^{\alpha+1}=o(1)\quad(n\to\infty).$$

Если $k>1$, $\alpha\geqslant 0$, $\int_0^t |\,\Psi_\alpha(u)\,|\,u^{-\alpha}\,du=o(t)$, то для $\beta>\alpha+1$ имеет место: $\overline{t}_n^\beta=o(1)$ $(n\to\infty)$.

Оба утверждения соответствуют случаю $r=\infty$.

3. При $\alpha\geqslant 0$, $\beta>\alpha+1$ для любого s имеет место:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\overline{t}_n^\beta+\frac{2s}{\pi}\right|\leqslant C\,\overline{\lim_{t\to+0}}\,\frac{1}{t}\int_0^t\left|\Psi_\alpha^*(u)\right|u^{-\alpha}\,du.$$

Утверждения 2 и 3 примыкают к результатам Бозанке (Bosanquet L. S., Proc. London Math. Soc., 1934, **37**, 17—32) и Обрешкова (Obrechkoff N., Bull. Soc. math. France, 1934, **62**, 84—109, 167—184). Утверждение 1 обобщает предложения Бозанке и Хислопа (Bosanquet L. S., Hyslop J. M., Math. Z., 1937, **42**, 489—512).

4. а) Если $r\geqslant k>1$, $\beta\geqslant\alpha-1+\max(1/k, 1/r')$ и либо $\alpha=0$, либо $\alpha>1-\max(1/k, 1/r')$ $(1/r+1/r'=1)$, то

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\sigma_n^\beta-s}{n+1}\right|^r\right\}^{1/r}\leqslant C\left\{\int_0^\pi |\,\Phi_\alpha^*(t)\,|^k\,t^{-1-k\alpha}dt\right\}^{1/k}+$$
$$+C\int_0^\pi |\,\varphi^*(t)\,|\,dt. \qquad (3)$$

При $k=1$ неравенство (3) также справедливо, когда $\beta>\alpha\geqslant 0$. При $\beta=\alpha$ $(k=1)$ (3) имеет место, если подынтегральную функцию в первом члене правой части умножить на $L(t)$ $(D_\alpha(t)=\Phi_\alpha^*(t))$.

б) Если $\alpha\geqslant 0$ и $\int_0^\pi |\,\Phi_\alpha^*(t)\,|\,t^{-1-\alpha}\,dt<\infty$, то $\sigma_n^\alpha\to s$ $(n\to\infty)$.

в) Для $\beta>\alpha\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sigma_n^\beta-s\right|\leqslant C\cdot\overline{\lim_{t\to+0}}\,\frac{1}{t}\int_0^t |\,\Phi_\alpha^*(u)\,|\,u^{-\alpha}\,du.$$

5. а) Если $r\geqslant k>1$, $\beta\geqslant\alpha-1+\max(1/k, 1/r')$ и либо $\alpha=1$, либо же $\alpha>2-\max(1/k, 1/r')$, то

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,t_n^\beta\,|^r\right\}^{1/r}\leqslant C\left\{\int_0^\pi |\,\Lambda_\alpha(t)\,|^k\,t^{-1-k\alpha}\,dt\right\}^{1/k}+$$
$$+C\int_0^\pi |\,\varphi(t)\,|\,dt. \qquad (4)$$

При $k=1$ (4) справедливо для $\beta>\alpha\geqslant 1$. Если $\beta=\alpha$ (4) выполняется, если ввести в подынтегральное выражение первого члена правой части множитель $L(t)$ при $D_\alpha(t)=\Lambda_\alpha(t)$.

б) Если $\int_0^\pi |\,\Lambda_\alpha(t)\,|\,t^{-1-\alpha}\,dt<\infty$ $(\alpha\geqslant 1)$, то

$$t_n^\alpha=o(1)\ (n\to\infty)$$

и ряд (1) суммируем $(C,\alpha-1)$ в точке θ.

в) Для $\beta>\alpha\geqslant 0$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\,t_n^\beta\,|\leqslant C\cdot\overline{\lim_{t\to+0}}\,\frac{1}{t}\int_0^t |\,\Lambda_\alpha(u)|u^{-\alpha}\,d\,u.$$

Получены также аналогичные неравенства, связывающие t_n^β с $\Phi_\alpha^*(t)$, а также t_n^β с $\overline{\Phi}_\alpha(t)$ (интегралом порядка α функции $\overline{\varphi}(t)$, сопряженной к $\varphi(t)$).

В работе исследуется также суммируемость $|C,\beta|_r$ рядов $\sum n^\alpha A_n(\theta)$ и $\sum n^\alpha B_n(\theta)$ (эквивалентная сходимости соответственно рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,g_n^\beta(\alpha)\,|^r \quad\text{и}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,\overline{g}_n^\beta(\alpha)\,|^r).$$

Например, показано, что при $r\geqslant k>1$ и $\beta\geqslant\alpha+\max(1/k, 1/r')>0$ имеют место неравенства

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,g_n^\beta(\alpha)\,|^r\right\}^{1/r}\leqslant C\left\{\int_0^\pi |\,\Lambda_1(t)\,|^k\,t^{-1-k(\alpha+1)}dt\right\}^{1/k},$$

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,\overline{g}_n^\beta(\alpha)\,|^r\right\}^{1/r}\leqslant C\left\{\int_0^\pi |\,\psi(t)\,|^k\,t^{-1-k\alpha}dt\right\}^{1/k}.$$

Обращение этих неравенств изучено в работе лишь для случая $\beta=0$. Показано, что при $\alpha=-\min(1/k, 1/r')$ и $k\geqslant r>1$ выполняется

$$\left\{\int_0^\pi |\,\psi(t)\,|^k t^{-1-k\alpha}\,d\,t\right\}^{1/k}\leqslant C\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,\overline{g}_n^0(\alpha)\,|^r\right\}^{1/r}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) имеет место и для функции $\varphi(t)$, если среднее значение $f(x)$ равно нулю. (5) выполняется и для $\overline{g}_n^1(\alpha)$ при условии, что ряд Фурье функции $\psi(t)$ сходится почти всюду, а $\alpha=\max(1/k', 1/r)$. При помощи последних результатов устанавливаются теоремы, аналогичные предложениям 1—5, но для дробного интегрирования в смысле Вейля. Автором получены аналоги неравенств Литлвуда и Пейли. Для $1<k\leqslant 2$ и $\lambda>1$ при условии $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta=0$ выполняется неравенство

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(\theta)\,|^\lambda\,d\theta\right)^{1/\lambda}\leqslant C\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{F}_{k,\alpha}^\lambda(\theta)\,d\theta\right\}^{1/\lambda}+$$
$$+C\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(\theta)\,|\,d\theta,$$

где $\mathfrak{F}_{k,\alpha}(\theta)=\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\,\chi(t)\,|^k\,|\,t\,|^{-1-k\alpha}dt\right\}^{1/k}$, причем $\chi(t)$ есть либо $\Phi_\alpha(t)$ $(\alpha=0$ или $\alpha>1/k)$, либо $\Psi_\alpha(t)$ $(\alpha>0)$, либо же $\Lambda_\alpha(t)$ $(\alpha=1$ или $\alpha>1+1/k)$.

Подобное неравенство имеет место при некоторых условиях и для дробных интегралов в смысле Вейля для различных видов функции $\chi(t)$

$$(\chi=\{\varphi_\alpha, \psi_\alpha, f_\alpha\ (\theta+t)\pm f_\alpha(\theta-t),\ \varphi_\alpha^*,\ \psi_\alpha^*,\ \overline{\varphi}_\alpha^*\}).$$

Установлены также неравенства обратного характера. Последние результаты обобщают исследования Марцинкевича (Marcinkiewicz J., Ann. Soc. polon. math., 1938, **17**, 42—50), Зигмунда (Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **55**, 170—204), Суноути (Sunouchi G., Tohoku Math. J., 1951, **3**, 71—88), Хиршмана (РЖМат, 1954, 3287).

И. М. Ганзбург

3679. Некоторые теоремы относительно абсолютной суммируемости рядов Фурье и степенных рядов. Флетт (Some more theorems concerning the absolute summability of Fourier series and power series. Flett T. M.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 31, 357—387 (англ.)

Обозначим через σ_n^α и τ_n^α n-е средние Чезаро порядка α рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n, \qquad (2)$$

а через $\varphi(x)$ — сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (3)$$

при $0 \leqslant x < 1$.

Ряд (1) назовем суммируемым $|C, \alpha, \gamma|_k$ для $k \geqslant 1$, $\alpha > -1$, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\gamma + k - 1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k\gamma - 1} |\tau_n^\alpha|^k.$$

Ряд (1) назовем суммируемым $|A, \gamma|_k$ для $k \geqslant 1$, если ряд (3) сходится для $0 \leqslant x < 1$ и его сумма $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 (1-x)^{k-k\gamma-1} |\varphi'(x)|^k dx < \infty.$$

При $\gamma = 0$ имеем соответственно суммируемости $|C, \alpha|_k$ и $|A|_k$.

В работе изучается вопрос о том, при каких ограничениях, накладываемых на α, γ, k, μ, β и r, суммируемость $|C, \alpha, \gamma|_k$ влечет суммируемость $|C, \beta, \mu|_r$, даются условия, при которых из суммируемости $|C, \alpha, \gamma|_k$ следует суммируемость $|A, \gamma|_k$ или (C, δ). Далее, для ряда Фурье и сопряженного ему ряда даются достаточные условия суммируемости $|C, \alpha, \gamma|_k$ в фиксированной точке θ.

Обозначим через $\Phi_\beta(t)$ интеграл порядка β от функции

$$\varphi(t) = f(\theta + t) + f(\theta - t),$$

т. е.

$$\Phi_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-u)^{\beta-1} \varphi(u)\, du, \quad t > 0, \quad \Phi_\beta(0) = 0.$$

Тогда суммируемость $|C, \alpha, \gamma|_k$ ряда Фурье функции $f(\theta)$ в точке θ зависит от сходимости интегралов

$$\int_0^\pi |\Phi_\beta|^r t^{-m} dt \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi} |f|^l dt$$

при определенном выборе r и m, зависящих от α, γ, β и k. Доказывается, что при определенных условиях, накладываемых на k, p и α, суммируемость $|C, \alpha|_k$ ряда Фурье функции $f \in L^p$ есть локальное свойство функции f. Доказывается также существование функции $f \in L^p$, которая при определенных k, p и α не суммируема $|C, \alpha|_k$ в точке $\theta = 0$.

Рассматривается вопрос о суммируемости $|C, \alpha, \gamma|_k$ и $|A, \gamma|_k$ степенных рядов. Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

регулярна в круге $|z| < 1$ и $\tau_n^\alpha(\theta)$ — n-е средние Чезаро порядка α последовательности $nc_n e^{in\theta}$. Даются условия ограниченности величин

$$g_{k,\gamma}(\theta) = \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{k-k\gamma-1} |\varphi'(\rho e^{i\theta})|^k d\rho \right\}^{1/k}$$

и

$$h_{k,\alpha,\gamma}(\theta) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{k\gamma-1} |\tau_n^\alpha|^k \right\}^{1/k},$$

т. е. условия суммируемости $|A, \gamma|_k$ и $|C, \alpha, \gamma|_k$ ряда для $\varphi(z)$ на окружности $|z| = 1$.

Рассматриваются также функции, принадлежащие комплексным классам $\mathrm{Lip}(\delta, \lambda)$ и $\mathrm{Lip}^*(\delta, \lambda)$. Доказывается, что при определенных k, γ и λ из условия $g_{k,\gamma} \in L^\lambda$ вытекает $\varphi(z) \in \mathrm{Lip}^*(\gamma, \lambda)$, и из $\varphi(z) \in \mathrm{Lip}(\delta, \lambda)$ следует $g_{k,\gamma} \in L^\lambda$ при $0 < \delta \leqslant 1$. Показывается, что из условия $\varphi(z) \in \mathrm{Lip}(\delta, k)$ при некоторых k, δ и α следует для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

либо суммируемость (C, α) почти всюду, либо равномерная суммируемость (C, α), либо суммируемость $|C, \alpha|$ почти всюду, или суммируемость $|C, \alpha|$ для всех θ.

А. В. Ефимов

См. также: 3598, 3888, 3914, 3922

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

3680. Об аналитических полугруппах комплексных чисел. Хошсу (On analytic half-groups of complex numbers. Hosszú Miklós), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 459—464 (англ.)

Пусть в плоской области D введена ассоциативная операция $x \circ y$, комплексно аналитическая по каждому аргументу. Пусть A — множество таких $x \in D$, что либо $x \circ y = \mathrm{const}$, либо $y \circ x = \mathrm{const}$ $(y \in D)$. Доказывается, что либо множество A дискретно и в $D \setminus A$ существует такая аналитическая функция f, что $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$, либо операция имеет один из следующих видов: $x \circ y = \mathrm{const}$, $x \circ y = x$, $x \circ y = y$.

А. Л. Онищик

3681. Об ограниченных билинейных формах. Нехари (On bounded bilinear forms. Nehari Zeev), Ann. Math., 1957, 65, № 1, 153—162 (англ.)

Автор рассматривает квадратичные формы $A(a, a) = \sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik} a_i a_k$, где $a(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ — векторы комплексного пространства l_2 с нормой $\|a\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2} < \infty$; форма называется ограниченной, если $|A(a, a)| < \infty$ для $a \in l_2$, а ее нормой называется величина $\|A\| = \sup_{\|a\|=1} |A(a, a)|$. Известно, что для билинейной формы $A(a, b) = \sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik} a_i b_k$ имеем $\sup_{\|a\|, \|b\|=1} |A(a, b)| = \|A\|$.

Основные результаты автора, ставящего себе целью найти $\|A\|$ и экстремальный вектор a для форм типа Ханкеля $A_{ik} = \alpha(i + k)$, таковы:

Для того чтобы $\|A\| = M$, необходимо и достаточно

выполнения каждого из двух условий: 1) возможность представления

$$a(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta)\,e^{-in\theta}d\theta,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $F(\theta)\in L_2(0,2\pi)$, причем $|F(\theta)|\leqslant M$ почти всюду в $[0,2\pi]$; 2) существование функции $q(z)$, регулярной при $|z|<1$ ($q(0)=0$), для которой справедливо неравенство

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}a(\nu)\,\overline{z}^{\nu}+q(z)\right|\leqslant M,\quad |z|<1.$$

В качестве иллюстрации применения общих методов автор рассматривает вывод известных оценок

$$\left|\sum_{l,\,k=1}^{\infty}\frac{a_la_k}{l+k}\right|\leqslant\pi,\quad \left|\sum_{i,\,k=0}^{\infty}\frac{a_ia_k}{i+k+\lambda}\right|\leqslant\frac{\pi}{\sin\lambda\pi},$$

$$0<\lambda\leqslant\frac{1}{2},$$

и находит соответствующие экстремальные векторы, а также доказывает теорему: Если функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области $|z|\leqslant 1$, в которой $\operatorname{Re} f(z)>0$, за исключением точки $z=1$, в которой функция имеет простой нуль, и если $\log f(z)\sum_{\nu=0}^{\infty}a(\nu)z^{\nu}$, то $\|A\|=\pi$.

Примечание референта. Для вывода основного результата автор доказывает следующее теоретико-функциональное предложение: Если задан многочлен $P_n(z)$, то всегда можно подобрать, и притом единственным способом, две функции $q(z)$, $h(z)$, регулярные в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ (в которой $h(z)\neq 0$, а $q(0)=0$), так, чтобы иметь для $|z|=1$

$$\overline{P_n(z)}+q(z)=\lambda\frac{\overline{h(z)}}{h(z)},\quad \lambda=\text{const}.$$

Если ввести обозначения

$$h^2(z)=\varphi(z),\qquad \operatorname{sgn}\varphi(e^{i\theta})=\frac{\varphi(e^{i\theta})}{|\varphi(e^{i\theta})|}=\frac{h(e^{i\theta})}{\overline{h(e^{i\theta})}},$$

$$P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu,$$

то мы должны, таким образом, иметь

$$\lambda e^{in\theta}\overline{\operatorname{sgn}\varphi(e^{i\theta})}=\overline{a}_n+\overline{a}_{n-1}e^{i\theta}+\ldots+\overline{a}_0e^{in\theta}+e^{in\theta}q(e^{i\theta}).$$

Возможность такого подбора функций $\varphi(z)$, $q(z)$ сразу вытекает из решения известной задачи Рисса (Riesz F., Acta Math., 1920, 42, 145—171). Я. Л. Геронимус

3682. Заметка о лорановских разложениях. Осборн (A remark on Laurent expansions. Osborn Howard), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 1, 28 (англ.)

Пусть f — однозначная аналитическая функция и

$$\sum a_n(z-z_0)^n\quad\text{и}\quad\sum b_n(z-z_0)^n-$$

два ее лорановских разложения. В работе изучаются свойства последовательности $\{a_n-b_n\}$.

Доказаны:

Предложение 1. Если ряд $\sum a_nz^n$ сходится в кольце A, ряд $\sum b_nz^n$ сходится в кольце B, и оба ряда представляют однозначную функцию f, мероморфную в замкнутом кольце C между A и B, и $\sum_{p=1}^{n_k}\frac{a_p^k}{(z-z_k)^p}$ — главная часть f в полюсе $z_k\in C$, $k=1,2,\ldots,N$, то

$$a_n-b_n=\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{n_k}\binom{-n-1}{p-1}a_p^{(k)}z_k^{-n-p}.$$

Предложение 2. Если C-окружность радиуса r есть общая граница колец A и B и все особенности f на C простые полюсы в точках $re^{i\theta_1},\ldots,re^{i\theta_N}$, где $\theta_1,\ldots,\theta_n$ соизмеримы с π, то последовательность $\{r^n(a_n-b_n)\}$ будет периодической. Г. А. Фридман

3683. Теорема об аналитической непродолжимости степенных рядов. Илиев (Ein Satz über analytische Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen. Ilieff Ljubomir), Докл. Болг. АН, 1957, **10**, № 5, 447—450 (нем.; рез. русск.)

Установлена теорема: Пусть для ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{1}$$

существует последовательность индексов $n_1,\ldots,n_\nu,\ldots$ и число ε, $0<\varepsilon<1$ такие, что выполнены условия:

а) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sqrt[n_\nu]{|c_{n_\nu}|}=1$;

б) любая из последовательностей $c_{n_\nu}-k$, $k=1,2,\ldots,[\varepsilon n_\nu]$, является периодической по меньшей мере с двумя периодическими группами;

в) число 1 не является предельной точкой чисел

$$\frac{c_{n_\nu-k}}{c_{n_\nu}},\quad k=1,2,\ldots,[\varepsilon n_\nu].$$

Тогда ряд (1) аналитически непродолжим вне единичной окружности. Здесь „периодической с периодом p“ называется любая конечная последовательность

$$u_s,\ u_{s+1},\ldots,u_t, \tag{2}$$

удовлетворяющая условию $u_x=w_{x+p}$ при $s\leqslant x\leqslant t-p$, а „количеством периодических групп“, содержащихся в последовательности (2) — число $\left[\frac{t-s}{p}\right]$.

Обозначим через Γ_δ кривую, состоящую из дуг:

$z=Re^{i\varphi}$, $-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$; $z=re^{\pm i\varphi_0}$, $1-\delta\leqslant r\leqslant R$; $z=(1-\delta)e^{i\varphi}$, $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_0$, где $0<\varphi_0<\pi$, $R>1$ и $\delta\geqslant 0$.

Доказательство сформулированной выше теоремы основывается на следующей теореме Сегё (Szegö G., Math. Ann., 1922, 87, 90): Для каждой кривой Γ_δ имеется содержащая ее область G, для которой существуют последовательность функций

$$Q_r(z)=q_r^{(r)}+\frac{q_{r-1}^{(r)}}{z}+\ldots+\frac{q_1^{(r)}}{z^{r-1}}+\frac{1}{z^r},$$

$$r=0,1,2,\ldots,$$

числа r_0 и ϑ, $0<\vartheta<1$, такие, что в области G

$$|Q_r(r)|<\vartheta^r$$

при $r\geqslant r_0$. А. И. Селезнев

3684. Теорема Энестрёма и экстремальные функции Ландау — Шура. Винтнер (The theorem of Eneström and the extremal functions of Landau — Schur. Wintner Aurel), Math. scand., 1957, **5**, № 2, 236—240 (англ.)

Если коэффициенты многочлена $p(z)=\sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ вещественны и удовлетворяют неравенствам

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0, \qquad (1)$$

то по теореме Энестрёма — Какейя $p(z)\neq 0$ в области $|z|<1$; в таком случае функция $q(z)=z^n p\left(\frac{1}{z}\right)/p(z)$ в этой области регулярна и удовлетворяет неравенству $|q(z)|<1$, причем $|q(z)|=1$ для $|z|=1$. Автор доказывает, что при условиях (1) коэффициенты разложения $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_k z^k$, $|z|<1$, удовлетворяют неравенствам $b_k>0$, $k=0, 1, \ldots, n$; $b_{n+1}<0$. Я. Л. Геронимус

3685. Расположение нулей многочленов. I, II. Шпехт (Die Lage der Nullstellen eines Polynoms. I, II. Specht Wilhelm), Math. Nachr., 1956, **15**, № 5-6, 353—374; 1957, **16**, № 3-4, 257—263 (нем.)

I. Автор рассматривает многочлены $\{\varphi_n(z)\}$, ортонормальные на $|z|=1$ относительно некоторого веса, и находит область, в которой расположены корни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ многочлена

$$P_n(z)=b_0\varphi_0(z)+b_1\varphi_1(z)+\ldots+b_n\varphi_n(z);$$

например, если $|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant\ldots\geqslant|z_n|$, то

$$\left|z_1 z_2 \ldots z_m\right| \leqslant \frac{1}{|b_n|}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|b_k|^2}, \quad 1\leqslant m<n.$$

Если же многочлены ортонормальны на вещественной оси относительно некоторого веса, то все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в полосе

$$\operatorname{Im} z \leqslant \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\frac{1}{|b_n|}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}|b_k|^2}, \quad \varphi_n(x)=\lambda_n x^n+\ldots,$$

если же $\alpha=\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left|\sqrt[\nu]{\frac{\lambda_{n-\nu}\,b_{n-\nu}}{\lambda_n b_n}}\right|$, а σ — положительный корень уравнения $1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{n-1}=\sigma^n$, то все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant\sigma\alpha<2\alpha$. В случае классических ортонормальных систем — многочленов Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита — величины $\{\lambda_k\}_0^n$ известны и границы полосы зависят только от коэффициентов $\{b_i\}_0^n$.

II. В случае ортогональности на вещественной оси автор составляет числа.

$$k_\nu=\frac{\lambda_\nu b_\nu}{\lambda_n b_n}\gamma^{\nu-n}, \quad 0\leqslant\nu\leqslant n-1, \quad \gamma>0,$$

и располагает их модули в порядке убывания $\beta_0\geqslant\beta_1\geqslant\ldots\geqslant\beta_{n-1}$; тогда все корни многочлена $P_n(z)$ лежат внутри полосы

$$|\operatorname{Im} z|<\gamma(1+\sigma), \quad \sigma=\frac{\beta_0}{1+\beta_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_k}{(1+\beta_0)^k};$$

для случая многочленов Лежандра, Чебышева и Эрмита автор указывает границы полосы в зависимости от коэффициентов $\{b_i\}_0^n$. Я. Л. Геронимус

3686. О наименьшем по модулю корне полинома. Витулкас (On the minimum modulus of a root of a polynomial. Vythoulkas Dennis P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 797—798 (англ.)

Ландау поставил вопрос о нахождении оценки для наименьшего по модулю корня полинома $P_K(z)=1+z+\alpha_1 z^{n_1}+\ldots+\alpha_{K-1}z^{n_K-1}$, зависящей лишь от числа членов полинома $P_K(z)$ и не зависящей от коэффициентов α_i и показателей n_i.

Монтель (Montel P., Ann. École Norm. 1923, **40**, 3) показал, что наименьший по модулю корень не превосходит K и что если это значение достигается, то все корни полинома равны $-K$. В реферируемой работе результат Монтеля уточняется:

I. Полином $P_K(z)$ имеет по крайней мере один корень в замкнутом круге радиуса $\frac{\lambda}{2}$ с центром в точке $-\frac{\lambda}{2}$, где

$$\lambda=\frac{n_1}{n_1-1}\cdot\frac{n_2}{n_2-1}\cdots\frac{n_{K-1}}{n_{K-1}-1}.$$

Очевидно, $\lambda\leqslant K$, поэтому из I следует:

II Полином $P_K(z)$ с $K+1$ членами имеет по крайней мере один корень в замкнутом круге радиуса $\frac{K}{2}$ с центром в точке $-\frac{K}{2}$.

С помощью очевидной замены, отсюда следует, что полином $\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_m z^m$ имеет по крайней мере один корень внутри или на окружности радиуса $|\alpha_0/\alpha_1|\cdot m/2$ с центром в точке $-(\alpha_0/\alpha_1)\cdot m/2$.

Н. С. Мейман

3687. О некоторых свойствах полиномов. Пароди (Sur quelques propriétés des polynomes. Parodi Maurice), Bull. sci math., 1956, **80**, 76—81 (франц.)

Пусть полином $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_n\neq 0)$ удовлетворяет условию $\sigma=\sum_2^n|a_k|>1$. В работе доказываются следующие теоремы:

I. Если $|a_1|>2\sqrt{\sigma}$, то полином $f(z)$ имеет в точности один корень в круге $|a_1+z|\leqslant\sqrt{\sigma}$. При доказательстве существенно используется теорема Брауэра (Duke Math. J., 1947, 21).

II. Если $|a_1|>1+\sigma>2\sqrt{\sigma}$, то полином $f(z)$ имеет $n-1$ корней в единичном круге и один корень по модулю больше 1, лежащий в круге с центром в точке $-a_1$ радиуса 1.

III. Если $|a_1|>\max(2n, 1+\sigma)$, то $n-k-1$ нулей производной $f^{(k)}(z)$ расположены в единичном круге и один корень в круге радиуса 1 с центром в точке $-a_1\frac{n-k}{n}$.

IV. Известно, что полином с целыми коэффициентами неприводим, если $n-1$ его нулей лежат в единичном круге и один — вне единичного круга. Поэтому при $|a_1|>1+\sigma$ полином $f(z)$ неприводим. Это условие несколько ослабляется. Н. С. Мейман

3688. Теорема о сходящихся последовательностях аналитических функций. Суворов Г. Д., Прилепко А. И., Докл. 7-й Научн. конференции,

посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. Соц. революции. Вып. 2, Томск, Томский ун-т, 1957, 17

Доказывается теорема: Пусть в комплексной плоскости W задан произвольный континуум K, не содержащий начала координат. Существует последовательность аналитических и однолистных в круге $|z|<1$ функций $\{f_n(z)\}$, $n=1, 2, \ldots$, $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$, равномерно сходящаяся внутри этого круга, и точка z_0 на окружности $|z|=1$ такие, что множество всех точек сгущения всевозможных последовательностей $\{f_n(z_n)\}$, $\lim z_n=z_0$, $|z_n|<1$, совпадает с K. Резюме авторов

3689. Обобщенные тейлоровские разложения. Падманабхан (On generalized Taylor expansions. Padmanabhan K. S.), Math. Student, 1957, 25, № 3-4, 153—155 (англ.)

Доказывается, что всякая функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |a_0|\leqslant K,\ |a_n|\leqslant K^n,\ n=1, 2, \ldots,$$

может быть единственным образом представлена в круге $|z|<\frac{1}{2K}$ равномерно и абсолютно сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} t_n F_n(z)$, где $\{F_n(z)\}$ — заданная система функций вида

$$F_n(z)=z^n[1+h_n(z)],\ h_n(z)=\sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} z^p,$$
$$|a_{n,p}|\leqslant K^p,$$

$n=0, 1, 2, \ldots$, $p=1, 2, \ldots$ Утверждается далее, что подобное представление возможно для всякой функции $f(z)$, аналитической в $|z|<\frac{1}{K}$, т. е. ограничения на коэффициенты $|a_0|\leqslant K$, $|a_n|\leqslant K^n$ могут быть сняты.

Примечание референта. Из теоремы Боса (Boas) легко вытекает более общий результат: Равномерно и абсолютно сходящееся внутри круга $|z|<r$ разложение $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} t_n F_n(z)$ справедливо для всякой функции $f(z)$, аналитической в $|z|<r$, если $r\leqslant\frac{1}{2K}$. Действительно, функции $\{h_n(z)\}$ мажорируются функцией $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty} K^n z^n=\frac{Kz}{1-Kz}$ и условие Боса $h(r)<1$ дает $r<\frac{1}{2K}$.

М. Г. Хапланов

3690. О последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений. Леонтьев А. Ф., Изв. АН СССР. Сер. матем, 1958, 22, № 2, 201—242

Рассматриваются последовательности линейных агрегатов вида

$$P_n(z)=\sum_{j=1}^{p_n}\sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j)\quad (n=1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где $y_k(z, \lambda_j)$ — решение уравнения

$$Dy\equiv Q_0(z)y^{(s)}+\ldots+Q_s(z)y=\lambda_n y \qquad (2)$$

с аналитическими коэффициентами $Q_i(z)$,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^{1/s}}=\tau<\infty. \qquad (3)$$

На эти последовательности переносится ряд известных свойств рядов Тейлора, рядов Дирихле и последовательностей полиномов Дирихле. Метод исследования основывается на рассмотрении уравнения

$$M(y)\equiv\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k y=0, \qquad (4)$$

где a_k — постоянные. При подходящем подборе a_k все функции $y_k(z, \lambda_j)$ удовлетворяют уравнению (4).

Устанавливаются следующие свойства $P_n(z)$:

1. Пусть последовательность (1) равномерно сходится в круге $|z-z_0|\leqslant r$, причем r таково, что в точке z_0

$$q=q(z_0)=s!\left(\frac{\sigma e}{rs}\right)^s M(r, Q_0)<1,$$

где $M(r, Q_0)$ — максимум модуля $Q_0(z)$ в $|z-z_0|\leqslant r$, (предполагается, что в указанном круге $y_k(z, \lambda_j)$ регулярны). Тогда в достаточно малой окрестности точки z_0 $P(z)=\lim_{n\to\infty} P_n(z)$ удовлетворяет уравнению (4)

$$M(y)=0$$

и существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} a_{nj}^{(k)}=a_j^{(k)}.$$

2. Последовательность (1) и последовательность

$$\widetilde{P}_n(z)=\sum_{j=1}^{\widetilde{p}_n}\sum_{k=1}^{s}\widetilde{a}_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j)\quad (n=1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющие обе сформулированным выше условиям, сходятся к одной и той же функции тогда и только тогда, когда $a_j^{(k)}=\widetilde{a}_j^{(k)}$ при всех j и k.

Обобщается теорема Лиувилля: приводятся условия, когда из ограниченности предельной функции $f(z)$ последовательности

$$f(z)=\sum_{j=1}^{p_n} a_{nj}\, y(z, \lambda_j)\quad (n=1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

в определенной бесконечной области следует, что $f(z)\equiv\text{const}$.

Исследуется вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j)\right)$$

и его частичных сумм.

Для последовательности (5) доказывается аналог теоремы для полиномов Дирихле: Если последовательность (5) равномерно сходится в круге $|z-z_0|\leqslant r$ с $q(z_0)<1$, то она равномерно сходится в некоторой большей области (область указывается).

Полученные результаты применяются к последовательностям линейных агрегатов, составленных из полиномов Якоби, полиномов Чебышева — Лагерра, полиномов Чебышева — Эрмита, из цилиндрических функций. Сформулированы некоторые нерешенные проблемы. Имеются также некоторые интерполяционные теоремы.

М. В. Федорюк

3691. Разложения на компоненты специального вида и разложения нуля. Ленер (Partial fraction decomposition and expansions of zero. Lehner Joseph), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 130—143 (англ.)

Автор рассматривает представление функции $f(x)$, аналитической в круге $|x|<1$, в виде равномерно сходящегося ряда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Phi_k\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right),$$

где последовательность $\{\alpha_k\}$ ограничена, ε_k — комплексные попарно различные и $|\varepsilon_k|=1$, а $\Phi_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_k(n)x^n$ — функция, аналитическая в расширенной плоскости всюду, кроме точки $x=1$ ($\Phi_k(\infty)=0$). Тогда можно считать (по теореме Вигерта — Ло), что $g_k(z)$ — целая функция класса (0,1), т. е. $|g_k(z)|<e^{\varepsilon|z|}$ при любом $\varepsilon>0$ и $|z|>R(\varepsilon)$.

Рademахер нашел такое представление для функции

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)\,x^n \qquad \text{при } |x|<1.$$

При этом оказалось, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Phi_k\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) \tag{1}$$

при $|x|>1$ равномерно сходится к нулю.

Равенство $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Phi_k\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)=0$ называется разложением нуля.

В работе получены следующие результаты:

Теорема 1. Если $g_k(z)$ — целые функции класса (0,1), ряды $\sum_{k=0}^{\infty}|g_k(n)|$ сходятся при всех целых n и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[|n|]{\sum_{k=0}^{\infty}|g_k(n)|}\leqslant 1, \tag{2}$$

$\{\alpha_k\}$ ограничена, ε_k — попарно различные комплексные числа и $|\varepsilon_k|=1$, то ряд (1) равномерно сходится на каждом замкнутом множестве, не содержащем точек окружности $|x|=1$, и определяет две аналитические функции

$$G_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad \text{при } |x|<1$$

и

$$G_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-a_{-n}x^{-n} \qquad \text{при } |x|>1,$$

где

$$a_n=\sum\alpha_k\varepsilon_k^{-n}g_k(n). \tag{3}$$

Теорема 2 (обратная). Если ряд (1) равномерно сходится на каждом замкнутом множестве, не содержащем точек окружности $|x|=1$, то последовательность $g_k(z)$ обладает свойством (2) и коэффициенты функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ определяются по формуле (3).

Теорема 3. Пусть M — замыкание множества $\{\varepsilon_k\}$. Если выполнены условия теоремы 1 и при любом $\varepsilon>0$ существует A_ε такое, что для всех j

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_{k,j}|\leqslant A_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{j+1}\right)^j, \tag{4}$$

где $g_k(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_{kj}z^j$, то ряд (1) равномерно сходится на каждом замкнутом множестве, не содержащем точек множества M.

Автор отмечает, что он не смог выяснить, существенно ли условие (4).

Следствие. Если M не совпадает с окружностью $|x|=1$, то $G_1(x)$ и $G_2(x)$ будут аналитическими продолжениями друг друга.

Теорема 4. Если $G(x)$ аналитическая в круге $|x|<1$, имеет ограниченные коэффициенты Тейлора, а функции $g_k(z)$ таковы, что

$$\sup_{n>0}\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_k^{-n}g_k(n)-\delta_{k,n}|=k<1$$

($\delta_{k,n}=0$ при $k\neq n$, $\delta_{k,n}=1$ при $k=n$),

то существует ограниченная $\{\alpha_k\}$ такая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Phi_k\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)=G(x)$$

в круге $|x|<1$.

Полагая в теореме 4 $G(x)=x^{l-1}$, где l — натуральное число, найдем последовательность $\{\alpha_k^{(l)}\}$ такую, что

$$x^{l-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(l)}\Phi_k\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right).$$

Дифференцируя это равенство l раз, получим разложение нуля:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(l)}\Psi_{k,l}\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)=0, \tag{5}$$

где $\Psi_{k,l}(x)=\varepsilon_k^{-l}\Phi_k^{(l)}(x)$, т. е. также целая от $\frac{1}{1-x}$.

При этом число слагаемых в равенстве (5) не может быть конечным.

Более того, если $g_k(z)$ удовлетворяют условию (4), то при фиксированном l множество тех ε_k, для которых $\alpha_k^{(l)}\neq 0$, будет всюду плотно на окружности $|x|=1$. В противном случае было бы возможно аналитическое продолжение функции x^{l-1} на всю расширенную плоскость, что конечно неверно. Г. А. Фридман

3692. Об устойчивости базиса $\{z^n\}$. Драгилев М. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, 3, 67—73

Из последовательностей функций

$$\{z^n-\lambda f_n(z)\},\quad f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{kn}z^k,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

аналитических в точке $z=0$, выделяются некоторые классы функций, в известном смысле „близкие“ к системе степеней $\{z^n\}$, $n=0,1,2,\ldots$. Эти классы, однако, не настолько „близки“ к $\{z^n\}$, чтобы система (1) обра-

зовывала базис в A_r-пространстве функций, регулярных в круге $|z|<r$. Ставится вопрос, при каких дополнительных необходимых и достаточных условиях каждая последовательность (1) рассматриваемого класса будет базисом в A_r.

Обозначения:

1) $M_n(r)=\max\limits_{|z|\leqslant r}|f_n(z)|$, $0\leqslant r<\infty, n=0,1,2,\ldots$

2) $\mu_0(r)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{M_n(r)}{r^n}$; $\quad\mu(r)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left[\dfrac{M_n(r)}{r^n}\right]^{1/n}$;

3) $r\in T_{\mu<1}$, если $\mu(r)\leqslant 1$, и $r\in T_{\mu<1}$, если $\mu(r)<1$;

4) $r\in T_{\mu_0<\infty}$, если $\mu(r)=1$, а $\mu_0(r)<\infty$;

5) $r\in T_{\mu_0=0}$, если $\mu(r)=1$ и $\mu_0(r)=0$.

Используя матричный признак базиса М. Г. Хапланова (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 2, 177 – 180), автор доказывает следующую теорему.

Теорема 1. Пусть множество $T_{\mu_0}=0$ содержит более одной точки. Чтобы при этом условии последовательность (1) была базисом в A_r $(0\leqslant R_1<r\leqslant R_2\leqslant\infty)$ для всех значений λ, кроме некоторого счетного множества комплексных чисел S, не имеющего предельных точек на конечном расстоянии, достаточно, чтобы интервал (R_1, R_2) содержался в $T_{\mu_0<\infty}$, и необходимо, чтобы он содержался в $T_{\mu<1}$.

Если необходимое условие не соблюдается, то последовательность (1) не может быть базисом в A_r ни при одном значении $\lambda\neq 0$.

Показывается, что в данных предположениях о последовательности (1) нельзя достичь сближения необходимого и достаточного условий теоремы путем прямого усиления первого и ослабления второго.

Из первой части теоремы 1 вытекает как следствие ряд ранее полученных в этой области результатов (РЖМат, 1953, 1257, 1718; 1957, 356).

Доказываются также еще два подобного рода критерия устойчивости базиса $\{z^n\}$, соответственно в более широком ($T_{\mu_0<\infty}$ не пусто) и в более узком ($T_{\mu<1}$ не пусто) классах последовательностей (1). В своих „достаточных" частях эти теоремы примыкают к работе К. М. Фишмана и Ю. Н. Валицкого (РЖМат, 1959, 566).

Ю. А. Казьмин

3693. Простые базисы и автоморфизмы в пространстве целых функций. Арсов (Proper bases and automorphisms in the space of entire functions. Arsove Maynard G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 12, 264—271 (англ.)

В пространстве Г целых функций, изучавшемся в ряде работ Ганапати Ийером (Ganapathy Iyer V.), автор вводит понятие простого базиса, отличное от данного Ийером. Пусть $\{\alpha_n(z)\}$ — заданная последовательность целых функций. Рассматривается подпространство $\Gamma_0\subset\Gamma$ всевозможных функций, представимых рядами $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\alpha_n(z)$, где $\{c_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n\alpha_n(z)|$ равномерно сходится в любом круге. Если при этом каждая функция $f(z)\in\Gamma_0$ представима указанным образом единственным способом, то $\{\alpha_n(z)\}$ называется абсолютным базисом в Γ_0. Абсолютный базис называется простым, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n\alpha_n(z)|$ равномерно сходится в любом круге тогда и только тогда, когда $|c_n|^{1/n}\to 0$. Доказывается:

Теорема 1. Чтобы абсолютный базис был простым, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup[M_n(R)]^{1/n}<\infty$ для каждого $R>0$,

2) $\lim\limits_{R\to\infty}\{\liminf\limits_{n\to\infty}[M_n(R)]^{1/n}\}=+\infty$, где $M_n(R)=\max\limits_{|z|=R}|\alpha_n(z)|$.

Опираясь на один результат Г. Ийера, автор доказывает следующую теорему:

Теорема 2. Линейное гомеоморфное отображение пространства Г в себя (в частности, автоморфное отображение Г в себя) переводит степенной базис $\{z^n\}$ в простой, и обратно, если $\{\alpha_n(z)\}$ — простой базис в Γ_0, то существует линейное гомеоморфное отображение Г в Γ_0.

Отсюда выводится

Следствие. Если $\{\alpha_n(z)\}$ — простой базис и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\alpha_n(z)$ сходится равномерно в каждом круге, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n\alpha_n(z)|$ также равномерно сходится в любом круге.

Примечание референта. Простой базис автора является частным случаем (когда $R=\infty$) квазистепенного базиса, введенного референтом (Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 2, 177—180), теорема 1 — частным случаем результата Ю. Ф. Коробейника (РЖМат, 1959, 281), а следствие — частным случаем общего результата М. М. Драгилева (реф. 3692). М. Г. Хапланов

3694. Простые базисы Пинкерле в пространстве целых функций. Арсов (Proper Pincherle bases in the space of entire functions. Arsove M. G.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 33, 40—54 (англ.)

В пространстве Г целых функций рассматриваются базисы вида $\alpha_n(z)=z^n\{1+\lambda_n(z)\}$, $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^{(n)}z^k$, которые называются базисами Пинкерле. Автор несколько изменяет ранее им же данное определение простого базиса (см. предыдущий реферат)— равномерная сходимость в любом круге требуется не для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n\alpha_n(z)|$, а для $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\alpha_n(z)$. Двумя способами — опираясь на достаточные признаки базиса Боаса и Наруми — доказывается теорема, являющаяся обобщением одной теоремы Ганапати Ийера.

Теорема. Пусть $\{\alpha_n(z)\}$ — последовательность целых функций $\alpha_n(z)=z^n\{1+\lambda_n(z)\}$, $\lambda_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}z^k$.

Каждое из условий:

1) $\lim\limits_{R\to\infty}\{\limsup\limits_{n\to\infty}|\lambda_n; R|\}<\infty$, $|\lambda_n, R|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k^{(n)}|R^k$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n; R|=0$, для каждого $R>0$;

3) $\lambda_n(z)\to 0$ равномерно в каждом круге;

4) $N(\lambda_n) \to 0$, $N(\lambda_n) = \sup_k \{ | a_k^{(n)} |^{\frac{1}{k}} \}$;

достаточно, чтобы $\{\alpha_n(z)\}$ был бы простым базисом в Г.

Опираясь на эту теорему, автор доказывает, если $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ — целая функция 1-го порядка нормального типа, $t_0 \neq 0$, $\{n | t_n |^{\frac{1}{n}}\}$, $n \geqslant 1$, ограничены снизу положительным числом, то как последовательность функций $\alpha_n(z) = \frac{1}{t_n}\left\{\varphi(z) - \sum_{k=0}^{n-1} t_k z^k\right\}$, так и $\beta_n(z) = z^n(1 - \frac{t_{n+1}}{t_n} z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют простые базисы в Г.

Для полиномиальных базисов доказывается, что для бесконечного множества значений n полиномы $\alpha_n(z)$ имеют степень, не меньшую n. М. Г. Хапланов

3695. Граница односвязной области. Пиранян (The boundary of a simply connected domain. Piranian George), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 2, 45—55 (англ.)

Пусть C — единичная окружность $|z| = 1$ и $U(B)$ — множество простых концов односвязной ограниченной плоской области B. По известной классификации Каратеодори это множество слагается из множеств простых концов четырех типов: $U(B) = \cup_{k=1}^{4} U_k(B)$. Автор формулирует проблему (1): Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы для разложения $C = \cup_{k=1}^{4} E_k$ окружности на четыре множества E_k, $E_k \cap E_{k'} = \theta$ при $k \neq k'$, существовали ограниченная однолистная область B и конформное отображение f единичного круга на эту область такие, что $U_k(B) = f(E_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Автор отмечает, что для частного случая, когда $U_k(B)$, $k = 3, 4$, заранее предполагаются пустыми, решение этой проблемы значительно упрощается и может быть получено, опираясь на результаты Вениаминова-Урысона (Матем. сб., 1922, 31 : 1, 86—90, 91—93), Коллингвуда (РЖМат, 1957, 4728) и недавние результаты совместной работы автора с Ловатером.

В общем случае задача сильно усложняется тем, что в отличие от этого частного случая здесь потребуются какие-то ограничения метрического (а не только топологического) характера. В связи с этим автор ставит облегченную задачу (проблема (2)): ответить на тот же вопрос, не ограничиваясь рассмотрением только конформных отображений, а допуская любые гомеоморфизмы между замкнутым кругом и областями, замкнутыми множеством своих простых концов.

Основной результат работы состоит в решении этой проблемы (2) для случая, когда $U_4(B)$ — пусто. В этом случае для существования области B и гомеоморфизма f таких, что $U_k(B) = f(E_k)$, $k = 1, 2, 3$, необходимы и достаточны условия: $E_1 = C \setminus \cup F_n$, $E_2 = \cup(F_n \setminus M_n)$, $E_3 = \cup M_n$, где F_n и M_n — последовательности множеств на C, обладающие свойствами: 1) F_n попарно без общих точек и при любом m множество $\cup_{n=1}^{m} F_n$ замкнуто; 2) для всех n множество M_n типа G_δ и $M_n \subset F_n$, причем в каждом открытом подмножестве F_n как M_n, так и его дополнение имеют мощность континуума. Г. Д. Суворов

3696. Теорема Г. Бора и ее обобщения. Трохимчук Ю. Ю., Матем. сб., 1958, **45**, № 2, 233—260

Пусть $w = f(z)$ — непрерывное отображение области D. $f(z)$ обладает в точке z постоянным растяжением, если существует предел $\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = \rho(z)$. Согласно известной теореме Г. Бора (Bohr H., Math. Z., 1918, 403—420), однолистное отображение $f(z)$, обладающее в каждой точке конечным ненулевым растяжением, является конформным, либо сопряженным к конформному. Обобщая эту теорему, Д. Е. Меньшов (Bull. Soc. Math. France, 1931, **59**, № 3-4, 141—182) показал, в частности, что требование $\rho(z) > 0$ несущественно.

В § 1 реферируемой статьи автор показывает, что для сохранения теоремы Бора требование $\rho(z) < \infty$ также несущественно; при этом автор опирается на свой более ранний результат (РЖМат, 1957, 8561), из которого следует, что при сделанных предположениях $\rho(z) < \infty$ почти всюду.

§§ 2—3 содержат доказательство основного результата работы (теорема 4), содержащего распространение теоремы Бора на неоднолистные отображения, подчиняющиеся некоторому дополнительному требованию. Это требование по существу сводится к требованию, чтобы отображение в окрестности точек, в которых $\rho(z) > 0$, сохраняло направление обхода замкнутых кривых. Доказательство существенно опирается на лемму топологического характера (лемма 4), представляющую самостоятельный интерес. Вот ее формулировка: пусть в области d плоскости z расположено произвольное совершенное и нигде не плотное множество точек k; пусть $f(z)$ непрерывна внутри d, аналитична в $d \setminus k$ и вполне однолистна на k (т. е. $f(z_1) \neq f(z_2)$, если $z_1 \neq z_2$, $z_1 \in k$, $z_2 \in d$). Тогда, какова бы ни была точка множества k, найдется такая ее окрестность, в которой $f(z)$ однолистна.

Пример функции

$$B(z) = \begin{cases} z & \text{при } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \quad \text{и } |z| < 1 \\ \overline{z} & \text{при } \operatorname{Im} z < 0 \quad \text{и } |z| < 1 \end{cases}$$

показывает, что теорема Бора неверна для произвольных непрерывных отображений, для которых существует $\rho(z)$. Однако, если множество корней уравнения $\rho(z) = 0$ не более чем счетно в D, то, как показывает автор в § 4 работы, существует всюду плотное в D открытое множество O, в каждой компоненте которого либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ аналитична, причем существует всюду плотная на $D \setminus O$ не более чем счетная совокупность аналитических дуг, вблизи каждой из которых $f(z)$ конформно эквивалентна функции $B(z)$.

В § 5 рассматриваются подобные утверждения для отображений с непрерывным $\rho(z)$.

Примечание референта. Лемма 4 реферируемой работы для случая, когда k есть граница односвязной области, следует из результатов статьи Стоилова (Fundam. math., 1929, **13**, 106), в которой подобные утверждения рассмотрены для внутренних отображений. И. Н. Песин

3697. Некоторые обобщения формулы Шварца—Кристоффеля. Вудс (Some generalizations of the Schwarz-Christoffel mapping formula. Woods L. C.), Appl. Scient. Res., 1958, **B7**, № 2, 89—101 (англ.)

В § 1 автор нестрогим способом получает функциональное уравнение

$$\ln \frac{az}{dw} = \ln K - \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{+\infty} \ln(w - \varphi)\, d\theta_0(\varphi) \qquad (1)$$

для функции $z = f(w)$, осуществляющей однолистное конформное отображение на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

произвольной однолистной односвязной области B_z z-плоскости, граница которой Γ_z состоит из конечного числа кусочно-гладких дуг с конечным числом угловых точек. В формуле (1) K обозначает отличную от нуля комплексную постоянную, а $\theta_0(\varphi)$ есть вещественная функция с ограниченным изменением на интервале $(-\infty; +\infty)$. Интеграл в (1) понимается в смысле Стилтьеса. Точка ∞ может быть кратной угловой точкой границы Γ_z. В § 2 автор дает строгий вывод формулы (1) в указанных предположениях. В § 3 рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\ln\theta_0'(\varphi) = \ln|K| - \ln[R\theta_0(\varphi)] - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_0'(\varphi^*)\ln|\varphi-\varphi^*|\,d\varphi^*, \quad (2)$$

служащее для определения функции $\theta_0(\varphi)$ в формуле (1). Это уравнение справедливо в предположении, что граница области есть простая замкнутая кусочно-гладкая кривая с неотрицательной кусочно-непрерывной кривизной $\frac{1}{R}$. Для определения постоянной $|K|$ используется уравнение

$$l = |K| \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|\varphi-\varphi^*|\,d\theta_0(\varphi^*)\right\}d\varphi,$$

где l — длина Γ_z. Для решения уравнения (2) автор предлагает некоторый, наиболее удобный, по его мнению, итерационный процесс без доказательства его сходимости. В § 4 выводится функциональное уравнение для функции, осуществляющей неоднолистное конформное отображение области B_z, рассмотренной выше, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, при условии, что точке $w = \infty$ соответствует некоторая внутренняя точка P области B_z. Наконец, в § 5 устанавливается функциональное уравнение для функций, осуществляющих неоднолистное конформное отображение на прямоугольник $-a \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant a$, $0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant b$ (a, b — постоянные > 0) однолистных двусвязных областей z-плоскости, граница которых состоит из двух простых замкнутых кусочно-гладких кривых.

Примечания референта. Формула (1) автора, даже в более общих предположениях относительно Γ_z, является следствием формулы В. Паатеро (Paatero V., Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1931, **A33**, № 9)

$$\varphi(z) = A\int\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-ze^{-i\theta})\,d\mu(\theta)\right\}dz + B$$

для класса функций, осуществляющих однолистное конформное отображение круга $|z| < 1$ на так называемые области с „ограниченным краевым вращением". Формула § 4 есть следствие формулы (1), если воспользоваться вспомогательным конформным отображением полуплоскости $\operatorname{Im}\omega > 0$ с разрезом вдоль луча $(ih, i\infty)$ на полуполосу $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$, $-a \leqslant \operatorname{Re}\omega \leqslant a$ (a — постоянная > 0). Наконец, формула § 5, даже в более общих предположениях относительно границы двусвязной области, является непосредственным следствием формулы, установленной референтом (РЖМат, 1957, 4737) для класса функций, реализующих однолистное конформное отображение кругового кольца на однолистные двусвязные области с „ограниченным краевым вращением". Достаточно неоднолистно отобразить круговое кольцо на прямоугольник при помощи логарифмической функции.

В. А. Зморович

3698. Одна контактная проблема конформных отображений. Вагнер (Ein Kontaktproblem der konformen Abbildung. Wagner Richard), J. reine und angew. Math., 1956, **196**, № 1-2, 99—132 (нем.)

Пусть R — конечная плоскость комплексного переменного z, C_{00}^s ($s = 1, 2, \ldots, k$) — k замкнутых жордановых кривых, внутренние области G_{00}^s которых не пересекаются и не имеют точек, эквивалентных относительно группы преобразований $T_{\lambda\mu}(z) = z + 2\lambda\omega + 2\mu\omega'$, и $C_{\lambda\mu}^s = T_{\lambda\mu}(C_{00}^s)$, $G_{\lambda\mu}^s = T_{\lambda\mu}(G_{00}^s)$. Допускаются пересечения кривых при условиях, что две кривые могут иметь не более одной точки контакта и в каждой точке контакта встречаются только две кривые $C_{\lambda\mu}^s$. Состоящее в общем случае из счетной совокупности „ячеек" множество $B = R - \sum \overline{G}_{\lambda\mu}^s$ автор, следуя предложенной Коебе терминологии, называет двоякопериодической контактной областью, или, если B связно,— просто „двоякопериодической областью". В случае, если каждая из кривых $C_{\lambda\mu}^s$ — окружность $K_{\lambda\mu}^s$, контактная область называется, как обычно, круговой.

Доказывается существование взаимно однозначного и конформного в каждой из ячеек отображения двоякопериодической контактной области на некоторую круговую двоякопериодическую (вообще, с другой группой $T_{\lambda\mu}$) контактную область, при котором каждая из кривых $C_{\lambda\mu}^s$ переходит в окружность $K_{\lambda\mu}^s$ и точки контакта ограничивающих ячейки частей кривых $C_{\lambda\mu}^s$ — в соответствующие точки контакта окружностей $K_{\lambda\mu}^s$. Доказана единственность такого отображения с точностью до линейного преобразования. Предварительно проведено доказательство существования и единственности взаимно однозначного конформного отображения связной двоякопериодической области на круговую двоякопериодическую, а также детально изучен частный случай отображения на круговую область плоскости R с разрезами по отрезкам $T_{\lambda\mu}(-l \leqslant z \leqslant l)$, $l \leqslant \omega$. П. П. Куфарев

3699. О тождествах в теории конформных отображений. Се Хуэй-чунь (Shieh Hui-chun), Чжуншань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), 1957, № 2, 7—19 (кит.; рез. англ.)

Пусть B—n-связная область, ограниченная n замкнутыми аналитическими кривыми $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Пусть $j_0(z, a)$ и $j_{\frac{\pi}{2}}(z, a)$ — две однолистные функции в B, регулярные, за исключением полюса в точке $z = a$ с вычетом, равным 1; $j_0(z, a)$ отображает B на комплексную плоскость с разрезами вдоль отрезков, параллельных действительной оси, $j_{\frac{\pi}{2}}(z, a)$ отображает B на комплексную плоскость с разрезами вдоль отрезков, параллельных мнимой оси. Положим

$$P(z, a) = \frac{1}{2}\left[j_{\frac{\pi}{2}}(z, a) - j_0(z, a)\right],$$

$$Q(z, a) = \frac{1}{2}\left[j_{\frac{\pi}{2}}(z, a) + j_0(z, a)\right].$$

Известно, что на K_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$\overline{P(z, a)} + Q(z, a) = k_\nu(a).$$

$\overline{P(z, a)}$ сопряжено с $P(z, a)$, $k_\nu(a)$ не зависит от z.

Интегрированием по контуру автор получает следующие результаты:

I. $$\frac{d}{dz}\left[P(z,a)\,Q(z,a)\right]=\frac{d}{dz}\left[P(z,a)\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu(a)\right],$$

$$Q(z,a)=\frac{P_z'(a,a)}{P(z,a)}+\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu(a).$$

II. Если $f(z)$ отображает B на внешность круга $|w|>1$ с разрезами вдоль круговых дуг с центром в начале координат и если притом $f(z)$ аналитична на кривых $K_1, K_2, \ldots, K_n$ (где $|w|=1$ соответствует K_1), то

$$f(z)=\exp\left(-\int k_1(z)\,dz+\int[Q(a,z)+\overline{P(a,z)}]dz\right).$$

III. Если $f(z)$ отображает B на n-листную внешность круга $|w|>1$ и в точках $a_1, a_2, \ldots, a_N \in B$ $(N\leqslant n)$ имеет полюсы соответствующих порядков $n_1, n_2, \ldots, n_N$ $(n_1+n_2+\cdots+n_N=n)$, и если притом $f(z)$ аналитична на кривых K_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, то

$$f(z)=\exp\left(-\sum_{\nu=1}^{n}\int k_\nu(z)dz+\sum_{\nu=1}^{N}n_\nu\int[Q(a_\nu,z)+\overline{P(a_\nu,z)}]dz\right).$$

Резюме автора

3700. Области начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций p-кратной симметрии. Базилевич И. Е., Матем. сб., 1957, **43**, № 4, 409—428

Пусть: $S_p(M)$ $(p=1,2,\ldots)$ — класс регулярных и однолистных в $|z|<1$ функций $w=f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}c_{kp+1}z^{kp+1}$, удовлетворяющих условию $|f(z)|<M$ $(M>1)$ в $|z|<1$; $S_p^{-1}(M)$ — класс обратных им функций, имеющих в окрестности точки $w=0$ разложение в ряд:

$$z=\varphi(w)=w+\sum_{k=1}^{\infty}c'_{kp+1}w^{kp+1};$$

$\sum_p(m)$ — класс функций, полученных из класса $S_p(M)$ преобразованием

$$F(\zeta)=f^{-1}(\zeta^{-1}),\ \omega=F(\zeta)=\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_{kp-1}}{\zeta^{kp-1}},$$

$|\zeta|>1$, $|\omega|>m=M^{-1}$; $\sum_p^{-1}(m)$ — класс обратных им функций, имеющих в окрестности $\omega=\infty$ разложение в ряд

$$\zeta=\Phi(\omega)=\omega+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma'_{kp-1}}{\omega^{kp-1}}.$$

Каждой функции $f(z)\in S_p(M)$ сопоставим в соответствие точку $Q(|c_{p+1}|,|c_{2p+1}|)$. Множество всех таких точек обозначим через $D(|c_{p+1}|,|c_{2p+1}|)$. Автор, пользуясь одной ранее им доказанной леммой и параметрическим представлением Левнера однолистных функций, находит область $D(|c_{p+1}|,|c_{2p+1}|)$. Пусть $c_{kp+1}=a_{kp+1}+ib_{kp+1}$. Каждой функции $f(z)\in S_p(M)$ такой, что $b_{p+1}=b_{2p+1}=0$, поставим в соответствие точку $P(a_{p+1},a_{2p+1})$. Множество всех таких точек обозначим через $D_*(a_{p+1},a_{2p+1})$. Тем же методом автор находит область $D_*(a_{p+1},a_{2p+1})$. В этой работе автор ставит и решает аналогичные задачи для классов

$$S_p^{-1}(M),\ \sum_p(m)\ \text{и}\ \sum_p^{-1}(m).$$

Примечание референта. Представляет интерес решить следующую задачу: каждой функции $f(z)\in S_1(M)$ такой, что $b_{p+1}=0$, поставим в соответствие точку $P(a_2,a_3,b_3)$. Множество всех таких точек обозначим через $D(a_2,a_3,b_3)$. Значение области $D(a_2,a_3,b_3)$ методами вещественного анализа позволило бы, в частности, получить указанные выше результаты. И. Е. Базилевича.

Н. А. Лебедев

Примечание редакции. Автор просил указать, что, как ему стало известно, оценка коэффициента c_3 была в 1953 г. установлена независимо от Тамми польским математиком Яновским, о чем анонсировано в статье Хажинского (РЖМат, 1954, 5536). Подробное изложение было дано Яновским в 1955 г. (Janowski, Ann. polon. math., 1955, **11**, 2).

3701. Дальнейшие замечания о теоремах Шильда, относящихся к некоторому классу однолистных функций. (Доказательство гипотезы Шильда). Левандовский (Nouvelles remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes (Démonstration d'une hypothèse de Schild). Lewandowski Zdzislaw), Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, 1956 (1958), **A10**, 81—94 (франц.; рез. польск., русск.)

Рассматриваются полиномы вида

$$f_p(z)=z-\sum_{n=2}^{N}a_nz^n,\ a_n\geqslant 0,$$

однолистные в единичном круге и многолистные в бо́льшем круге. Доказывается, что для полиномов $f_p(z)$ имеет место неравенство $d^0/d^*\geqslant 3/4$, где d^0 и d^* суть радиусы наибольших кругов с центром в начале координат, покрываемых соответственно образом круга $|z|\leqslant r_0$ (r_0 — радиус выпуклости полиномов $f_p(z)$) и образом единичного круга.

Для $f_p^*(z)=z-z^2/2$ имеем $d^0/d^*=3/4$. Шильд в своей работе (РЖМат, 1955, 1162) доказал только, что $d^0/d^*>2/3$.

Л. И. Колбина

3702. Некоторые неравенства для однолистных функций. Лю Ли-цюань (Liu Li-chuan), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 2, 313—326 (кит.; рез. англ.)

Пусть S — класс функций

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots,$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$; S_M — подкласс S, содержащий функции $f(z)\in S$ такие, что $|f(z)|<M$ при $|z|<1$; Σ — класс функций

$$F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\frac{\alpha_1}{\zeta^2}+\ldots,$$

регулярных и однолистных в области $1<|\zeta|<\infty$; Σ_R — подкласс Σ, содержащий функции $F(\zeta)\in\Sigma$ такие, что $|F(\zeta)|>R$ при $|\zeta|>1$.

Автором доказываются:

Теорема 1. Если $F(\zeta)\in\Sigma$, то

$$\left|\alpha_5+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2+\frac{1}{3}\alpha_1^3\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

Знак равенства достигается только при $\alpha_3=0$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_4=0$. В случае $\alpha_1=0$ равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$F(\zeta)=\zeta\left(1-\frac{\eta x}{\zeta^3}+\frac{\eta^2}{\zeta^6}\right)^{1/3}+\text{const},\ 0\leqslant|x|\leqslant 2,\ |\eta|=1.$$

Теорема 2. Если $F(\zeta)\in\Sigma$, то

$$|\alpha_1\alpha_2|<P\quad(P=0{,}311\ldots),$$

где

$$P=\frac{4}{9}x_0+\frac{2}{27}x_0^2-\frac{4}{27}x_0^3-\frac{14}{243}x_0^4-\frac{4}{729}x_0^5,$$

а $x_0=0{,}92402,\ldots$ есть положительный корень уравнения $5x^3+27x^2-27=0$.

Равенство имеет место только для

$$F(\zeta)=\zeta\left(1+\frac{x_0\eta}{\zeta}-\frac{x_0\eta^2}{\zeta^2}-\frac{\eta^3}{\zeta^3}\right)^{2/3}+\text{const},\ |\eta|=1.$$

Теорема 3. Если $f(z)=z+a_{n+1}(M)z^{n+1}+\ldots\in S_M$, то имеет место точная оценка

$$|a_{\mu+1}(M)|\leqslant\frac{2}{\mu}\left(1-\frac{1}{M^{\mu}}\right),\ \mu=n,\ldots,2n.$$

Теорема 4. Если $F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_n(R)}{\zeta^n}+\ldots\in\Sigma_R$, то имеет место точная оценка $|a_{\mu-1}(R)|\leqslant\frac{2}{\mu}(1-R^{\mu})$, $\mu=n+1,\ldots,2n+1$.

Теоремы 3 и 4 сводятся к теоремам Голузина при $M\to\infty$ и $R\to 0$. В. Н. Телиянц

3703. Об экстремальных значениях модуля производной однолистных ограниченных функций. Яновский (Sur les valeurs extrémales du module de la dérivée des fonctions univalentes bornées. Janowski W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 4, 255—259 (франц.; рез. русск.)

Пусть S_M — семейство всех функций вида $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих в нем условию $|f(z)|<M$ $(M>1)$.

Теорема. Для любой функции $f(z)\in S_M$ имеют место точные оценки:

$$A(|z|,M)\leqslant|f'(z)|\leqslant B(|z|,M).$$

Здесь для любой точки $(|z|,M)$ области $D_0\{0<|z|<1,\ M>1\}$ $A(|z|,M)=\frac{x}{|z|}\cdot\frac{M+x}{M-x}\cdot\frac{1-|z|}{1+|z|}$, x есть решение уравнения

$$\frac{(M+x)^2}{M^2x}=\frac{(|z|+1)^2}{|z|},\quad 0<x<(\sqrt{2}-1)M.$$

Величина $B(|z|,M)$ имеет три различных выражения в зависимости от того, в какую из частей области D_0 попадает точка $(|z|,M)$. Эти выражения слишком громоздки для их воспроизведения здесь. Доказательство (приводится только его идея) основано на результатах Хажинского и автора (Charzyński Z., Janowski W. Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1950, A4, 41—56) для ограниченных однолистных функций. Ю. Е. Аленицын

3704. Однолистные ряды Дирихле. Робертсон (Schlicht Dirichlet series. Robertson M. S.), Canad. J. Math., 1958, 10, № 2, 161—176 (англ.)

Пусть функция $f(s)$ задана рядом Дирихле:

$$f(s)=-e^{-\lambda_1 s}+\sum_{n=2}^{\infty}a_ne^{-\lambda_n s},\quad s=\sigma+it,\qquad(1)$$

абсцисса абсолютной сходимости которого есть σ, $-\infty<\sigma<\infty$. Тогда существует наименьшее вещественное число τ, $\sigma<\tau<\infty$, для которого

$$\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n|a_n|e^{-\lambda_n\tau}<1.\qquad(2)$$

Функция $f(s)$ называется функцией класса τ, если она представима рядом (1) Дирихле, удовлетворяющим условию (2).

Доказываются три теоремы о равномерной локальной однолистности функций класса τ.

Теорема 1. Пусть

$$f(s)=-e^{-\lambda_1 s}+\sum_{n=q}^{\infty}a_ne^{-\lambda_n s},\ a_q\neq 0,\ s=\sigma+it,$$

есть функция класса τ. Тогда для любого ε, $0<\varepsilon<1$, $f(s)$ однолистна в каждом круге $|s-s_0|\leqslant(1-\varepsilon)\pi/\lambda_1$, где $\operatorname{Re}s_0>\alpha$,

$$\alpha=\max\left\{\tau+\frac{(1-\varepsilon)\pi}{\lambda_1},\ \frac{3\ln(2-\varepsilon)-\ln(\lambda_1\varepsilon)+\lambda_q\tau+(1-\varepsilon)\pi\lambda_q/\lambda_1}{\lambda_q-\lambda_1}\right\}.$$

Множитель π/λ_1 радиуса $(1-\varepsilon)\pi/\lambda_1$ не может быть заменен большим.

Вторая теорема утверждает, что полуплоскость равномерной локальной однолистности функций класса, рассмотренного в теореме 1, определяется условиями:

$$\operatorname{Re}s>\begin{cases}\tau, & \text{если } \tau<\dfrac{\ln\lambda_1}{\lambda_1}\\ \dfrac{-\ln\lambda_1}{\lambda_q-\lambda_1}\geqslant\tau, & \text{если } \tau\geqslant\dfrac{\ln\lambda_1}{\lambda_1}.\end{cases}$$

Как приложение этой теоремы, доказывается, что дзета-функция Римана $\zeta(s)$ локально однолистна в полуплоскости $\operatorname{Re}s>6{,}32$.

В третьей теореме в качестве областей однолистности рассматриваются бесконечные полуполосы.

Ю. Е. Аленицын

3705. О коэффициентах раздельно колеблющихся функций. Лю Цзюнь-сянь (Liou Tsyun Hyen), Чжуншань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), 1957, № 2, 1—6 (кит.; рез. англ.)

Автор называет регулярную в круге $|z|\leqslant r$ функцию $f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ раздельно колеблющейся функцией порядка m на окружности $|z|=r$, если она удовлетворяет следующим условиям: а) $f(z)\neq 0$ при $z\neq 0$, б) существует целое число m такое, что имеют место неравенства

$$\arg f(re^{\frac{k}{m}i\pi})\leqslant\arg f(re^{i\theta})\leqslant\arg f(re^{\frac{k+1}{m}i\pi}),$$

когда $\frac{k}{m}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{k+1}{m}\pi$, $k=0,1,\ldots,2m-1$.

Доказываются оценки

$$|a_n|\leqslant\frac{n}{2^{n-1}}\quad\text{для } n=2,3,\ldots,m+1.$$

С. А. Гельфер

3706. Об аналитических функциях, представимых интегралом типа Коши — Стилтьеса. Хавин В. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 1, 66—79

Пусть E — бесконечное замкнутое подмножество расширенной комплексной плоскости R, дополнение G которого непусто. Опираясь на теорему о продолжении линейного функционала, доказывается необходимое и достаточное условие для представимости аналитической в G функции $u(z)$ интегралом типа Коши-Стилтьеса:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{dg(e)}{\zeta-z}, \qquad z\in G. \tag{1}$$

Это условие заключается в том, что на множестве S_E всех функций $f(z)$, аналитических всюду в R, кроме конечного множества точек $L_f\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ (если $\infty\in G$, то $f(\infty)=0$) функционал

$$F(f)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a_k|=r_k} f(z)u(z)dz \tag{2}$$

будет непрерывным по норме $\|f\|_*=\max_{z\in E}|f(z)|$ (r_k выбраны в (2) так, что круги $|z-a_k|\leqslant r_k\subset G$ и попарно не пересекаются.)

В случае, когда G есть круг, этот результат был ранее получен Тейлором (Taylor A. E., Studia math., 1951, 11, 12).

В качестве следствия отмечается, что если E представляет из себя замыкание внутренности жордановой спрямляемой кривой L, то из представимости $u(z)$ интегралом типа Коши — Стилтьеса (1) вытекает представимость $u(z)$ интегралом типа Коши — Стилтьеса с функцией плотности, сосредоточенной на L.

Далее автор изучает свойства функций, представимых интегралами типа Коши — Стилтьеса, взятыми по единичной окружности. Доказывается теорема 3: представимость $u(z)$ в $|z|<1$ интегралом типа Коши—Стилтьеса равносильна выполнению условия

$$\sup_{f\in B_r}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} u(z)b(z)dz\right|\leqslant K,\quad 0<r<1,$$

где B_r — множество всех аналитических в $|z|>r$ функций $b(z)$ таких, что $b(\infty)=0$, а $|b(re^{i\theta})|=1$ почти всюду на $|z|=r$. Как известно, всякая функция $u(z)$, представимая интегралом типа Коши — Стилтьеса в единичном круге, входит во все классы H_δ, $0<\delta<1$ (теорема В. И. Смирнова). Автор дает достаточное условие для того, чтобы функция $u(z)\in\prod_{0<\delta<1}H_\delta$ представлялась интегралом типа Коши — Стилтьеса. Далее дается достаточный признак представимости функции $u(z)$ интегралом типа Коши, близкой, как показывает автор, к необходимому. Из других результатов, полученных автором, отметим лемму 2 из § 6: Если функция $u(z)$ представлялась интегралом типа Коши—Стилтьеса в круге $|z|<1$, то произведение этой функции на любую функцию $v(z)$, аналитическую в замкнутом круге, будет также представляться интегралом типа Коши — Стилтьеса.

Примечания референтов. Установленный автором в теореме 3 критерий представимости функции $u(z)$ интегралом типа Коши—Стилтьеса является двойственным выражением ранее доказанного критерия Г. Ц. Тумаркина (РЖМат, 1957, 4745). В самом деле, согласно соотношению двойственности С. Я. Хавинсона (РЖМат, 1953, 193), имеем:

$$\sup_{b\in B_r}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} u(z)b(z)dz\right|=\inf_{\Pi_n}\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|u(z)-\Pi_n(z)|d\theta,$$

где в правой части inf берется по всем суммам вида $\Pi_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{z^k}$. Поэтому равномерная ограниченность в правой части этого равенства (критерий Г. Ц. Тумаркина) влечет ограниченность левой части (критерий В. П. Хавина).

Заметим еще, что при доказательстве упомянутого выше следствия из теоремы 1 нет никакой необходимости требовать, чтобы замкнутое множество F было замыканием жордановой области со спрямляемой границей.

Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон

3707. Интеграл типа Коши и его единственность. Ван Хун-шэн, Бэйцзин ганте гунъе сюэюань сюэбао, Тр. Пекинск. Ин-та черной металлургии, 1958, № 5, 81—87 (кит.)

В заметке референта (РЖМат, 1957, 4745) были указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы пара функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$, аналитических соответственно в областях $|z|<1$ и $|z|>1$, были представлены одним интегралом типа Коши—Стилтьеса:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}d\sigma(\theta)}{e^{i\theta}-z}=\begin{cases}F_1(z), & |z|<1,\\ F_2(z), & |z|>1.\end{cases}$$

Аналогичными рассуждениями автор в теореме 1 легко устанавливает необходимые и достаточные условия представимости пары функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ одним интегралом типа Коши—Лебега:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases}F_1(z), & |z|<1,\\ F_2(z), & |z|>1,\end{cases} \tag{1}$$

заключающееся в равностепенной абсолютной непрерывности семейства $\left\{\int_0^{\varphi}\left[F_1(re^{i\theta})-F_2\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)\right]d\theta\right\}$, $0<\varphi<2\pi$, $0<r<1$. В теореме 2, подобной теореме 2 из упомянутой работы референта, указывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $F(z)$, аналитическая внутри круга $(z)<1$, была представима в $|z|<1$ интегралом типа Коши. Для этого должны существовать последовательности $\{\pi_n(\theta)\}$, $\pi_n(\theta)=a_1e^{-i\theta}+\ldots+a_ne^{-in\theta}$, и $\{r_n\}$, $0<r_n<1$, $\lim_{n\to1}r_n=1$, такие, что последовательность функций $\left\{\int_0^{\varphi}[F(r_ne^{i\theta})-\pi_n(\theta)]d\theta\right\}$, $0<\varphi<2\pi$, $n=1,2,\ldots$, будет равностепенно абсолютно непрерывна.

Примечание референта. 1. Доказательство необходимости в теореме 2 проведено некорректно, ибо оценка

$$|F(r_ne^{i\theta})-\pi_n(\theta)|\leqslant|F(r_ne^{i\theta})|^{\delta},\quad 0<\delta<1;$$

на которой оно основывается, вообще говоря, неверна. Доказать необходимость можно сразу же, если использовать теорему 1.

2. Теорема 3 автора, устанавливающая, что два интеграла типа Коши-Лебега

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\quad\text{и}\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f_2(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

изображают одну и ту же пару функций $F_1(z)$ (при $|z|<1$) и $F_2(z)$ (при $|z|>1$) только в том случае, если $f_1(\zeta)=f_2(\zeta)$ почти всюду на $|\zeta|=1$, есть немедленное следствие хорошо известного свойства интегралов типа Коши (1): $F_1(e^{i\theta})-F_2(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$ почти всюду на $[0,2\pi]$.

3. Условия представимости функций интегралами типа Коши, аналогичные приведенным выше, были независимо указаны В. П. Хавиным (реф. 3706). Г. Ц. Тумаркин

3708. О граничных значениях регулярных однолистных в круге $|z|<1$ функций некоторых специальных клас-

сов. **Юрченко А. К., Дундученко Л. Е.**, Укр. матем. ж., 1957, 9, № 4, 455—460

Рассматривается класс функций, звездных и однолистных в круге $|z|<1$. Функции $f(z)$ этого класса допускают, как известно, следующее представление

$$f(z)=ze^{-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-ze^{-i\theta})d\mu(\theta)} \qquad (1)$$

где $\mu(\theta)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[-\pi,\pi]$. Авторы формулируют и приводят доказательство теоремы: Функция $w=f(z)$ из класса (1) имеет на контуре $|z|=1$ точку разрыва тогда и только тогда, когда сингулярная часть функции $\mu(\theta)$ не есть тождественный нуль. При этом непрерывность понимается в обобщенном смысле: точка ζ, $|\zeta|=1$, есть точка разрыва, если не существует предела (конечного или бесконечного) $\lim f(z)$, когда $z\to\zeta$ по любому пути, лежащему в $|z|\leqslant 1$. В следствии авторы утверждают, без доказательства, что теорема остается справедливой для всех классов однолистных (и многолистных) в $|z|<1$ функций, представимых интегралом Стилтьеса.

Примечание референта. Сформулированная авторами теорема неверна. Опровергающий пример можно получить, взяв, например, функцию $w=f(z)$, конформно отображающую круг $|z|<1$ на область D, ограниченную кривой с уравнением

$$\rho=1+\frac{1}{2}\,sm\,\frac{1}{\theta},\quad 0<\theta<2\pi,\quad w=\rho e^{i\theta},\quad f(0)=0.$$

Так как $f(z)$ будет функцией, аналитической всюду в $|w|\leqslant 1$, кроме одной точки $w=e^{i\alpha}$ (соответствующей отрезку недостижимых точек), то нетрудно доказать, что функция $\mu(\theta)$, фигурирующая в представлении (1), будет аналитической функцией от θ при всех $\theta\neq\alpha$. Ясно, что сингулярная компонента $r(\theta)$ у функции $\mu'(\theta)$ будет здесь тождественно равна нулю, но в то же время функция $w=f(z)$ будет иметь разрыв при $z=e^{i\alpha}$.

Заметим, что на пояснительном чертеже авторы изображают область, подобную только что описанной, опровергающую их же теорему (при дополнительном предположении о достаточной гладкости границы области).

Приводимое авторами доказательство теоремы содержит ряд ошибочных или никак не обоснованных утверждений. Отметим лишь некоторые из них: 1) Вместо того, чтобы исследовать поведение функции, заданной формулой (1) при произвольном приближении z к ζ, авторы ограничиваются рассмотрением выражения, получающегося из (1), полагая $z=e^{i\varphi}$. 2) В разложении $\mu(\theta)=\nu(\theta)+s(\theta)+r(0)$ функции ограниченной вариации $\mu(\theta)$ на абсолютно непрерывную функцию $\nu(\theta)$, функцию скачков $s(\theta)$ и сингулярную функцию $r(\theta)$ считают $s(\theta)$ состоящей из конечного числа скачков. В дальнейшем же пользуются в доказательстве тем, что $\nu(\theta)$ будет удовлетворять условию Липшица $|\nu(\theta_1)-\nu(\theta_2)|<A\,|\theta_1-\theta_2|$, что, конечно, не имеет места для произвольной абсолютно непрерывной функции. 3) Используется теорема В. В. Голубева и И. И. Привалова в неправильной формулировке: Однолистная функция, оставляющая инвариантным множество граничных точек меры нуль, отображает круг $|z|<1$ на область, ограниченную жордановой кривой. В подобной формулировке теорема неверна. Г. Ц. Тумаркин

3709. О некоторых свойствах функций, регулярных в единичном круге. Руни (On some properties of functions regular in the unit circle. Rooney P. G.), Canad. Math. Bull., 1958, 1, № 1, 25—29 (англ.)

Обобщается теорема Юнга-Хаусдорфа о коэффициентах функций классов H_p (см., например, Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, ГИТТЛ, М., 1950, гл. II, § 11,4).

Функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, регулярная в единичном круге, принадлежит классу $H_{\lambda,p}$ $(\lambda>0)$, если $M_{\lambda,p}(f)$ конечен.

Здесь $M_{\lambda,p}(f)=\int_0^1(1-r^2)^{q\lambda-1}\left[M_p(f,r)\right]^q dr$

при $1<p\leqslant\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$M_p(f,r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p}$$

при $1\leqslant p<\infty$, $M_\infty(f,r)=\max_{0\leqslant\theta<2\pi}|f(re^{i\theta})|$,

$$M_{\lambda,1}(f)=\max_{0\leqslant r<1}(1-r^2)^{\lambda}M_1(f,r).$$

Теорема 1. Если $f\in H_{\lambda,p}$ $1\leqslant p\leqslant 2$, то $\{a_n n^{-\lambda}\}\in l_q$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Теорема 2. Если $\{a_n n^{-\lambda}\}\in l_p$, $1\leqslant p\leqslant 2$, то $f\in H_{\lambda,q}$.

Результат получается умножением на $(1-r^2)^{q\lambda-1}r$ и интегрированием по r от 0 до 1 неравенства Юнга-Хаусдорфа:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{\frac{q}{p}}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^q r^{nq}\ \text{при}\ 1\leqslant q\leqslant 2$$

и противоположного неравенства при $2\leqslant q<\infty$.

Г. А. Фридман

3710. Обобщенная задача Римана — Гильберта в случае отрицательного индекса. Шмидт В., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 893—895

Для единичного круга решается следующая краевая задача: Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial\bar z}-A\bar U=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее на контуре единичного круга краевому условию

$$\mathrm{Re}[t^{-n}U(t)]=\gamma(t). \qquad (2)$$

Целое отрицательное число n есть индекс краевой задачи.

На основе известного факта, что между решениями уравнения (1) и аналитическими функциями существует взаимно однозначное соответствие, доказывается, что для рассматриваемой краевой задачи справедливы те же теоремы о числе решений и условий разрешимости, что и для соответствующей задачи в случае аналитических функций. Ф. Д. Гахов

3711. Краевая задача Римана для системы функций. Ганин М. П., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 173—177.

Пусть D^+ — связная область комплексной плоскости, ограниченная контуром L, состоящим из нескольких замкнутых гладких кривых, D^- — ее дополнение до всей плоскости. Краевая задача Римана, заключающаяся в отыскании кусочно-голоморфного в D^+, D^- вектора $\varphi(z)$, по граничному условию:

$$\varphi^+(t)=A(t)\varphi^-(t)\quad\text{на}\ L,$$

решается, как известно, эффективно, если матрица коэффициентов имеет вид

$$A(t)=Q(t)U(t), \qquad (1$$

где $\Omega(z)$ — матрица, элементы которой — функции, голоморфные в D^+ (исключая конечное число полюсов), а $U(z)$ имеет тот же характер в D^-.

В работе показано, что для приведения произвольной матрицы $A(t)$ к виду (1) достаточно решить вспомогательную задачу Римана с матрицей коэффициентов $G(t) = X^-(t)\,M^+(t)$, где $X^-(z)$, $M^+(z)$ — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, голоморфные в D^+ (соответственно в D^-), которые эффективно строятся по данной матрице $A(t)$. В случае, когда одна из матриц X^-, M^+ рациональна, задача решается до конца.

Рассматривается аналогичный вопрос для обобщенной задачи Римана $\varphi^+[\alpha(t)] = A(t)\,\varphi^-(t)$.

Примечание референта. В отмеченных в работе случаях эффективная разрешимость задачи видна непосредственно. Например, если $X^-(z)$ рациональна, то $A(t)$ имеет вид $\Omega(t)\,D(t)\,U(t)$, где $D(t)$ — треугольная матрица. Замечание автора о возможности в общем случае аппроксимировать $X^-(t)$ или $M^+(t)$ полиномами непонятно, так как с тем же успехом можно аппроксимировать саму $A(t)$ рациональными функциями.

Г. Н. Чеботарев

3712. Исследование одной нелинейной задачи Гильберта. Габиб-заде А. Ш. Məruzələr. АзərbССР Elmlər Akad., Докл. АН АзербССР, 1958, **14**, № 4, 275—278 (рез. азерб.)

Исследуется нелинейная краевая задача

$$\Phi^+(t) - A(t)\,\Phi^-(t) - B(t)\,\Phi^+(t)\,\Phi^-(t) = C(t), \qquad (1)$$

где A, B, C — заданные функции точек контура, удовлетворяющие условию Гёльдера, а $\Phi^{\pm}(t)$ — краевые значения искомой кусочно-аналитической функции.

Искусственным приемом краевое условие (1) приводится к линейному функциональному уравнению

$$\psi^-(t) = \left[A(t) + \frac{1}{2}B(t)\,C(t)\right]\psi^+(t) + \frac{B(t)}{2\pi i}\int\frac{C(\tau)\psi^+(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

относительно вспомогательной кусочно-аналитической функции $\psi(z)$. Отыскивая последнюю в виде интеграла типа Коши

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\omega(\tau)}{\tau - z}d\tau,$$

приходят к линейному сингулярному уравнению с ядром Коши относительно вспомогательной функции $\omega(t)$. Исследование этого уравнения приводит автора к теореме:

Если $\operatorname{Ind}[A(t) + B(t)\,C(t)] = \varkappa \geqslant 0$, то существует решение задачи (1), зависящее не менее чем от $\varkappa$ произвольных постоянных.

Примечание референта. Результат автора справедлив при условии, что $\psi(z)$ нигде в области не обращается в нуль. Автор обещает в последующих исследованиях указать, когда выполняется это условие. При этом он ссылается на то, что $\psi(z) \neq 0$, если $\psi^{\pm}(t) = 0$. Последнее неверно, что легко установить на простых примерах. Как легко показать, необходимое и достаточное условие отсутствия нулей у $\psi(z)$ будет следующее: $\operatorname{Ind}[A(t) + B(t)\,\Phi^+(t)] \leqslant 0$. В последнее условие входит функция $\Phi^+(t)$, которая сама зависит от $\psi(z)$. Таким образом, формулированный им результат не обоснован. То, что в подсчете числа решений участвует свободный член, заставляет усомниться в справедливости самого результата.

Ф. Д. Гахов

3713. Определение формы профилей, обтекаемых потенциальным потоком идеальной и несжимаемой жидкости, по известному на них распределению скоростей. Филлипов Б. В., Сб. тр. Поволжск. лесотехн. ин-та, 1957, 1958, № 52, 135—143

Решается задача об определении плоского потока, вызываемого простым источником, обтекающего два круговых профиля. Результаты прилагаются к решению обратной краевой задачи определения двух профилей по заданному на них распределению скорости обтекающего их потока.

В последнем пункте исследования автора имеют искусственный характер. Скорость задается им не как произвольная функция, как это следует из общей постановки обратной задачи, а имеет вполне определенный аналитический характер. Этим вид искомого профиля заранее предопределяется.

Ф. Д. Гахов

3714. Внешние обратные задачи для случая, когда граничные значения заданы в функции декартовой координаты x. Салимов Р. Б., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 60—64

Решается следующая задача: Определить в плоскости комплексного переменного z контур L_z по заданным, как функций абсциссы искомого контура, краевым значениям функции $w(z)$, аналитической в области D^-_z, внешней по отношению к L_z, за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет простой полюс.

Рассматриваются три разновидности этой задачи.

Методом, опирающимся на работу М. Т. Нужина (Уч. зап. Казанск. ун-та, 1949, **109**, № 1), находится решение задачи, зависящее от трех произвольных параметров. Доказывается, что двумя из них можно распорядиться так, чтобы решение было однолистным. Искомый контур при этом будет без самопересечения.

Ф. Д. Гахов

3715. Преобразование Фурье и голоморфные функции в полуплоскости. Мандельбройт (La transformée de Fourier et les fonctions holomorphes dans un demi-plan. Mandelbrojt S.), J. math. pures et appl., 1956, **35**, № 3, 211—222 (франц.)

Автор доказывает две теоремы, которые содержат как частные случаи обобщенные тауберовы теоремы, доказанные Винером (Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933).

Теорема. Пусть $K \in L(-\infty, \infty)$, $k(u) = S(K)$ — преобразование Фурье функции K, не обращающееся в нуль в интервале $(-\infty, -h)$, $F(x)$ — почти всюду ограниченная и локально измеримая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} K(y-x)\,F(x)\,dx = 0$,

то существует голоморфная функция $F_0(z)$ $(z = x + iy)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющая условиям:

1) $|F_0(z)| \leqslant \operatorname{vrai\,max}|F(x)| \cdot e^{hy}$;

2) каково бы ни было число $N > 0$, справедливо

$$\lim_{y \to +0}\int_{-N}^{N}|F_0(z) - F(x)|\,dx = 0.$$

Теорема. Пусть K — непрерывная функция при $-\infty < x < \infty$ и такая, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\max_{x \in [n,\,n+1]}|K(x)| < \infty$, преобразование Фурье $k(u) = S(K)$ не обращается в нуль в интервале $(-\infty, -h)$, $F(x)$ локально с ограниченным изменением, причем $\int_n^{n+1}|dF(x)| < c$ для всех n.

Если $\int_{-\infty}^{\infty} K(y-x)\,dF(x) = 0$, то существует функция $F_0(z)$, голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющая условиям:

1) для любого $c>0$

$$\left|\frac{e^{icz}-1}{z}F_0(z)\right|\leqslant\sup_{-\infty<\xi<\infty}\left(\left|\frac{e^{ic\xi}-1}{\xi}F(\xi)\right|\right)e^{hy};$$

2) каково бы ни было число $N>0$

$$\lim_{y\to+0}\int_{-N}^{N}|F_0(z)-F(x)|\,dx=0.$$

В частности, если постоянные P_1 и P_2 таковы, что

$$|F(z)|\leqslant\max(P_1,P_2|x|),$$

тогда для всех $c>0$ справедливо

$$|(e^{icz}-1)F_0(z)|\leqslant\max(cP_1,2P_2)|z|e^{hy}.$$

А. П. Тамадян

3716. Почти абсолютно выпуклые функции. Боас (Almost completely convex functions. Boas R. P., Jr), Duke Math. J., 1958, 25, № 2, 193—195 (англ.)

Автор приводит краткое доказательство теоремы Проттера (РЖМат, 1958, 3671). А. Ф. Тиман

3717. О коэффициентах целых функций конечного порядка. Рахман (On the coefficients of an entire series of finite order. Rahman Q. I.), Math. Student, 1957, 25, № 3-4, 113—121 (англ.)

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ — целая функция порядка ρ, $M(r)=\max_{0\leqslant\varphi<2\pi}|f(re^{i\varphi})|$, $l_k x$ — k-я итерация $\ln x$;

$$\lim_{r\to\infty}\sup\inf\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}(l_1 r)^{\alpha_1}\dots(l_k r)^{\alpha}k}=\frac{T(\rho)}{\tau(\rho)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\inf\left\{\frac{\rho^{\alpha_1-1}}{e}\frac{n}{(l_1 n)^{\alpha_1}\dots(l_k n)^{\alpha}k}|a_n|^{\frac{\rho}{n}}\right\}=\begin{matrix}\vartheta\\0\end{matrix};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\inf\left\{\frac{(\alpha_1-1)^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_i}}\frac{n^{\alpha_1}}{(l_1 n)^{\alpha_2}\dots(l_{k-1}n)^{\alpha}k}\left(\frac{\alpha_1-1}{-\ln|a_n|}\right)^{\alpha_1-1}\right\}=\begin{matrix}u\\v\end{matrix}.$$

Теорема 1. Если $\rho>0$, то I) $T(\rho)=\vartheta$, II) $\tau(\rho)\geqslant\odot$, III) если $|a_n|/|a_{n+1}|$ монотонно возрастает, то $\tau(\rho)=\odot$.

Теорема 2. Если $\alpha_1>1$, то I) $T(0)=u$, II) $\tau(0)\geqslant v$, III) если $|a_n|/|a_{n+1}|$ монотонно возрастает, то $\tau(0)=v$. Результаты о верхних пределах были впервые получены еще Линделёфом для $\rho>0$ и при $\rho=0$, $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_k=0$ (Lindelöf. E., Acta Soc. scient. fennica, 1902, 31; Bull. Sci. Math., 1903, 27, I).

Для $\rho>0$ более общая формула была дана Валироном (см., например, Левин Б. Я., Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956, стр. 60, теорема 2; РЖМат, 1958, 2027 К).

Для $\rho=0$ более общая формула была доказана референтом в его кандидатской диссертации.

В работе имеются существенные опечатки в формулировке и доказательстве теорем. Автор вместо $T(\rho)=\vartheta$, $T(0)=u$ пишет $\tau(\rho)=\vartheta$ и $\tau(0)=u$, что явно неверно.

Г. А. Фридман

3718. Заметка о ступенчатой функции. Шах, Сингх (Note on a step function. Shah S. M., Singh S. K.), Quart. J. Math., 1958, 9, № 33, 63—67 (англ.)

Доказывается теорема: Если $f(x)$ — ступенчатая функция с целыми скачками и $I(x)=\int_1^x\frac{f(t)}{t}dt$,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=B,\quad\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=A,$$

где $0<B\leqslant\infty$, $0\leqslant A<\infty$, то

$$J(f)=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{I(x)}{f(x)\ln x}\leqslant1-\frac{A}{B}.$$

Из этой теоремы и предыдущих результатов Шаха выводятся следствия:

I) If $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{\ln I(x)}{\ln\ln x}\leqslant J(f)\leqslant1-\frac{A}{B}$.

II) Если: а) $F(x)$ интегрируема в любом интервале $(1, X)$, б) $F(x)\sim f(x)$, где $f(x)$ — ступенчатая функция, определенная в теореме, в) $\overline{\lim}_{x\to\infty}\frac{\ln F(x)}{\ln x}=B$, $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{\ln F(x)}{\ln x}=A$, $0<B\leqslant\infty$, $0\leqslant A<\infty$, то $J(F)\leqslant1-\frac{A}{B}$.

Дается приложение к теории целых и мероморфных функций.

Пусть $\Phi(z)=\sum a_n z^n$ — целая функция конечного порядка ρ и нижнего порядка λ, $\mu(r)$ — центральный член и $\nu(r)$ — индекс, тогда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{\nu(r)\ln r}\leqslant1-\frac{\lambda}{\rho}.$$

Если $n(r,a)$ — число a точек мероморфной функции $\Phi(z)$ в круге $|z|\leqslant r$ и $N(r,a)=\int_0^r\frac{n(x,a)-n(0,a)}{x}dx+$

$+n(0,a)\ln r$,

то $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,a)}{n(r,a)\ln r}\leqslant1-\frac{\lambda_1(a)}{\rho_1(a)}$, где

$$\rho_1(a)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln^+ n(r,a)}{\ln r},\ \lambda_1(a)=$$

$$=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln^+ n(r,a)}{\ln r},\ 0<\rho_1(a)\leqslant\infty,\ 0\leqslant\lambda_1(a)<\infty.$$

Результаты иллюстрированы примерами.

Г. А. Фридман

3719. О дугах типа косинуса. Винтнер (On cosine-like arches. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1958, 80, № 1, 125—130 (англ.)

Если заданная на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ обладает свойством $(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant0$, $(n=0,1,2,3,\dots)$, то существует неубывающая на отрезке $[-1,1]$ функция $\varphi(t)$ такая, что при $\mu_n=\int_{-1}^{1}t^n d\varphi(t)$ функция $q(\sin z)$, где $q(w)=(1-w^2)^{1/2}\times$

$\times\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n w^n$, является целой функцией экспоненциального типа относительно z и $f(z)=q(\sin z)$ всюду на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

А. Ф. Тиман

3720. О передвижении нулей некоторых функций, порожденном интегрированием дробного порядка. В а-

танабэ (Über die Verschiebung der Nullstellen einiger Funktionen, welche aus Integration gebrochener Ordnung hervorgeht. Watanabe Yoshikatsu), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1953, 3. Febr., 16—20 (нем.)

В книге Пойа и Сеге (Задачи и теоремы из анализа, ч. II, стр. 282, решение задачи 179; РЖМат, 1957, 7120 К) доказано, что нули целой функции

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{z}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{z^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}+\cdots$$

при $\alpha>0$ лежат все в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\alpha$, при $-1<\alpha<0$ лежат все в полуплоскости $\operatorname{Re} z<\alpha$, при $\alpha=0$ лежат все на прямой $\operatorname{Re} z=0$.

Реферируемая заметка содержит иное доказательство этого утверждения. Исследуется, кроме того, перемещение нулей функций

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/\Gamma(2n+\alpha+1);\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} z^{2n-1}/\Gamma(2n+\alpha)$$

при изменении параметра α. И. В. Островский

3721. Степенной ряд, нули частных сумм которого лежат в полуплоскости. Эдреи (Power series having partial sums with zeros in a half-plane. Edrei Albert), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 320—324 (англ.)

Заметка посвящена доказательству теоремы: Пусть

$$a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots \qquad (a_0=1) \qquad (1)$$

— формальный степенной ряд, не сводящийся к полиному. Предположим, что для любого целого положительного n нули частной суммы

$$S_n(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n$$

лежат в замкнутой полуплоскости, которая, вообще говоря, может меняться вместе с n, но так, что начало координат всегда остается на ее границе.

Тогда

$$|a_n|+|a_{n-1}|>0 \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (2)$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |a_n|^{\frac{1}{n^2}}<1.$$

(Таким образом, ряд (1) сходится и представляет целую функцию $f(z)$ такую, что $\ln M(r,f)\leqslant 0(\ln^2 r)$).

Ссылаясь на принадлежащий Пойа и Сеге пример ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n^2} z^n \qquad (a\geqslant 2),$$

у которого нули всех частных сумм вещественны и отрицательны, автор отмечает, что n^2 в (2) нельзя заменить последовательностью, растущей быстрее. Библ. 9 назв. И. В. Островский

3722. О нулях дзета-функции Римана. Миронов В. Т., Матем. сб., 1958, **45**, № 3, 397—400

Доказываются теоремы: 1. Для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $T>0$, что если функция $\zeta(z)$ не имеет нулей в прямоугольнике $D\ [h\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1,\ 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant T]$, где $\frac{1}{2}<h<1$, то она не имеет их в полуплоскости $\operatorname{Re} z>h+\varepsilon$. 2. Точная верхняя грань действительных частей нулей $\zeta(z)$ равна

$$\frac{u}{2}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}(n+\nu)!}{(\nu!)^2(n-\nu)!}\,\frac{1}{\zeta(\nu u)}\right|}{\ln n}=\lambda\ (u>1).$$

Примечание референта. Эффективная оценка $T=T(\varepsilon)$ в сочетании с известной теоремой о нулях $\zeta(z)$ (Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана, М., Изд-во ин. лит., 1953, стр. 60; РЖМат, 1953, 5058К) может привести к оценке $\lambda\leqslant\theta$, где $\theta<1$.

В. И. Левин

3723. Об одном обобщении теоремы Неймана. Мецхваришвили Я. Г., Тбилисис сахелмцихо педагогиури институтис шромеби, Тр. Тбилисск. гос. пед. ин-та, 1957, **11**, 593—604 (рез. груз.)

Пусть $0<\rho_1<\rho_2$. Обозначим через $K_z(\rho_1;\rho_2)$ кольцо $\rho_1<|z|<\rho_2$, а через $I_k(z)$ и $O_k(z)$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ соответственно функции Бесселя и Неймана комплексного аргумента $z=x+iy$; обозначим также через ϵ_x функцию вещественного аргумента x, которая при $x=0$ равна 1, а при $x\neq 0$ равна 2. В реферируемой статье доказывается следующая теорема. Если функция $f(z)$ однозначна и регулярна в кольце $K_z(\rho_1;\rho_2)$, то

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon_k\,[a_k(\mu)\,I_k(\mu z)+b_k(\mu)\,O_k(\mu z)], \qquad (1)$$

где μ — комплексное число, не равное нулю, и

$$a_k(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\,\mu\int_{C_\rho} f(\zeta)\,O_k(\mu\zeta)\,d\zeta,$$

$$b_k(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\,\mu\int_{C_\rho} f(\zeta)\,I_k(\mu\zeta)\,d\zeta \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Здесь C_ρ — окружность $|\zeta|=\rho$, $\rho_1<\rho<\rho_2$. Разложение (1) единственное. При $\mu=1$ из (1) получается известная формула К. Неймана (Neumann C., Die Theorie der Bessel' schen Funktionen, 1867, 38).

Примечание референта. Если $\mu\neq 0$, то функция $F(\zeta)\equiv f\left(\frac{\zeta}{\mu}\right)$ однозначна и регулярна в кольце $K_\zeta\equiv K_\zeta\ (|\mu|\rho_1;\ |\mu|\rho_2)$. Применяя к функции $F(\zeta)$ в кольце K_ζ теорему К. Неймана (1) и полагая затем $\zeta=\mu z$, немедленно получаем теорему автора для функции $f(z)$ в кольце $K_z(\rho_1;\rho_2)$. Таким образом, теорема автора есть простое следствие теоремы К. Неймана.

В. А. Зморович

3724. О применении метода Рисса в квантовой теории поля. Филиппович Е. И., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 2, 223—228

Осуществляется регуляризация расходящихся интегралов, встречающихся в теории матрицы рассеивания квантовой теории поля, методом аналитического продолжения по параметру, широко применяемым в настоящее время в теории обобщенных функций.

Показывается, что упомянутые интегралы $I(\lambda,k)$ являются мероморфными функциями параметра λ с возможными полюсами на действительной оси. Пусть при $\lambda=\lambda_0$ интеграл $I(\lambda,k)$ расходится. Тогда, если λ_0 не является полюсом функции $I(\lambda,k)$, в качестве регуляризованного значения $I(\lambda_0,k)$ принимается значение функции $I(\lambda,k)$, полученное по принципу аналитического продолжения при $\lambda=\lambda_0$. Если же λ_0 — полюс, то в качестве значения $I(\lambda_0,k)$ автор предлагает брать „конечную часть" аналитической функции $I(\lambda,k)$, которую следуя Адамару, обозначает через $F.P.I(\lambda,k)$. В случае полюса $F.P.I(\lambda,k)$ совпадает со свободным членом лорановского разложения функции $I(\lambda,k)$ в точке λ_0.

Утверждается, что предлагаемый метод регуляризации должен давать результаты, отличающиеся от результатов, доставляемых известным в квантовой теории поля методом Штюкельберга-Боголюбова, лишь конечными членами перенормировки. Л. А. Чикин

3725. Конечная рекуррентная формула для коэффициентов асимптотических разложений. Райни (A finite recursion formula for the coefficients in asympto-

tic expansions. Riney T. D.), Trans. Amer. Math., Soc., 1958, 88, № 1, 214—226 (англ.)

Известно, что если

$$ {}_pg_q(w) = \prod_{i=0}^{p} \Gamma(w+\sigma_i) / \sum_{j=0}^{q} \Gamma(w+\rho_j), $$

где $p \leqslant q$, а σ_i и ρ_j — произвольные комплексные параметры, и

$$ {}_pG_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_pg_q(n)\, z^n, $$

то асимптотическое разложение ${}_pG_q(z)$ легко определяется по асимптотическому разложению ${}_pg_q(w)$. Для коэффициентов c_m в асимптотическом разложении

$$ {}_pg_q(w) = $$

$$ = (2\pi)^{(1-\alpha)/2}\, \alpha^{\alpha w+\beta-1/2} \left[\sum_{m=0}^{M} \frac{c_m}{\Gamma(\alpha w+\beta+m)} + \right. $$

$$ \left. + O\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha w+\beta+M+1)} \right) \right], $$

где $c_0 = 1$,

$$ \alpha = q+1-p,\ \beta = \sum_{j=0}^{q} \rho_j - \sum_{i=0}^{p} \sigma_i + (1-\alpha)/2, $$

выводится следующая рекуррентная формула:

$$ c_m = (m+2)!\,(\alpha m)^{-1} \sum_{i=1}^{N} a_{mi}\, c_{m-i}, $$

где $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$ и

$$ a_{mi} = (-1)^{i-1} \sum_{k=q-i}^{q+1} C_k^{q-i} \frac{E_k}{(m+q+2-i-k)!}, $$

если $p \leqslant i \leqslant q$, и

$$ a_{mi} = (-1)^{i-1} \sum_{k=q-i}^{q+1} \left\{ C_k^{q-i} E_k - \right. $$

$$ \left. - C_{k-\alpha}^{q-i-\alpha} C_k \right\} / (m+q+2-i-k)!, $$

если $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Здесь E_k и C_k определены рекуррентными соотношениями

$$ E_k = \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{q} (\beta+k-p-2-\alpha\rho_m) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{E_j}{(k-j)!} $$

для $0 \leqslant k \leqslant q+1$ и

$$ C_k = \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{p-1} (\beta+k-q-3-\alpha\sigma_{m+1}) \prod_{m=p}^{q} (k+p-m) - $$

$$ - \sum_{j=\alpha}^{k-1} \frac{C_j}{(k-j)!} $$

для $\alpha \leqslant k \leqslant q+1$.

Приводятся приложения к асимптотике бесселевых функций и конфлюэнтной гипергеометрической функции, а также к случаю ${}_2g_2(w)$. В. И. Левин

3726. О производной мероморфной функции с максимальной суммой дефектов. Виттих (Über die Ableitung einer meromorphen Funktion mit maximaler Defektsumme. Wittich Hans), Math. Z., 1958, **69**, № 3, 237—238 (нем.)

Передоказываются неравенства, полученные Шахом и Сингхом (РЖМат, 1957, 3052). Статья по существу отличается от примечания референта (РЖМат, 1957, 3052) только большей подробностью. А. А. Гольдберг

3727. Дефектные значения однозначных аналитических функций. Виттих (Defekte Werte eindeutiger analytischer Funktionen. Wittich H.), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 65—74 (нем.)

В начале статьи приводятся некоторые следствия из основного неравенства теории распределения значений, которые содержатся (или легко могут быть получены тем же методом) в обзорной монографии автора (Wittich H., Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, 1955, гл. 11, п. 3, РЖМат, 1958, 292К; см. также РЖМат, 1955, 2173; 1957, 3052; реф. 3726). Далее известная теорема о том, что $m(r, c) = o(T(r, w))$ для всех c, кроме, возможно, множества внутренней емкости нуль и $w(z)$ неограниченного вида (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, 1941, п. 226), переносится на функции, мероморфные в $R<|z|<\infty$; доказательство приводится в полной аналогии с известным. Затем эта теорема перенесена на функции, мероморфные в плоскости с конечным числом выключенных точек.

В конце статьи доказывается теорема о решениях линейного дифференциального уравнения, регулярных в окрестности некоторой особой точки. Доказательство повторяет доказательство автора другой теоремы (цит. выше книга автора, гл. 5, п. 1, (1)), где рассматривался более широкий класс уравнений, но от решений требовалось, чтобы они были целыми функциями. Впрочем, для этого более широкого класса уравнений и при более слабых ограничениях на решения, чем регулярность в окрестности особой точки, утверждение автора получено ранее Валироном (Valiron G., Bull. sci math., 1952, **74**, 144—148). А. А. Гольдберг

3728. Целые функции конечного порядка и мероморфные функции. Целые функции конечного порядка и порядка нуль. I. Порядок функции и порядок ее производной. Валирон (Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes. Fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul. I. L'ordre de la fonction et l'ordre de sa dérivée. Valiron Georges), Enseign. math., 1958, (1957), **4**, № 1, 1—18 (франц.)

Целые функции конечного порядка и мероморфные функции. Целые функции конечного порядка и порядка нуль (Продолжение). II. Порядок и коэффициенты Тейлора. III. Разложение на множители; следствия. Валирон (Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes. Fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul (suite). II. L'ordre et les coefficients tayloriens. III. Décomposition en facteurs et conséquences. Valiron Georges), Enseign. math., 1958, **6**, № 2, 124—156 (франц.)

Реферируемые статьи представляют собой лекции, читанные в Каире и Александрии в 1948 г. Главные результаты были уже автором ранее опубликованы. И. В. Островский

3729. Некоторые конструктивные задачи, относящиеся к аналитическим образам. Хейнс (Some constructive problems concerning Analytische Gebilde. Heins Maurice), Math. Ann., 1958, **136**, № 1, 9—22 (англ.)

Изучаются свойства «в целом» мероморфных решений $b(z)$ уравнения инволюции $b^2(z) \equiv b(b(z)) = z$. Для того чтобы ввести понятие обратного аналитического образа, автор вводит понятие аналитического образа (а.о.) A с помощью пар $(f(z), g(z))$, где $f(z)$ и $g(z)$ — мероморфные функции в некоторой области, содержащей 0. Две пары

(f_1, g_1) и (f_2, g_2) считаются эквивалентными, если существует аналитическая в окрестности 0 функция $\varphi(z)$, $\varphi(0)=0$ такая, что $f_1(z)=f_2(\varphi(z))$, $g_1(z)=g_2(\varphi(z))$ для достаточно малых z. Класс эквивалентных пар образует элемент. Далее из элементов строится а.о. A как обычно (РЖМат, 1957, 3071 К; Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л. 1950). Элемент, порожденный парой (g, f) называется обратным к элементу, порожденному парой (f, g). Из элементов, обратных к элементам A, строится обратный а.о $\hat{A}$. А. о. A называется инволюционным, если $A=\hat{A}$.

Можно считать, что мероморфная в плоской области Ω функция $b(z)$ удовлетворяет уравнению $b^2(z)=z$, если выполняется одно из условий (в порядке сужения класса решений): 1) обратные элементы к элементам, определяемым b принадлежат а.о., для которого b является ветвью; 2) для некоторого $z_0 \in \Omega$, $b(z_0) \in \Omega$ и $b^2(z)=z$ для всех z, достаточно близких к z_0; 3) для всех $z \in \Omega$ $b(z) \in \Omega$ и $b^2(z)=z$. Если b—решение $b^2(z)=z$ в одном из трех указанных смыслов (достаточно рассмотреть случай 1)), то существует нетривиальная конформная инволюция (т. е. преобразование, квадрат которого является тождественным преобразованием) а.о., ветвью которого является b. Основное содержание статьи посвящено доказательству следующей теоремы. Пусть даны Ω—область, конформно эквивалентная кольцу, римановa поверхность F и ее нетривиальная конформная инволюция τ. Тогда существует решение $b^2(z)=z$ (в одном из трех смыслов, достаточно рассмотреть случай 3)) такое, что а.о. A, для которого b является ветвью, допускает взаимно однозначное конформное отображение φ в F, обладающее тем свойством, что $\varphi^{-1}\tau\varphi$ переводит каждый элемент A в обратный. Для случая, когда F — замкнутая поверхность рода нуль, вопрос просто сводится к $b(z)=-z$. В общем случае—решение достаточно сложно. Развитые методы позволяют получить новое доказательство классической теоремы об униформизации для случая некомпактной римановой поверхности и сделать некоторые высказывания относительно построенной униформизирующей функции. А. А. Гольдберг

3730. Замечание о целых и мероморфных функциях. Сингх (A note on entire and meromorphic functions. Singh S. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 6—10 (англ.)

Доказана следующая теорема: Пусть $f(z)=e^{Q_1(z)}P_1(z)-e^{Q_2(z)}P_2(z) \not\equiv 0$, где $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$—многочлены целой степени ρ, $P_1(z)$ и $P_2(z)$—канонические произведения порядка $<\rho$. Тогда $\ln M(r, f) > Ar^\rho$, где $A>0$—некоторая постоянная, $M(r, f)=\max|f(z)|$ при $|z|=r$. Отсюда в качестве простого следствия получается теорема Неванлинна (Nevanlinna R., Le théoreme de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929): Если $f(z)$ целая функция целого порядка ρ, то существует не более одной целой функции $g(z)$ такой, что $\ln M(r, g)=o(\ln M(r, f))$ и показатель сходимости нулей $f(z)-g(z)$ меньше ρ.

Далее приводится простое доказательство теоремы Неванлинна о том, что для целой функции f нецелого порядка $\overline{\lim_{r\to\infty}} N(r, a)/\ln M(r, f) > 0$, $a \neq \infty$. Это доказательство представляется референту ошибочным, так как автор не учитывает, что r_0, а следовательно, и r'_0 зависят от ε. Наконец, дается новое доказательство теоремы Шаха (Shah S. M. Math. Student, 1944, 12, 67—70) о сумме $N(r, a)+N(r, b)$ для мероморфных функций порядка $\rho < 1$, которое, однако, по мнению референта, непроще первоначального доказательства Шаха. Этот результат Шаха усилен референтом (РЖМат, 1958, 4662). А. А. Гольдберг

3731. О существовании положительной гармонической функции на открытых римановых поверхностях. Мюрберг (Über die Existenz von positiven harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 214—216 (норв.)

В классификации открытых римановых поверхностей известны следующие соотношения включения (РЖМат, 1955, 2651 и 3728):

$$O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB} \subset O_{HD},$$

являющиеся строгими, если род поверхности бесконечен (в случае конечного рода все указанные классы совпадают). В работе дается независимое доказательство строгого включения $O_G \supset O_{HP}$, которое следует из доказываемой автором теоремы: На поверхности с положительной границей, имеющей по крайней мере два граничных элемента, существуют положительные гармонические функции. Это же справедливо при наличии лишь одного иррегулярного граничного элемента (однако, как отмечает автор, в этом случае неизвестно, существуют ли такие поверхности).

Л. И. Волковыский

3732. О существовании положительных гармонических функций на римановых поверхностях. Мюрберг (Über die Existenz von positiven harmonischen Funktionen auf Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1953, Sar. A. I, № 146, 6 S.) (нем.)

Доказывается теорема: Пусть риманова поверхность F имеет функцию Грина и пусть на F существует некомпактное множество точек $\{P_n\}$ $n=1, 2, \ldots$, на котором функция Грина $g(P, Q)$ при $n\to\infty$ не стремится к 0. Тогда можно из $\{g(P, P_n)\}$ выбрать подпоследовательность, сходящуюся на F к гармонической положительной функции $\not\equiv$const. Попутно устанавливаются критерии существования на поверхности положительной гармонической функции $\not\equiv$ const, изложенные в его работе (реф. 3731) Г. Ц. Тумаркин

3733. О проблеме Дирихле на открытых римановых поверхностях. Мюрберг (Über das Dirichletsche Problem auf offenen Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. A I, № 197, 11 S.) (нем.)

Одно из обобщений проблемы Дирихле для полуплоскости состоит в том, что снимается предположение об ограниченности граничной функции на бесконечности (Nevanlinna R., Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1925, Ser AI, XX1V). В работе эта постановка переносится на произвольные открытые римановы поверхности F. Доказывается следующая теорема: Пусть A—некомпактная часть F с относительной границей α, состоящей из конечного числа или счетного множества аналитических кривых, компактных или нет на F, не накапливающихся во внутренних точках F. Пусть далее $f(s)$—функция, непрерывная на каждой компоненте α. Тогда можно построить гармоническую в A функцию с граничными значениями $f(s)$. Для этого, вообще говоря, расходящийся интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_\alpha f(s)\frac{\partial g(s, Q)}{\partial n}ds$, где g—функция Грина в A, заменяется выражением

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-1/2}^{1/2} f(\xi_k)\left[\frac{\partial g(\xi_k, Q)}{\partial \tau_{ik}} - \sum_{n=0}^{p_k} a_n^k \cos n\psi_k\, t_k^n\right]d\xi_k$$

(α разбивается на дуги с центрами в точках s_k, в параметрических кругах $|\zeta_k|<1$, $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k=t_k e^{i\psi_k}$ которых этим дугам соответствуют отрезки $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а $\sum_{n=0}^{p_k}$ —часть разложения $\frac{\partial g(\xi_k, \psi)}{\partial \eta_k}$ внутри парамет-

рического круга). Это построение проводится с помощью симметричного удвоения A вдоль α и приводит к гармонической функции u_0 с граничными значениями $f(s)$, исключая точки s_k, где она имеет полюса. Затем из u_0 вычитается гармоническая функция с нулевыми граничными значениями на α, исключая точки s_k, где она имеет те же особенности, что u_0 (она также строится с помощью удвоения A). Решение единственно, если F имеет нулевую границу и функция $f(s)$ ограничена. Далается замечание о множестве решений, когда F имеет положительную границу, функция $f(s)$ ограничена и множество α компактно или некомпактно на F, в связи с существованием сингулярных поверхностей с положительной границей (о таких поверхностях см. Р. Неванлинна, Униформизация, 1955, пп. 10. 18, 10. 31; РЖМат, 1956, 7313К; примеры см. в работе Tôki Y., Osaka Math J., 1952, 4 : 2). Л. И. Волковыский

3734. О поведении аналитических функций на абстрактных римановых поверхностях. Курамоти (On the behaviour of analytic functions on abstract Riemann surfaces. Kuramochi Zenjiro), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 109—121 (англ.)

Под O_G, O_{HP}, O_{HB}, O_{HD}, O_{AB}, и O_{AD}, как обычно понимаются классы римановых поверхностей, на которых не существует соответственно функций Грина, отличных от постоянной, положительных, ограниченных, с ограниченным интегралом Дирихле гармонических функций, ограниченных и с ограниченным интегралом Дирихле аналитических функций.

Пусть F — произвольная абстрактная риманова поверхность и F_0 — некоторая ее компактная часть. Доказывается, что если $F \notin O_G$, а $\in O_{HB}(O_{HD})$, то $F - F_0 \in O_{AB}(O_{AD})$. Найдены условия, при которых каждая связная часть F над $|w - w_0| < \rho$ покрывает $|w - w_0| < \rho$, исключая, возможно, некоторое нуль-множество. Значительная часть работы посвящена развернутому построению примера поверхности из класса O_{HP}, не обладающей свойством Гросса. Последний результат был сообщен автором ранее (РЖМат, 1955, 2651). Д. Б. Потягайло

3735. Римановы поверхности класса A. Осс ерман (Riemann surfaces of class A. Osserman Robert), Trans. Amer. Math., Soc., 1956, 82, № 1, 217—245 (англ.)

Класс A содержит открытые односвязные римановы поверхности, имеющие над каждым кругом конечного радиуса плоскости w только алгебраические точки ветвления. Поверхности некоторого подкласса A допускают изометрическое представление в трехмерном пространстве с помощью поверхностей специального вида $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ однозначна и непрерывна. При выполнении определенных условий гладкости $f(x, y)$ может рассматриваться как абстрактная риманова поверхность в обычном смысле. Автором получен неожиданный результат: Существуют поверхности $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ определена на всей плоскости (x, y), однозначна и бесконечно дифференцируема, конформно эквивалентные внутренности единичного круга. Доказаны также следующие критерии типа:

Теорема I. Поверхность $W \in A$, точки ветвления которой расположены над ограниченным множеством плоскости w, параболического типа, если

$$\int^{\infty} \frac{dt}{n(t)} = \infty,$$

где $n(t)$ — число точек ветвления, с учетом их кратности, расстояние которых на поверхности от фиксированной точки $p \in W$ меньше t.

Пусть $\{r_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — произвольная возрастающая последовательность чисел. На экземпляре плоскости W_0 проводятся радиальные разрезы, идущие из точек $w_{n,k}$, $|w_{n,k}| = r_n$, $\arg w_{n,k} = \frac{1}{2^n}(2k-1)\pi$, $k = 1, 2, \ldots 2^n$ для $n > 1$ и $\arg w_{1,k} = \frac{1}{2}(k-1)\pi$, $k = 1, 2, 3, 4$, в бесконечность. К каждому разрезу подклеивается экземпляр плоскости $W_{n,k}$ с разрезом по соответствующему лучу. Полученные таким образом поверхности образуют класс $B \subset A$. Оказывается, что для поверхностей класса B расходимость интеграла Альфорса

$$\int^{\infty} \frac{dt}{t_n(t)}$$

является необходимым и достаточным условием параболического типа.

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестен результат Радойчича (Radojčić M., Publ. math. Univ Belgrade, 1938, VI—VII, 37—43), доказавшего, что поверхности, указанные в теореме 1, параболического типа, если

$$\int^{\infty} \frac{t\,dt}{n(t)} = \infty.$$

Последнее условие лучше условия теоремы 1.

Д. Б. Потягайло

3736. О некоторых вопросах современной теории римановых поверхностей. Стоилов (Sur quelques points de la théorie moderne des surfaces de Riemann. Stoilow S.), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 1-2, 170—196 (франц.)

Обзорные лекции, прочитанные в апреле 1957 г. в институте высшей математики в Риме. Первая лекция посвящена понятию римановой поверхности в смысле Г. Вейля и в смысле автора (абстрактные римановы поверхности и римановы поверхности в собственном смысле слова; Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950, гл. VIII). Приводится принадлежащее Хейнсу (Heins M., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 951—952) простое доказательство того, что всякая ориентируемая топологическая поверхность допускает внутреннее отображение в сферу. Затем рассказывается об исследованиях, посвященных изучению внутренних отображений произвольной поверхности (ориентируемой или нет) в проективную плоскость (РЖМат, 1953, 210; 1957, 3879), и указывается, что эта тема еще не исчерпана. Во второй лекции дается обзор свойств введенного автором Compositio math., 1940, **7**, 428—435) класса нормально исчерпываемых поверхностей. Рассказано о результатах, полученных Андреян-Казаку (РЖМат, 1956, 7304; 1958, 2877), а также о впервые замеченной ею связи между нормально исчерпываемыми поверхностями и классом поверхностей A_∞, введенным Л. И. Волковыским (Матем. сб., 1949, **25**, 415—450; Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, **34**, гл. III, § 7). Приведен принадлежащий Л. И. Волковыскому критерий параболичности для A_∞. Третья лекция посвящена римановым поверхностям R, обладающим свойством Иверсена ($R \in O_I$), т. е. таким поверхностям, все граничные точки которых достижимы из произвольной внутренней точки поверхности по пути, лежащему в произвольно узкой окрестности наперед заданного пути. Этот класс поверхностей исследовался автором (Mathematica, 1943, **19**, 126—138; РЖМат, 1955, 706). Свойством Иверсена обладают многие важные классы римановых поверхностей (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л. 1941, п. 239; Stoilow S., Mathematica, 1936, **12**, 125—138; РЖМат, 1958, 2876, 2877; РЖМат, 1956, 7303); больше всего места уделено результату М. Журкеску. Указаны некоторые нерешенные вопросы

Обозначим O_G—класс римановых поверхностей, на которых не существует функции Грина, O_{HP} (O_{HB}, O_{AB}) — — класс римановых поверхностей, на которых всякая положительная гармоническая (ограниченная гармоническая, ограниченная аналитическая) функция тождественно равна постоянной. Известно, что $O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB}$. В четвертой лекции подробно рассмотрены построенные Сарио примеры, показывающие, что включения здесь строгие (РЖМат, 1955, 3728). В пятой лекции приведено доказательство теоремы Неванлинна (Nevanlinna R., Math. Z., 1950, 52, 599—604): На римановой поверхности $R \in O_{HB}$ не могут существовать две непересекающиеся области G_1 и G_2 такие, что существуют функции $u_i \not\equiv \text{const}$, гармонические в G_i и непрерывные в $\bar{G}_i$, равные нулю на границе G_i ($i=1,2$). В шестой, последней лекции рассматриваются римановы поверхности класса O^0_{AB}, которые характеризуются следующим свойством: пусть $R \in O^0_{AB}$, G — произвольная область на R, ограниченная не более чем счетным множеством непересекающихся простых дуг C, не обязательно компактных, но без точек сгущения в R; тогда всякая аналитическая в G, ограниченная и непрерывная на GUC функция f такая, что $\mathrm{Re} f = 0$ на C, тождественно равна постоянной (РЖМат, 1958, 7659). Доказывается, что $O_{HB} \subset O^0_{AB} \subset O_{AB}$. Известно, что включения здесь строгие (Kuroda T., см. выше; Myrberg P. J., Suomalais. tiedeakat. toimituks. Sar. AI, 1949, 58). В статье доказано, что $O^0_{AB} \subset O_I$, и отмечается, что O^0_{AB} — самый широкий известный в настоящее время класс поверхностей, для которых обеспечено наличие свойства Иверсена.

Примечание референта. Курамоти (РЖМат, 1957, 373) доказал, что $O_{HB} \subset O_I$, и высказал предположение, что $O_{AB} \subset O_I$. А. А. Гольдберг

3737. О дефекте косвенно критической точки на римановой поверхности ограниченного вида. Хуккеман (Über den Defekt von mittelbaren Randstellen auf beschränktartigen Riemannschen Flächen. Huckemann Friedrich. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/16, 12 S., ill.) (нем.)

На римановой поверхности, на которую $w = 1/\cos\sqrt{z}$ отображает конечную z-плоскость, сдвинем точки ветвления над $(-1)^\nu$ в точки $(-1)^\nu a_\nu$, $a_\nu > 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, и вырежем часть поверхности, лежащую над $|w| \leqslant 1$; оставшуюся риманову поверхность обозначим W_∞. Пусть $w = w_\infty(z)$ отображает $|z| < 1$ на W_∞. Доказано, что для того чтобы $w_\infty(z)$ имела над ∞ положительный дефект в смысле Лехто (РЖМат, 1956, 5206), достаточно, чтобы $a_\nu \geqslant \exp(A^{\alpha^\nu})$, где A — некоторая постоянная, $\alpha > 4$. Использование принципа локализации Лехто (цит. выше) позволяет сразу распространить эту теорему на случай функции $w(z)$ ограниченного вида, отображающей $|z| < 1$ на риманову поверхность, которая имеет косвенно критическую точку с окрестностью, с точностью до дробно-линейного преобразования, совпадающей с W_∞.

Примечание референта. Результат референта (РЖМат, 1955, 3725) в сочетании с одной теоремой Лехто (цит. выше, п. 39) дает полное решение задачи, рассмотренной автором. Для того чтобы ∞ было дефектным значением $w_\infty(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\inf_{i>\nu} \{\ln a_i\})^{-1} < \infty.$$

Для случая произвольной функции ограниченного вида отсюда с помощью принципа локализации получается достаточное условие для наличия дефекта, которое не может быть улучшено. В частности, сохраняя формулировку автора, можно заменить условие $\alpha > 4$ на $\alpha > 1$. А. А. Гольдберг

3738. Об автоморфных тэта-функциях. Мюрберг (Über automorphe Thetafunktionen. Myrberg P. J.), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1954/1955—1955/1956, 30—31 (нем.)

Пусть Γ — фуксова группа с единичной окружностью в качестве границы. Ищется такая целая функция $g(z)$ (тэта-функция), чтобы при подстановках S группы Γ было

$$g(S) = e^{\lambda u(z) + \eta} g(z),$$

где $u(z)$ — целая функция. Тогда $u(S) = \alpha_S u(z) + \beta_S$.

Пусть $x(z)$, $y(z)$ — автоморфные функции группы Γ, униформирующие любую автоморфную функцию той же группы. При обходе по замкнутому пути римановой поверхности F, расположенной над плоскостью x, функции $u(x)$ и $\varphi(x) = \dfrac{1}{u'(x)} \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ переходят соответственно в $\alpha u(x) + \beta$ и $\dfrac{1}{\alpha}\varphi(x) + \dfrac{\lambda}{\alpha}$. Автор ставит проблему: для данного α определить все $u(x)$, а затем и $\varphi(x)$. В общем случае автоморфная функция группы Γ может быть представлена в виде $e^{w(z)} \prod_1^m \dfrac{g(z, a_\nu)}{g(z, b_\nu)}$. Г. П. Боев

3739. Об автоморфных тэта-функциях при фуксовых группах жанра нуль. Мюрберг (Über automorphe Thetafunktionen bei Fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null. Myrberg P. J. Suomalais. tiedeakat. toimituks. 1956, Sar. A-1, № 223, 11 S.) (нем.)

Пусть Γ — фуксова группа жанра О в единичном круге, $g(z)$ — аналитическая функция, преобразующаяся при подстановках S группы Γ по формуле

$$g(S) = e^{u_S(z)} g(z),$$

где $u_S(z)$ — целая функция, причем все функции $u_S(z)$ выражаются линейно через две из них u_1 и u_2. Нетрудно показать, что $u_\nu(S)$ выражается линейно через $u_1(z)$, $u_2(z)$.

Пусть Γ порождается конечным числом q подстановок T_ν эллиптического типа, причем $T_1 \ldots T_q = 1$ $x(z)$, $y(z)$ — автоморфные функции, через которые выражается рационально всякая автоморфная функция группы Γ, функции $v_k = u'_k$ преобразуются по формуле

$$v_1(x') = \alpha v_1(x) + \beta v_2(x), \quad v_2(x') = \gamma v_1(x) + \delta v_2(x).$$

Группа таких преобразований изоморфна Γ. Автор показывает, что тогда существует некоторая функция $x(z)$, определенная с точностью до дробно-линейного преобразования, отображающая однолистно фундаментальную область Γ на плоскость x, регулярная всюду, кроме q точек ветвления $e_1, \ldots, e_q$.

Производные $u'_k(x) = v_k(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$v'' + p_1(x)\, v' + p_2(x)\, v = 0$$

типа Фукса, в число особых точек которого входят и $e_1, \ldots e_q$.

Функция $\psi(x) = g'(x)/g(x)$, как оказывается, удовлетворяет уравнению $\psi'' + p_1(x)\psi' + p_2(x)\psi = r(x)$, где рациональная функция r может быть найдена.

Итак, зная $\psi(x)$, можно получить тэта-функцию в виде $g(z) = e^{\int_{z_0}^{z} \psi(x)\, dx}$. Г. П. Боев

3740. Об автоморфных тэта-функциях второго порядка при фуксовых группах любого жанра. Мюрберг (Über automorphe Thetafunktionen zweiter Ordnung bei Fuchsschen Gruppen beliebigen Geschlechtes. Myrberg P. J. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A-I, № 225, 11 S.) (нем.)

Как и в предыдущей статье (реф. 3739), рассматривается целая функция в единичном круге, преобразующая при подстановках фуксовой группы Γ по формуле

$$g(S) = g(z)\, e^{a_S u_1(z) + b_S u_2(z) + c_S},$$

причем целые функции u_1, u_2 при таких подстановках преобразуются линейно. Предположим, что Γ имеет q эллиптических и $2p$ гиперболических фундаментальных подстановок и преобразования u_1 и u_2 унимодулярны. Пусть $g(z)$ примитивна (имеет в фундаментальной области единственный и притом простой нуль). Если $x(z)$, $y(z)$ — автоморфные функции, через которые выражается рационально всякая автоморфная функция группы Γ, функция $u'_k = v_k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v'' + p_1 v' + p_2 v = 0$$

с рациональными коэффициентами на замкнутой римановой поверхности F, расположенной над плоскостью x, определяемой парой функций $x = x(z)$, $y = y(z)$, а функция $\psi(x) = g'(x)/g(x)$ удовлетворяет уравнению $\psi'' + p_1\psi' + p_2\psi + = r(x, y)$, где правая часть — рациональная функция на F. Автор подсчитывает соотношение между числом параметров в дифференциальных уравнениях и числами p, q и показывает, что эти параметры могут быть выбраны так, чтобы максимальное число коэффициентов в линейных зависимостях $u_1(S)$ и $u_2(S)$ от $u_1(z)$ и $u_2(z)$ обратилось в нуль.

В итоге непримитивная автоморфная функция может быть представлена в виде

$$e^{w_0(z)} \prod \frac{g(z, z_\nu)}{g(z, z'_\nu)},$$

где w_0 — целая функция. Г. П. Боев

3741. Аналитическое продолжение рядов Эйзенштейна, соответствующих параболическим вершинам фуксовой группы первого рода. Рёльке (Analytische Fortsetzung der Eisensteinreihen zu den parabolischen Spitzen von Grenzkreisgruppen erster Art. Roelcke W.), Math. Ann., 1956, 132, № 2, 121—129 (нем.)

Пусть Γ — фуксова группа первого рода, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ — все неэквивалентные параболические вершины Γ; $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — вещественные матрицы с определителем единицы такие, что $A_\nu \tau_\nu = \infty$. Условимся считать, что A_ν определены так, что в группе $A_\nu \Gamma A_\nu^{-1}$ параболическая подгруппа, соответствующая точке „бесконечность", порождается преобразованием $z \to z + 1$. Пусть $S(A_\nu, \Gamma)$ означает максимальную систему матриц M из комплекса $A_\nu \Gamma$ с различными вторыми строками. В реферируемой статье рассматривается следующий ряд Эйзенштейна

$$E(\tau, s; A_\nu, \Gamma) = \sum_{M \in S(A_\nu, \Gamma)} \frac{y^{s/2}}{|m_1\tau + m_2|^s}, \quad \tau = x + iy,$$

$M = \begin{pmatrix} * & * \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$. В случае, когда Γ — модулярная группа или конгруэнц-подгруппа модулярной группы, этот ряд совпадает с функцией Эпштейна; пользуясь этим, можно осуществить его аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного s. В данной статье доказывается, что для любой группы Γ этот ряд можно аналитически продолжить до критической прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$. Доказательство основано на методах развитых в диссертации автора.

Автор указывает, что Сельберг получил более сильный результат, а именно: он аналитически продолжил этот ряд на всю плоскость комплексного переменного s. Эта работа опубликована с разрешения Сельберга, поскольку результаты Сельберга нигде не опубликованы и методы автора и Сельберга различны.

И. И. Пятецкий-Шапиро

3742. Целые гильбертовы модулярные формы размерности —1. Гундлах (Ganze Nichtspitzenformen der Dimension —1 zu den Hilbertschen Modul-gruppen reell-quadratischer Zahlkörper. Gundlach Karl-Bernhard), Arch. Math., 1957, 7, № 6, 453—456 (нем.)

Доказывается, что всякая целая модулярная относительно гильбертовой модулярной группы форма размерности —1 представляется в виде линейной комбинации рядов Эйзенштейна и модулярных форм, регулярных в вершинах фундаментальной области. Устанавливается также, что целая модулярная форма, исчезающая в одной вершине фундаментальной области, вообще говоря, исчезает в некоторой другой вершине. Это означает, что число линейно независимых рядов Эйзенштейна размерности —1 меньше, чем число вершин фундаментальной области. И. И. Пятецкий-Шапиро

3743. К теории модулярных функций n-й степени. Кристиан (Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Christian Ulrich), Math. Ann., 1957, 133, № 4, 281—297 (нем.)

Рассматривается предложенный Зигелем метод компактнификации фундаментальной области F модулярной группы Зигеля. Обозначим через R пространство, полученное с помощью компактнификации из F. Недостатком метода Зигеля является то, что это пространство содержит точки, эквивалентные относительно модулярной группы. Мероморфная на R функция называется модулярной, если она принимает одинаковые значения в эквивалентных точках.

Автор доказывает, что любые $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ модулярные функции связаны алгебраическим соотношением.

В отличие от компактнификации по способу Сатакэ, размерность множества „бесконечно удаленных точек" только на одну комплексную единицу меньше, чем размерность всего пространства. И. И. Пятецкий-Шапиро

3744. К теории модулярных функций n-й степени. II. Кристиан (Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. II. Christian Ulrich), Math. Ann., 1958, 134, № 4, 289—307 (нем.)

Установлено, что любая мероморфная в верхней полуплоскости функция, инвариантная относительно модулярной группы Зигеля, может быть представлена в виде отношения модулярных форм.

И. И. Пятецкий-Шапиро

3745. О теореме Эренпрайса. Миядзаки (On a theorem of Ehrenpreis. Miyazaki Kenichi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, A21, № 2, 115—117 (англ.)

В статье (РЖМат, 1956, 7471) Эренпрайс доказал следующую теорему: Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$, $g(z_1, \ldots, z_n)$ суть аналитические функции в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Предположим, что $f \not\equiv 0$ и коспектр g содержит коспектр f в точке $(0, 0, \ldots, 0)$. Тогда g/f есть аналитическая функция в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Коспектр g содержит коспектр f в точке $(0, 0, \ldots, 0)$, если существует окрестность N точки $(0, 0, \ldots, 0)$ такая, что f и g аналитичны в N и для любой точки $P \in N$ и неотрицательных целых чисел $t_1, \ldots, t_n$ из того, что

$$\left. \frac{\partial^{s_1 + \ldots + s_n}}{\partial z_1^{s_1} \ldots \partial z_n^{s_n}} f \right|_P = 0$$

при всех $s_1 \leqslant t_1, \ldots, s_n \leqslant t_n$, следует

$$\left.\frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}}{\partial z_1^{s_1}\ldots\partial z_n^{s_n}}\, g\right|_P = 0$$

при всех $s_1 \leqslant t_1, \ldots, s_n \leqslant t_n$.

В настоящей работе приведено более простое доказательство этой теоремы, основанное на применении подготовительной теоремы Вейерштрасса. М. В. Федорюк

См. также: 3466

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3746. Нелинейные системы дифференциальных уравнений. Пинни (Nonlinear differential equations systems. Pinney Edmund), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 31—56 (англ.)

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{m} A_{i\alpha} y_\alpha + \varepsilon f_i(y_1, \ldots, y_m, t), \; i = 1, \ldots, m, \quad (1)$$

с заданными начальными условиями, причем

1) $A_{i\alpha}$ суть постоянные,

2) $f_i(y_1, \ldots, y_m, t)$ полином порядка n относительно $y_1, \ldots, y_m$ при закрепленном t и тригонометрический полином от t при закрепленных $y_1, \ldots, y_m$,

3) f_i может зависеть и от ε, но среди членов порядка n относительно $y_1, \ldots, y_m$ по крайней мере один по величине „порядка единицы относительно ε", а остальные более высокого порядка малости относительно ε.

При этих условиях строится приближенная теория решения системы (1), в которой за исходное приближение принимается решение линейной системы с теми же начальными условиями, получаемой из (1) при $\varepsilon = 0$. В некоторых случаях оценивается порядок погрешности приближенного решения. С. М. Лозинский

3747. К теории неавтономных квазилинейных систем со многими степенями свободы. Кузмак Г. Е., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 2, 128—146 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} + \sum_{l=1}^{p} a_{jl} x_l = \varepsilon f_j[x_1, \ldots, x_p, v_{p+1}(t), \ldots, v_n(t), \varepsilon] \quad (1)$$

$$(j = 1, \ldots, p),$$

где ε — малый параметр a_{jl} — постоянные, причем при $\varepsilon = 0$ система (1) переходит в систему, для которой характеристические числа все различны; функции f_j представляют собой полиномы, расположенные по неотрицательным степеням своих аргументов.

В отличие от асимптотических методов Крылова-Боголюбова, в которых ряды по степеням ε образуются как для самого решения, так и для некоторых вспомогательных функций, обычно амплитуд и частот, в настоящей работе выбор вспомогательных функций производится с помощью некоторых идей и формальных преобразований, которые были использованы Биркгофом для исследования канонических систем.

С помощью введения новых переменных система (1) сводится к автономной системе более высокого порядка:

$$\frac{dv_j}{dt} - \lambda_j v_j = \varepsilon \chi_j(v_1, \ldots, v_n, \varepsilon) \quad (j = 1, \ldots, n), \quad (2)$$

решение которой ищется в виде

$$v_j = v_j[z_1(t, \varepsilon), \ldots, z_n(t, \varepsilon), \varepsilon], \quad (3)$$

где $z_1(t, \varepsilon), \ldots, z_n(t, \varepsilon)$ — некоторые комплексные функции времени и ε, определяемые из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_j}{dt} = \omega_j(z_1, \ldots, z_n, \varepsilon) \quad (j = 1,2, \ldots, n). \quad (4)$$

Представляя правые части (3) и (4) в виде сумм:

$$v_j = \sum_{q=0}^{N} v_j^{(q)} \varepsilon^q + V_j \varepsilon^{N+1},$$

$$\omega_j = \sum_{q=0}^{N} \omega_j^{(q)} \varepsilon^q \quad (j = 1,2, \ldots, n), \quad (5)$$

автор получает ряд рекуррентных соотношений для определения $v_k^{(q)}$; при этом функции $\omega_k^{(q)}$ определяются так, чтобы $v_k^{(q)}$ имели вполне определенный вид.

Ю. А. Митропольский

3748. Оценка для решения системы дифференциальных уравнений и ее применение. Конти (Limitazioni «in ampiezza» delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni. Conti Roberto), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 344—349 (итал.)

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный комплексный вектор; $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — вектор с сопряженными комплексными компонентами; $\| x \| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ $f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x))$ n-мерная вектор-функция с комплексными компонентами, определенная и непрерывная при $a < t < b$ и всех x; $\omega(t, u)$ — вещественная функция, непрерывная при $a < t < b$, $0 < u < \infty$.

Теорема 1. Пусть

1) $\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k f_k(t, x) \leqslant \| x \| \omega(t, \| x \|)$ при $a < t < b$, $\| x \| > 0$,

2) $a < t_0 < b$; 3) максимальный интеграл $u_0(t)$ уравнения

$$\frac{du}{dt} = \omega(t, u),$$

проходящий через (t_0, u_0), существует при $t_0 \leqslant t < T_0^+$. Тогда всякое решение $x(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

удовлетворяющее условию $\| x(t_0) \| = u_0$, существует при $t_0 \leqslant t < T_0^+$ и $\| x(t) \| < u_0(t)$ при $t_0 \leqslant t < T_0^+$

Получена аналогичная теорема 2 для оценки снизу $\| x(t) \|$ через минимальное решение $v_0(t)$ уравнения $\frac{dv}{dt} = a(t, v)$. Как следствие, получается:

1) Теорема Важевского (Wazewski T., Studia math., 1948, 10, 48 – 58) всякое решение $x(t)$ линейной однородной системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ удовлетворяет неравенствам

$$\| x(t_0) \| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(u)\, du \right) \leqslant \left\| x(t) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x(t_0) \right\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda(u)\, du \right),$$

где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ суть наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $\frac{1}{2}(A(t) + A^*(t))$ (A^* – матрица, эрмитовски сопряженная с A).

2) Если в условиях теоремы 1 имеем $\omega(t, u) = \mu(t)h(u)$, где $\mu(t)$ непрерывна при $a < t < b$; $h(u) > 0$ и непрерывна при $u > 0$; $\int^{\infty} \frac{du}{h(u)} = \infty$, то все решения системы (1) существуют при $t_0 \leqslant t < b$.

3) Если $\mu(t)$ и $h(u)$ как в 2) и

$$\| f(t, x) \| < \mu(t)\, h(\| x \|),$$

то все решения системы (1) ограничены при $t_0 \leqslant t < b$.

Примечание референта. 1. Заключение теоремы (1) верно и при $0 \leqslant \| x(t_0) \| < u_0$. Это неявно используется автором в доказательстве следствия 2). 2. Теорема 2 сформулирована не совсем корректно, заключение должно было гласить (в обозначениях автора): $v_0(t) < \| x(t) \|$ на общей части интервала существования $x(t)$ и $[t_0, T_0^+)$. С. М. Лозинский

3749. О продолжении решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Конти (Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Conti Roberto), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 510—514 (итал.)

Пусть x – вещественный n-мерный вектор; $f(t, x)$ – вещественная n-мерная вектор-функция; прочие не пояснённые далее символы и условия, как в реф. 3748. Пусть $V(t, x) = V(t, x_1, \ldots, x_n)$ – вещественная неотрицательная функция, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка при $a < t < b$ и всех x.

Теорема. Пусть

$$1)\ V_t(t, x) + \sum_{k=1}^{n} V_{x_k}(t, x)\, f_k(t, x) < \omega(t, V(t, x))$$

во всякой точке (t, x), в которой $a < t < b$ и $V(t, x) > 0$.

2) Существует точка (t_0, x^0) такая, что $V(t_0, x^0) = u_0$ (1).

3) $\lim_{\|x\| \to \infty} V(t, x) = +\infty$.

4) $T_0^+ = b$.

Тогда всякое решение $x(t)$ системы $dx/dt = f(t, x)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, существует при $t_0 < t < b$. Для вещественного f это обобщает результат реф. 3748.

Примечание референта. 1) В работе имеется лемма, заключение которой сформулировано автором неточно; оно должно быть: $V(t, x(t)) \leqslant u_0(t)$ имеет место на общей части интервала существования $x(t)$ и интервала (t_0, T_0^+). 2) Вместо (1) достаточно $V(t_0, x^0) \leqslant u_0$. 3) Автор утверждает, что его результаты содержат результаты Р. В. Петропавловской (РЖМат, 1957, 3078). Это неверно, так как функция $\omega(t, u)$ у Р. В. Петропавловской может иметь разрывы. С. М. Лозинский

3750. Редукция периодической системы к некоторой автономной посредством однопараметрической группы преобразований. Урабэ (Reduction of periodic system to autonomous one by means of one-parameter group of transformations. Urabe Minoru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, **A20**, № 1, 13—35 (англ.)

Рассматривается неавтономная нелинейная периодическая система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)\, x_j + \sum_{p}'' c_{ip}(t)\, x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $c_{ij}(t)$, $c_{ip}(t)$ – непрерывные периодические функции с общим периодом ω; $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и сумма $\sum_p''$ распространена на все целые неотрицательные числа $p_1, \ldots, p_n$ такие, что $p_1 + \ldots + p_n \geqslant 2$. Системе (1) сопоставляется автономная нелинейная система

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j + \sum_{p}'' c_{ip}\, y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

с постоянными коэффициентами c_{ij} и c_{ip}.

Пусть $\varphi_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, n;\ x = (x_1, \ldots, x_n))$ – решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию: $\varphi_i(x, 0) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Основная теорема: Неавтономная система (1) с помощью преобразования

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\, y_j + \sum_{p}'' k_{ip}(t)\, y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3)$$

($k_{ij}(t)$, $k_{ip}(t)$ – непрерывные периодические функции, периода ω) может быть переведена в автономную систему вида (2) тогда и только тогда, если преобразование $x_i' = \varphi(x_i, \omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$ включается в некоторую однопараметрическую группу преобразований.

Приводятся результаты, относящиеся к дальнейшим упрощениям системы (1), в зависимости от свойств ее линейной части.

В качестве приложения общей теории дается математическое обоснование стробоскопического метода Минорского. Библ. 12 назв. Б. П. Демидович

3751. Геометрия вариации параметров. Конклинг (The geometry of variation of parameters. Conkling R. M.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 1, 589—591 (англ.)

Методическая заметка. Для лучшего усвоения студентами метода Лагранжа вариации произвольных постоянных автор предлагает иллюстрировать этот метод на примере уравнения

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t), \quad x(0) = u, \ \dot{x}(x) = v. \qquad (1)$$

Здесь геометрически наглядна замена переменных x, $\dot{x} \to u$, v и естественно уравнение $\dot{u}\cos t + \dot{v}\sin t = 0$, обычно формально вводимое. Частные случаи уравнения (1) (например, $f(x, \dot{x}, t) = e^{-t}$) знакомят студента с теорией возмущений (зависимость $v(t) - v(0)$, $u(t) - u(0)$ от μ). Л. А. Беклемишева

3752. Динамические системы с регулярной правой частью. I. Грегор (Dynamické systémy s regulární pravou stranou. I. Gregor Jiří), Pokroky mat., fys. a astron., 1958, **3**, № 2, 153—160 (чешск.)

Используя замечание Н. П. Еругина о возможности интегрирования системы

$$\dot{x} = u(x, y), \quad \dot{y} = v(x, y) \tag{1}$$

в случае, когда ее правые части удовлетворяют в некоторой области D условиям Даламбера-Эйлера) путем перехода к уравнению

$$\dot{z} = f(z),$$

автор изучает расположение траекторий системы (1) (в указанном случае) в окрестности особой точки. Основные результаты можно сформулировать следующим образом:

1. Если $f(z)$ регулярна в области $D\,[|z| < R]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha \neq 0$, $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, то начало координат для системы (1) является центром (независимо от членов высшего порядка).

2. Если $f(z)$ регулярна в области $D\,[|z| < R]$, имеет в точке $z = 0$ нуль k-го порядка и вычет $1/f(z) = 0$, то все траектории системы (1) из достаточно малой окрестности (0, 0) „проходят" через начало координат (примыкают к началу обоими концами) и каждая полутраектория имеет в начале координат определенную касательную.

3. Если функция $f(z)$ регулярна в области $D\,[0 < |z| < R]$ и в точке $z = 0$ имеет полюс k-го порядка, то лишь конечное число (> 0) траекторий проходит через начало. Для каждой из остальных траекторий существует область $D_1\,[|z| < R_1]$, в которой нет точек этой траектории.

В качестве примера рассматривается система (1), эквивалентная уравнению $\dot{z} = \alpha z^k$, $k \neq 0$ целое.

Примечание референта. Система (1) и условия Даламбера-Эйлера (в написании автора) не согласуются друг с другом. А. Ф. Андреев

3753. **О существовании голоморфного интеграла одного сингулярного дифференциального уравнения первого порядка. Сарантопулос** (Sur l'existence des intégrales holomorphes des équations différentielles du premier ordre dans le cas singulier. Sarantopoulos Spyridon), Дельтион тис эллиникис математикус этериас, Bull. Soc. Math. Grèce, 1954, 28, № 1-3, 128—166 (франц.)

Автор рассматривает вопрос о существовании голоморфного интеграла уравнения первого порядка в окрестности особой точки.

В работе рассматривается уравнение

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + x\varphi(x) + x\sigma(x)y, \tag{1}$$

($\varphi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots$, $\sigma(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2 + \ldots$ и голоморфны в окрестности $x = 0$).

Теорема. Если δ_1 — не целое число, уравнение (1) имеет голоморфный интеграл в окрестности точки $x = 0$, если только α есть нуль целой функции

$$\Phi(x) = A_0 + \frac{A_1}{1 - \delta_1} x + \frac{A_2}{(1 - \delta_1)(2 - \delta_1)} x^2 + \ldots .$$

Здесь $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ есть разложение в ряд Тейлора функции $\varphi(x)\, e^{-\int_0^x \frac{\sigma(x) - \delta_1}{x}\, dx}$. В. И. Зубов

3754. **Применение теории систем дифференциальных уравнений к колебаниям балок. Стернберг** (Applications of the theory of systems of differential equations to vibrating beams. Sternberg Robert L.), Portugaliae math., 1954, 13, № 1, 111—120 (англ.)

Уравнение гармонических колебаний балок с неоднородными сечениями преобразуется в каноническую систему линейных векторных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Вводится матричное дифференциальное уравнение типа Риккати и показывается, что если непрерывное симметрическое матричное решение этого уравнения известно, тогда общее решение вышеупомянутой системы может быть определено путем решения линейного матричного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Главный результат представлен в виде двух теорем о несуществовании 2 точек x_1 и x_2 вдоль неоднородной балки конечной или бесконечной длины, в которых балка может быть зажата, в некотором более точном смысле называемых точками сжатия, причем в результате этого закрепления балки не получается гармонических колебаний определенной частоты. M. Zlámal

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 9, 926.

3755. **Об асимптотическом решении специальной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Фещенко, Шкиль** (Про асимптотичний розв'язок спеціальної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Фещенко С. Ф., Шкіль М. І.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 5, 482—485 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$E_1 \frac{dx}{dt'} = A(t')x + E_1 B(t')\, e^{i\theta}, \tag{1}$$

где x и $B(t')$ — n-мерные векторы, $A(t')$ — действительная квадратная матрица n-го порядка, E_1 — диагональная матрица вида

$$E_1 = \{1, 1, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon\}, \tag{2}$$

ε — малый параметр, $t' = \varepsilon t$. Авторы указывают подстановку, при помощи которой система (1) сводится к системе с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0(\tau) + A_1(\tau)]\, x + \varepsilon B(\tau)\, e^{i\theta}, \tag{3}$$

где

$$\tau = \varepsilon t. \tag{4}$$

Система (3) обладает тем свойством, что характеристическое уравнение

$$\det \left| A_0(\tau) - \lambda E \right| = 0 \tag{5}$$

имеет нулевой корень второй кратности.

Относительно остальных корней уравнения (5) авторы допускают, что среди них еще имеется корень второй кратности и чисто мнимый.

Тогда относительно этого корня и функции

$$k(\tau) = d\theta/dt \tag{6}$$

рассматривается два случая: 1) „резонансный", когда функция $ik(\tau)$ при некоторых значениях τ из промежутка $0 \leqslant \tau \leqslant L$ может стать равной чисто мнимому кратному корню и 2) „нерезонансный", когда при любом $\tau \in [0, L]$ функция $ik(\tau)$ не равняется ни одному корню уравнения (5).

Для этих случаев сформулированы две теоремы, устанавливающие асимптотические решения системы (3).

Ю. А. Митропольский

3756. **О линейных возмущениях системы линейных дифференциальных уравнений. Раб** (Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Rábl Miloš), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 2, 222—229 (нем.; рез. русск.)

Известно, что если

$$z' = [A(t) + B(t)]\, z, \quad Y' = A(t)\, Y \quad \text{и} \quad \int^{\infty} |\, Y^{-1} B Y \,|\, dt < \infty,$$

то имеет место асимптотическая эквивалентность решений:

$$z(t) = Y(t)\,[c + o(1)].$$

Этот факт используется для отыскания асимптотических формул типа $z_i = a(t)[\sin b(t) + o(1)]$, выражающих решения уравнения

$$z''' + f(t)\,z'' + g(t)\,z' + h(t)\,z = 0$$

при довольно жестких ограничениях, налагаемых на f, g, h. Р. Э. Виноград

3757. Переход от линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами к интегральному уравнению при помощи операционного исчисления. Карамышкин В. В., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 4, 553—554

3758. Решения нелинейных дифференциальных уравнений. III. Там Цой-так (The solutions of nonlinear differential equations. III. Taam Choy-tak), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 511—519 (англ.)

Ч. I, II см. РЖМат, 1958, 2043, 2913.

Уравнение

$$x'' + p(t)\,x + 2q(t)\,x^3 = F(t) \qquad (1)$$

исследуется в предположении, что p, q, F периодичны с периодом; L p, q четны, имеют положительную нижнюю грань, $F(t)$ — нечетная, $\inf F(t) \geqslant 0$. Доказан ряд теорем о существовании периодических решений. В каждой теореме L ограничено своей константой, зависящей от верхних и нижних граней, входящих в уравнение (1) функций.

Теорема 2. Если $L \leqslant 2\pi\,(\sup p(t) + 3\,(2 \sup F(t)^2 \cdot \sup q(t))^{1/3})^{-1/2}$, то существуют два различных решения уравнения (1) $x^*(t)$, $x^{**}(t)$, удовлетворяющие начальным условиям $x^*(0) = x^{**}(0) = 0$, $x^{*\prime}(0) = E^* < 0$, $x^{**\prime}(0) = E^{**} < 0$, нечетные периодические с наименьшим периодом L, имеющие точно один нуль, а именно $L/2$, между 0 и L, и каждая из их первых производных имеет точно один нуль между 0 и $L/2$.

В теореме 1 доказано существование решения вида x^*, но находящегося в фазе с $F(E^* > 0)$. В теореме 3 доказано для любого целого n существование нечетного периодического решения периода L, имеющего точно $|n|$ нулей между 0 и $L/2$. В теореме 4 доказано существование для любого натурального n пары решений с наименьшим периодом nL, которые имеют точно два нуля 0 и $Ln/2$. Здесь предполагается, что $L < c/n$, c зависит от p, q, F. Отмечено, что методом автора можно доказать существование решения периода nL, имеющего точно m нулей между 0 и $nL/2$, но что, однако, период nL не обязательно будет наименьшим. Приводятся следствия из теорем для случаев, когда некоторые из функций p, q, F достаточно малы.

Л. А. Беклемишева

3759. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием. Разумихин Б. С., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 2, 155—166

Исследуется на устойчивость по первому приближению система уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(t)\,x_j(t) + q_{ij}(t)\,x_j(t-\tau)) + X_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где X_i — голоморфные функции по всем переменным, начиная со второго, разложения которых в степенные ряды по тем же переменным начинаются членами не ниже второго порядка, постоянные запаздывания $\tau > 0$. Наряду с системой уравнений первого приближения

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(t)\,x_j(t) + q_{ij}(t)\,x_j(t-\tau)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

рассматривается система без запаздывания

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(t) + q_{ij}(t))\,x_j(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

для которой предполагается существование функции Ляпунова вида $v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_i\,x_j$, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Двумя методами находятся различные достаточные условия того, что такая же квадратичная форма удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости для уравнения (2).

Дается также оценка значений функции v вдоль траекторий. Указывается, что обычными методами можно доказать, что если система (2) имеет определенно положительную функцию Ляпунова, производная которой может быть мажорирована определенно отрицательной квадратичной формой, то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво при любых X_i.

В качестве примера получены весьма сложные достаточные условия устойчивости для уравнения

$$\dddot{\varphi}(t) + a_1\ddot{\varphi}(t) + a_2\dot{\varphi}(t) + a_3\varphi(t-\tau) = 0, \qquad (4)$$

где все a_i и τ — постоянные, $\tau > 0$.

Примечание референта. Значительно более простые и более точные достаточные условия, а также необходимые и достаточные условия устойчивости тривиального решения уравнения (4) получены другими авторами амплитудно-фазовым и другими методами, применение которых проще применения методов данной статьи. Это показывает, что метод Б. С. Разумихина нецелесообразно применять к стационарным линейным уравнениям, но вполне возможно, что он окажется полезным при исследовании нестационарных линейных, а также нелинейных уравнений. Л. Э. Эльсгольц

3760. К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом. Каменский Г. А., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 4, 697—700

В § 1 и § 2 методом шагов исследуются решения основной начальной задачи для уравнения

$$F(x, y(x), \ldots y^{(m_0)}(x), y(x-\Delta_1(x)), \ldots y^{(m_1)}(x-\Delta_1(x)), \ldots, y(x-\Delta_n(x)), \ldots, y^{(m_n)}(x-\Delta_n(x))) = 0,$$

где непрерывные функции $\Delta_i(x) \geqslant 0$. Дается классификация этих уравнений и выясняется, сколько раз дифференцируемо решение на множествах, получаемых методом шагов на p-м шаге. Устанавливаются условия непрерывной зависимости решения от начальных функций и начальных значений.

В § 3, в так называемом особом случае, при котором метод шагов неприменим, доказывается существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных значений решений дифференциального уравнения нейтрального типа:

$$y'(x)\,G(x, y(x), \ldots, y(x-\Delta_i(x)), \ldots, y'(x-\Delta_i(x)), \ldots, y(x-\Delta_j(x)), \ldots, y'(x-\Delta_j(x)), \ldots),$$

где $y(x)$ — вектор-функция, все $\Delta_i(x) \geqslant 0$.

Примечание референта. На стр. 699, строка 7 сверху, опечатка: вместо слова „пересечения" должно быть „разности". Л. Э. Эльсгольц

3761. Об одной формуле разложения произвольной функции. Расулов М. Л., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 3, 450—453

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k^{(i)}}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{(i)}(x,\lambda)\, y^{(i)} = f_k^{(i)}(x) \quad \text{при } x \in (a_i, b_i) \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n),$$

где $a_{kj}^{(i)}(x,\lambda)$ — кусочно-гладкие функции,

$$a_{kj}^{(i)}(x,\lambda) = \lambda a_{kj}^{(i)}(x) + \sum_{\nu=0}^{N} \lambda^{-\nu} a_{kj\nu}^{(i)}(x),$$

при граничных условиях

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \alpha_{kj}^{(i)}(\lambda)\, y_j^{(i)}(a_i) + \beta_{kj}^{(i)}(\lambda) y_j^{(i)}(b_i) \right\} = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_{kj}^{(i)}(\lambda)$, $\beta_{kj}^{(i)}(\lambda)$ — многочлены от λ; (a_i, b_i) — взаимно не налегающие интервалы, имеющие общие концы.

Пусть выполняются условия:

1. На интервале $[a_i, b_i]$ функции $a_{kj}^{(i)}(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, $a_{kj0}^{(i)}(x)$ непрерывно дифференцируемы один раз, остальные $a_{kj\nu}^{(i)}$ непрерывны.

2. При $x \in [a_i, b_i]$ корни $\varphi_1^{(i)}(x), \dots, \varphi_n^{(i)}(x)$ характеристических уравнений

$$\Phi^{(i)}(\theta) = \det\left(A^{(i)}(x) - \theta E\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

($A^{(i)}(x)$ — матрица функций $a_{kj}^{(i)}(x)$) различны и отличны от нуля; их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x. При больших λ знак разностей $\operatorname{Re}[\lambda \varphi_k^{(i)}(x)] - \operatorname{Re}[\lambda \varphi_j^{(i)}(x)]$ не зависит от x (в тексте пропущен множитель λ при обеих функциях φ).

3. При достаточно больших λ ранг матрицы коэффициентов $\alpha_{kj}^{(i)}(\lambda)$, $\beta_{kj}^{(i)}(\lambda)$ равен mn.

Эти условия позволяют применить метод Биркгофа — Тамаркина для асимптотического представления фундаментальной системы решений однородной системы, соответствующей (1); обобщая метод Тамаркина, рассмотревшего случай $m = 1$, автор выясняет расположение полюсов функции Грина задачи (1) — (2) и получает для нее оценку (не выписываемую явно). Это дает возможность получить (при некоторых дополнительных ограничениях) следующую формулу разложения произвольной вектор-функции $f^{(i)}(x) \in L_2(a_i, b_i)$ с компонентами $f_k^{(i)}(x)$:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_\nu} y^{(i)}(x,\lambda)\, d\lambda \Rightarrow (A^{(i)}(x))^{-1} f^{(i)}(x) \text{ при } \nu \to \infty; \quad (3)$$

здесь Γ_ν — расширяющаяся система контуров в λ-плоскости; сходимость имеет место в смысле $L_2(a_i, b_i)$.

Формула (3) при $m = 1$ содержится в более ранней работе автора (Матем. сб., 1952, **30**, № 3, 509—528).

Ю. Н. Валицкий

3762. Об одной трехмерной вариационной задаче, соответствующей самосопряженному дифференциальному уравнению. Заган (Über ein, einer selbstadjungierten. Differentialgleichung zuordenbares dreidimensionales Variationsproblem. Sagan H.), Österr. Ingr.-Arch., 1956, **10**, № 2-3, 264—267 (нем.)

Рассматривается задача о свободных колебаниях закрепленной на границе, круглой мембраны ($r = 1$). Как известно, метод разделения переменных ($u(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)T(\ )$), примененный к дифференциальному уравнению колебаний круглой мембраны, приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$T'' + \lambda^2 T = 0,$$

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0,$$

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R = 0.$$

Наименьшее собственное значение определяется следующим образом

$$\lambda^2 = \operatorname{Inf} \frac{\int_0^1 (r R'^2 + \frac{n^2}{r} R^2)\, dr}{\int_0^1 rR^2\, dr}. \quad (1)$$

Автор приходит к соотношению (1), применяя метод разделения переменных непосредственно к вариационной задаче, к которой приводит задача о колебаниях круглой мембраны. Те же рассуждения повторяются и в общем случае дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля. Новых результатов работа не содержит.

Л. С. Дашниц

3763. Дифференциальные операторы с возмущенной областью определения. Суонсон (Differential operators with perturbed domains. Swanson C. A.), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 6, 823—846 (англ.)

Рассматривается самосопряженное дифференциальное выражение

$$L = \frac{1}{k(x)}\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right] \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве с нормой $\|u\| = \left\{\int_0^b k(x)\,|u(x)|^2\, dx\right\}^{1/2}$ на $[0, b]$. $\operatorname{Im} q(x) = 0$; $k(x) > 0$, если $x \in (0, b)$; q и k^{-1} непрерывны при $x > 0$.

Основной самосопряженный оператор A_0 на $[0, b]$ определяется (1) и некоторой распадающейся системой однородных граничных условий.

Рассмотрены два случая:

1. Λ и Y_1 — собственное значение и соответствующая собственная функция A_0; Y_2 — решение уравнения $LY = \Lambda Y$ такое, что $Y_1'(x) Y_2(\lambda) - Y_1(x) Y_2'(x) = -1$, пусть $x = 0$ не суть точка накопления нулей Y_1, и

$$\frac{Y_1(x)}{Y_2(x)} \int_x^b |Y_1(t)\, Y_2(t)|\, k(t)\, dt = o(1); \quad x \to 0.$$

2. Существуют такие два линейно независимые решения U_1 и U_2 уравнения $LY = \Lambda Y$, не имеющие $x = 0$ точкой накопления нулей, и такая постоянная $a_0 > 0$, что $C_1 U_2(x) \geqslant U_1(x) \geqslant C_2 U_2(x)$, когда $x \in [0, a_0]$ и

$$\int_0^x U_1(t)\, U_2(t)\, k(t)\, dt = o(1); \quad x \to 0.$$

В первом случае возможны как предельная точка Вейля, так и предельный круг. Второму случаю соответствует только предельный круг.

Возмущенный оператор определяется (1), прежним граничным условием при $x = b$ и новым условием при $x = a > 0$ вида $B_a(y) \equiv \alpha_0(a)\, y(a) + \alpha_1(a)\, y'(a)$. Постоянные $\alpha_0(a)$ и $\alpha_1(a)$ удовлетворяют некоторым ограничениям, различным в случаях 1 и 2.

Изучается интегральное уравнение типа Вольтерра, связывающее собственную функцию возмущенного оператора с собственной функцией основного оператора. Доказано, что в обоих случаях для каждого собственного значения Λ оператора A_0 существует единственное собственное значение $\lambda(a)$ возмущенного оператора такое, что $\lambda(a) \to \lambda$ при $a \to 0$. Для $\lambda(a)$ и соответствующей собственной функции $y(x, \lambda(a))$ построены асимптотические разложения при $x \to 0$. Рассмотрены примеры.

Б. С. Павлов

3764. Графики на фазовой плоскости. Новый метод преподавания динамики. Паккер, Эйсс (Phase-plane graphics—a new approach to teaching dynamics. Packer Leo S., Eiss Norman S.), Amer. J. Phys., 1958, 26, № 2, 91—103 (англ.)

3765. О нахождении периодического решения уравнения $y'=f(x,y)$ по методу Ньютона. Кислицын С. Г., Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 5(9), 101—104

Известно, что периодическое решение уравнения

$$y'=f(x, y) \qquad (1)$$

может быть найдено с помощью пикаровского процесса последовательных приближений, в котором сходимость не зависит от точности исходного приближения. В заметке показывается, что если $f(x, y)$ периодична по „x" с периодом, равным 1, $\frac{\partial f}{\partial y}$ отрицательна и удовлетворяет неравенствам $m \leqslant \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant M$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ существует и имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| \leqslant H,$$

то для отыскания периодических решений можно применить метод Ньютона, дающий более быструю сходимость.

Н. И. Мозжерова

3766. О поведении характеристик уравнения Гукухары в окрестности начала. Куклес И. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 111—122

Рассматривается уравнение

$$x\frac{dy}{dx} = Ay^k + B(x),$$

$A>0$, $k>1$, $B(x)$ непрерывна при $x\geqslant 0$, и сохраняется знак при малых $x>0$, $B(0)=0$. Для этого уравнения Сансоне установил критерий наличия интегральных кривых, примыкающих к точке $(0, 0)$ в первом координатном угле. Автор считает критерий Сансоне неконструктивным и, опираясь на обобщение результатов Лона, предлагает иное решение того же вопроса.

Примечание референта. Имеются опечатки в самых существенных местах текста. Примеры: подстановка (4) должна иметь вид $y_1 = u[-\ln x]^{-1/(k-1)}$; подстановка, приводящая к уравнению (11), должна иметь вид $x = v\exp\{-y^{1-k}\}$ и должна быть сделана в уравнении (2'), а не в уравнении (2).

А. Ф. Андреев

3767. О поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Кордуняну (Asupra comportării solutiilor unei clase de ecuatii diferentiale neliniare de ordinul al doilea. Cordüneanu C.), Studii si cercetări stiint. Acad. RPR Fil. Iasi. Mat., 1956, **7**, № 2, 1—11 (рум; рез. русск., франц.)

Пусть $f(x,y,z)$ — непрерывная функция в множестве $x\geqslant 0$, $-\infty<y, z<\infty$, такая, что $f(x, y, 0)\equiv 0$. Если производная f_z удовлетворяет условию $-M\leqslant f_z\leqslant -m<0$, тогда решения уравнения (1)

$$y''=f(x, y, y') \qquad (1)$$

ограничены на полуоси $x\geqslant 0$. Каждое решение допускает горизонтальную асимптоту. Оно возрастает, когда $y_0'>0$, и убывает, когда $y_0'<0$. Если f_z удовлетворяет условию $0<m\leqslant f_z\leqslant M$, то (1) не имеет ограниченных решений, кроме постоянных. Каждое неограниченное решение возрастает к $+\infty$, если $y_0'>0$, и убывает к $-\infty$, если $y_0'<0$. Пусть f_z — непрерывная функция, которая удовлетворяет условию $f_z\leqslant -m$. Если для каждого множества $x\geqslant 0$, $|y|\leqslant H$, $|z|\leqslant k$ существуют два числа $M>0$, $L>0$, такие что $-M\leqslant f_z$, $|f(x, y, z)-f(x, \bar{y}, z)|\leqslant L|y-\bar{y}|$, тогда уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение, удовлетворяющее условиям $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$. Это решение допускает горизонтальную асимптоту и может быть вычислено с помощью последовательных приближений. Краевая задача $y''=f(x, y, y')$,

$$y(0)=y_0,\ \lim_{x\to\infty} y(x)=y^*,$$

допускает по крайней мере одно решение, если $-M\leqslant f_z\leqslant -m<0$ (для $x\geqslant 0$) и $|f(x,y,z)-f(x,\bar{y},z)|\leqslant L|y-\bar{y}|$ в каждом множестве $|y|\leqslant H$.

Единственность имеет место, когда $f(x, y, z)$ является неубывающей функцией относительно y.

Аналогичные результаты могут быть получены для случая краевой задачи

$$y'(0)=y_0',\ \lim_{x\to\infty} y(x)=y^*.$$

Резюме автора

3768. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q—полиномы. Ландис Е. М., Петровский И. Г., Матем. сб., 1957, **43**, № 2, 149—168

Статья является продолжением работы, ранее опубликованной авторами (РЖМат, 1957, 3090). Доказывается, что число предельных циклов уравнения

$$\frac{dy^*}{dx^*}=\frac{P(x^*, y^*)}{Q(x^*, y^*)}, \qquad (1)$$

где P и Q—полиномы степени не выше n с действительными коэффициентами, не превосходит $\frac{6n^3-7n^2+n+4}{2}$ при n четном и $\frac{6n^3-7n^2-11n+6}{2}$ при n нечетном.

Рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \qquad (2)$$

где P и Q—полиномы степени не выше n с комплексными коэффициентами в комплексном проективном пространстве $x=x^*+ix^{**}$, $y=y^*+iy^{**}$, которому соответствует также 4-мерное действительное пространство $R_4^*(x^*, x^{**}, y^*, y^{**})$ с какой-либо компактной метрикой. Под решением $y=\Phi(x)$ уравнения (2) понимается полная аналитическая функция; в R_4^* ей отвечает интегральная кривая как двумерная поверхность, к которой, кроме обыкновенных точек, причисляются также полюсы и алгебраические точки ветвления. Замкнутая одномерная кривая (топологический образ окружности) на интегральной кривой называется циклом. В частности, замкнутая интегральная кривая уравнения (1) будет действительным циклом на интегральной кривой соответствующего (с теми же коэффициентами) уравнения (2).

Решающее значение имеет понятие простых правильно расположенных, негомологичных между собой циклов, вытекающее из двух следующих определений: 1) Циклы $L_1,\ldots, L_r$ на интегральных кривых $\Phi_1,\ldots,\Phi_r$ (не обязательно различных) называются негомологичными между собой, если из них нельзя выбрать пару циклов L_i и L_k, которые лежат на одной и той же интегральной кривой Φ_l и в сумме образуют границу части K интегральной кривой Φ_l, причем K является компактом в смысле метрики, которая индуцируется на Φ_l метрикой пространства R_4^*. 2) Циклы $L_1,\ldots, L_r$ называются правильно расположенными, если, каковы бы ни были окрестности $U_1,\ldots, U_{n^3+n+1}$ всех особых точек (конечных и бесконечно удаленных), уравнения (2), отвечающего какой-либо точке $(n+1)(n+2)$-мерного

комплексного пространства коэффициентов, существуют циклы $L_1',...,L_r'$ и $L_1'',...,L_r''$, $L_i' \subset \Phi_i$, $L_i'' \subset \Phi_i (i=1,2,...,r)$ такие, что каждый из L_i' и L_i'' гомологичен $L_i (i=1,2,...,r)$, каждый из L_i' и L_i'' совпадает с $L_i (i=1,2,...,r)$ вне ΣU_k, проекции циклов $L_1',...,L_r'$ на плоскость x не имеют самопересечений и попарно не пересекаются, проекции циклов $L_1'',...,L_r''$ на плоскость y не имеют самопересечений и попарно не пересекаются.

Циклы с этими специальными свойствами будем называть циклами P_e (термин референта). Связь между предельными циклами действительного уравнения (1) и циклами P_e комплексного уравнения (2) устанавливается леммами 1—7. Особенно необходимо отметить леммы 6, 7 и далее, из которых следует, что: а) максимальное число предельных циклов уравнения (1) не превосходит максимального числа циклов P_e уравнения (2) и б) в отличие от предельных циклов, число которых меняется при изменении коэффициентов уравнения (1) (n—фиксировано), число циклов P_e остается постоянным, если только отвечающая уравнению (2) точка пространства коэффициентов остается вне некоторого, не разделяющего пространства множества.

Таким образом, поставленная задача приводится к исследованию какого-либо конкретного уравнения (2), не принадлежащего исключительному множеству.

В работе детально анализируется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_x'N - N_x'M}{M_y'N - N'M},$$

где M и N—полиномы, и на примерах этого типа завершается доказательство теоремы. Получить точную оценку, если $n>2$, здесь не удается, а все известные до сих пор примеры действительных уравнений показывают, что после данной оценки вопрос о точной верхней грани числа предельных циклов в случае $n>2$ остается открытым. Н. Ф. Отроков

3769. Установление периодичности решений для некоторого нелинейного дифференциального уравнения колебаний. Эрман (Nachweis periodischer Lösungen bei gewissen nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen. Ehrmann Hans), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, **1**, № 2, 124—138 (нем.)

Пусть для нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \qquad (1)$$

выполнены следующие условия:

А. Функция $f(t, x, v)$ — однозначно определена в области $-\infty < t, x, v < +\infty$, периодична по t с периодом T:

$$f(t+T, x, v) = f(t, x, v),$$

причем гарантируется существование, единственность и бесконечная продолжительность вправо решения любой начальной задачи Коши для уравнения (1) и непрерывность этого решения по начальным данным.

Б. Существуют непрерывные функции $h(x)$ и $k_j(t)$ $(j=1,2,3)$ такие, что

$$|f(t, x, v) - h(x)| \leqslant k_1(t)|x| + k_2(t)|v| + k_3(t).$$

В. Для каждого интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует абсолютная постоянная $C>0$ и положительные постоянные ε, c, X такие, что

$$\frac{f(t, x, v)}{x} \leqslant -C$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ $|v| \leqslant c|x|^{1+\varepsilon}$, $|x| \geqslant X$

Г. Имеет место по меньшей мере одно из двух условий симметрии: 1) $f(-t, x, -v) = f(t, x, v)$; 2) $f(-t, -x, v) = -f(t, x, v)$.

В таком случае, уравнение (1) допускает бесконечно много различных периодических решений $x(t)$ с периодом T: $x(t+T) = x(t)$.

Доказательство основано на сведении проблемы отыскания периодических решений дифференциального уравнения к некоторым стандартным краевым задачам. Условия А, Б, В, Г уточняются для случая дифференциального уравнения специального типа:

$$\ddot{x} + d(t, x, \dot{x})\dot{x} + g(t, x) = p(t). \qquad (2)$$

Разбирается также вопрос о существовании субгармонических решений уравнения (1). Б. П. Демидович

3770. Относительные периодические и асимптотические движения n-кратного физического маятника в одной плоскости. Брадистилов, Бояджиев (Mouvements relatifs périodiques et asymptotiques de n-pendules physiques multiples dans un plan: Bradistilov G., Boyadjiev G.), Докл. Болг. АН, 1957, **10**, № 6, 443—446 (франц.; рез. русск.)

Рассматривается движение системы последовательно соединенных физических маятников, расположенных в вертикальной плоскости, которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси, лежащей вне плоскости маятников. Предполагается, что вблизи положения равновесия p маятников направлены вниз и q маятников вверх.

Записываются уравнения движения. Затем в них полагается $\varphi_{r_p} = \lambda\psi_{r_p}$, $\varphi_{r_q} = \pi + \lambda\psi_{r_q}$, где φ_{r_p} и φ_{r_q} — углы отклонения от вертикальной оси, направленной вниз, соответственно маятников, направленных вниз и вверх. Входящие в уравнения движения функции разлагаются в ряды по степеням параметра λ, уравнения делятся на λ, затем полагается $\lambda = 0$ и получается порождающая линейная система.

Для порождающей системы записывается характеристическое уравнение и изучаются его корни в зависимости от угловой скорости ω вращения плоскости.

Показывается, что при выполнении определенных условий n-кратный физический маятник в относительном движении теряет q семейств периодических движений, взамен которых появляется семейство асимптотических движений, зависящее от q параметров. А. К. Никитин

3771. О существовании периодических движений двойного физического маятника в плоскости, когда один корень характеристического уравнения является кратным другого. Брадистилов (Върху съществуването на периодични движения на двойното физично махало в равнината, при кратни корени на характеристичното уравнение. Брадистилов Г.), Изв. Матем. ин-т Бълг. АН, 1957, 2, № 2, 73—85 (болг.; рез. русск., нем.)

Рассматривается вопрос о существовании периодических решений для системы дифференциальных уравнений движения плоского двойного физического маятника

$$(A_1 + I_1)\psi^{11}_1 + b_1B_2[\cos\lambda(\psi_1-\psi_2)\psi^{11}_2 + \lambda\sin\lambda(\psi_1-\psi_2)\psi_2^{12}] =$$

$$= -gB_1\psi_1 + \lambda gB_1\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{2n-3}\psi_1^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$B_2b_1[\cos\lambda(\psi_2-\psi_1)\psi^{11}_1 + \lambda\sin\lambda(\psi_2-\psi_1)\psi_1^{12}] + (A_2+I_1)\psi^{11}_2 =$$

$$= -gB_2\psi_2 + \lambda gB_2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{2n-3}\psi_2^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad (1)$$

когда между двумя корнями ρ_2 и ρ_1 характеристического уравнения системы (1) существует зависимость $\rho_2 = k\rho_1$, где k — целое положительное число, отличное

от единицы, а $\varphi_\nu = \lambda\psi_\nu$ — отклонение ν-го маятника ($\nu=1,2$) от вертикального положения.

Автор использует теорему Пуанкаре, что при начальных условиях

$$\psi_\nu(0)=0,\ \psi'_\nu(0)=\rho_1 L_{\nu_1}+k\rho_1 L_{\nu 2}(N+\alpha) \qquad (2)$$

и достаточно малых значениях λ и α решение системы (1) может быть представлено в виде рядов по целым положительным степеням λ и α, где $L_{\nu\mu}$ определяются из уравнений

$$[(A_1+I_1)\rho_\mu^2-gB_1]L_{1\mu}+b_1B_2\rho_\mu^2L_{2\mu}=0, \qquad (3)$$

$$B_2b_1\rho_\mu^2L_{1\mu}+[(A_2+I_2)\rho_\mu^2-gB_2]L_{2\mu}=0\ (\mu=1,2),$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}L_{11}&L_{12}\\L_{21}&L_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Доказывается, что если N является простым и вещественным корнем кубического уравнения

$$aN^3+bN^2+CN+d=0, \qquad (4)$$

то для физического маятника существуют семейства периодических движений. Подробного анализа корней уравнения (4) из-за его трудности автор не дает, но указывает, что при $k\neq 3$ уравнение (4) приводится к виду

$$aN^3+CN=0,$$

т. е. обладает одним простым корнем, и что поэтому в окрестности положения устойчивого равновесия существует одно семейство периодических движений. Приближенно периодическое решение имеет вид:

$$\varphi_\nu(t)=\lambda\psi_\nu(t)\approx\lambda L_{\nu_1}\sin\rho_1 t,$$

$$\varphi'_\nu(t)=\lambda\psi'_\nu(t)\approx\lambda\rho_1 L_{\nu 1}\cos\rho_1 t\ (\nu=1,2).$$

Если остальные два корня простые, то существуют еще два семейства периодических решений, которые выражаются приближенными уравнениями

$$\varphi_\nu(t)\approx\lambda L_{\nu 1}\sin\rho_1 t+\lambda L_{\nu 2}N\sin k\rho_1 t,$$

$$\varphi'_\nu(t)\approx\lambda\rho_1 L_{\nu 1}\cos\rho_1 t+\lambda k\rho_1 L_{\nu 2}N\cos k\rho_1 t. \qquad (5)$$

При $k=3$ в уравнении (4) $d\neq 0$ и это уравнение имеет один действительный корень, отличный от нуля. Если этот корень простой, то существует одно семейство периодических движений. Если и остальные корни уравнения (4) также вещественные и простые, то имеется еще два семейства периодических движений. Все три семейства приближенно выражаются уравнениями (5).

А. К. Никитин

3772. Асимптотические решения уравнения движения нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы с медленно изменяющимися параметрами. **Кузмак Г. Е.**, Докл. АН СССР, 1958, 120, № 3, 461—464

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\varepsilon f(\tau,y)\frac{dy}{dt}+F(\tau,y)=0, \qquad (1)$$

где ε — малый параметр, $\tau=\varepsilon t$ — медленное время.

Предполагая, что решение уравнения (1) имеет колебательный характер, автор с помощью метода «эталонных» уравнений (РЖМат, 1958, 3712) вычисляет выражения, пригодные для исследования решения уравнения (1) с ошибкой порядка ε при $0\leqslant t\leqslant\tau_0/\varepsilon$.

Доказывается теорема: Если при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ и $0\leqslant|y|\leqslant w$ функции $f(\tau,y)$ и $F(\tau,y)$ достаточно гладкие: «эталонное» уравнение

$$\varphi^2(\tau)\frac{\partial^2y_0}{\partial\omega^2}+F(\tau,y_0)=0,$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная функция, при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ имеет периодическое по ω решение с периодом, не зависящим от τ; произвольные функции $Q(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ определены из условий

$$Q(\tau)=0,\ \frac{d}{dt}\left[\varphi(\tau)\int_{a_1}^{a_2}\left(\frac{dy_0}{d\omega}\right)^2d\omega\right]+$$

$$+\varphi(\tau)\int_{a_1}^{a_2}f(\tau,y_0)\left(\frac{dy_0}{d\omega}\right)^2d\omega=0,$$

где a_1 и a_2 — последовательные нули производной $\frac{dy_0}{d\omega}$, причем так, что при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ $\varphi(\tau)\geqslant\delta>0$, то функция

$$\widetilde{y}(t)=y_0\left[\varepsilon t,\int\varphi(\varepsilon t)\,dt\right]+\varepsilon y_1\left[\varepsilon t,\int\varphi(\varepsilon t)\,dt\right]$$

удовлетворяет уравнению (1) при $0\leqslant t\leqslant\tau_0/\varepsilon$ и $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ с точностью до членов порядка ε^2.

Ю. А. Митропольский

3773. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности иррегулярно-особой точки. **Костомаров Д. П.**, Докл. АН СССР, 1955, 103, № 5, 759—762

Производится преобразование канонического уравнения второго порядка

$$\frac{d^2w}{dz^2}-Q(z)w=0, \qquad (1)$$

сохраняющее канонический вид уравнения

$$z_1=\int_{z_0}^{z}\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta,\ w_1=\sqrt[4]{Q}\,w. \qquad (2)$$

Уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{d^2w_1}{dz_1^2}-Q_1w_1=0, \qquad (3)$$

где

$$Q_1=1-q_1=1-\frac{5Q^{12}(z)-4Q(z)Q^{11}(z)}{16Q^3(Z)}.$$

Повторно применяя преобразование (2), получим бесконечную последовательность уравнений

$$\frac{d^2w_{n+1}}{dz_{n+1}^2}-[1-q_{n+1}(z(z_{n+1}))]w_{n+1}=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) получается из уравнения (1) преобразованием

$$z_{n+1}=\int_{z_0}^{z}\sqrt{F_n(\zeta)}\,d\zeta,\ w_{n+1}=\sqrt[4]{F_n}\,w,\ \text{где } F_n=\prod_{i=0}^{n}Q_i, \qquad (5)$$

$$F_0=Q,\ F_{n+1}=Q-\frac{5F_n^{12}-4F_nF_n^{11}}{16F_n^2}.$$

Пусть при $|z|>r_0$ $Q(z)=\sum_{i=0}^{\infty}Q_iz^{m-i}$, где $m>-2$ — целое число. В этом случае при достаточно большом $|z_{n+1}$

$$|q_{n+1}|<\frac{M_{n+1}}{|z_{n+1}|^{2(n+1)}},$$

где M_{n+1} — постоянная.

С помощью этого метода автор показывает, что в области G_k, расположенной в окрестности точки $z=\infty$

пределенной условием $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\arg z_{n+1}<\frac{\pi}{2}+k\pi$, существует решение $w_k(z)$ уравнения (1), представимое в G_k в виде

$$w_k = AF_n^{-1/4}\, e^{(-1)^{k-1}\int_{z_0}^{z}\sqrt{F_n(\zeta)}\,d\zeta}\left[1+O\left(z^{-\frac{(2n+1)(m+2)}{2}}\right)\right].$$

При аналитическом продолжении эта асимптотическая формула остается в силе в области $G=G_{k-1}+G_k+G_{k+1}$.

Значение $\sqrt{F_n(\zeta)}$ можно всегда выбрать так, чтобы функция $w_k(z)$ в области G_k экспоненциально убывала при $z\to\infty$. Ю. Л. Рабинович

3774. Бесконечные детерминанты, связанные с уравнением Хилла. Магнус (Infinite determinants associated with Hill's equation. Magnus Wilhelm), Pacif. J., Math. 1955, Suppl. № 2, 941—951 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение Хилла

$$y''+4[\omega^2+q(x)]y=0, \qquad (1)$$

где ω — положительная постоянная и $q(x)$ — четная функция периода π, с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Изучается аналитический характер специальных трансцендентных функций, нули которых определяют периодические решения уравнения (1). Б. П. Демидович

3775. О кривых, определяемых бинарной неконсервативной дифференциальной системой. Хартман, Винтнер (On curves defined by binary non-conservative differential systems. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, **76**, 497—501 (англ.)

Автор рассматривает уравнение

$$(p(t)z')'+h(t)z'+q(t)z=0$$

и доказывает, что если решение уравнения неколеблющееся для больших t и, кроме того, $t\to\infty$, $p(t)\to 1$, $h(t)\to 0$ и $q(t)\to 0$, то ненулевое решение дифференциального уравнения обладает свойством, что $z'(t)/z(t)\to 0$ при $t\to\infty$. W. Leighton

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 956.

3776. Метод усреднения канонических уравнений, содержащих «квазициклическую» угловую координату. Гробов В. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 858—860

Рассматривается динамическая система, описываемая уравнениями

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{dH}{dp_k},\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{dH}{dq_k}\ (k=1,2,\ldots,r), \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{dH}{dp_{r+1}},\quad \frac{dp_{r+1}}{dt}=-\mu\frac{dH_1}{d\varphi},$$

где

$$H=H_0(q_1,\ldots,q_r,p_1,\ldots,p_r,p_{r+1})+\mu H_1(q_1,\ldots,q_r,\varphi,p_1,\ldots,p_{r+1})+\mu^2\ldots,$$

H_0 — квадратичная форма относительно обобщенных координат $q_1,\ldots,q_r$ и обобщенных импульсов $p_1,\ldots,p_{r+1}$, μ — малый параметр, φ — „квазициклическая“ угловая переменная.

Согласно идее асимптотических методов Крылова—Боголюбова система (1) путем замены переменных согласно формулам

$$q_k^{(1)}=a_k\cos(\varphi+\psi_k), \qquad (2)$$

$$p_k=-\frac{1}{c_k}a_k\dot{\varphi}\sin(\varphi+\psi_k)-\frac{1}{c_k}\sum_{i=1}^{r}b_{ik}a_i\cos(\varphi+\psi_i)-\frac{\mu}{c_k}\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_k}\right)$$

приводится к следующему виду:

$$\frac{da_k}{dt}=F_k(a_1,a_2,\ldots,a_r,\varphi+\psi_1,\ldots,\varphi+\psi_r)\sin(\varphi+\psi_k), \qquad (3)$$

$$\frac{d\psi_k}{dt}=\frac{1}{a_k}F_k(a_1,a_2,\ldots,a_r,\varphi+\psi_1,\ldots,\varphi+\psi_r)\cos(\varphi+\psi_k),$$

после чего путем усреднения правых частей системы (3) по $\varphi+\psi_k$ за время, равное периоду, исключается „квазициклическая“ переменная, в результате чего автор получает уравнения первого приближения, дающие возможность исследовать стационарные движения, их устойчивость и т. д. Ю. А. Митропольский

3777. Некоторые теоремы о росте решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Лаунд (Some growth theorems for linear ordinary differential equations. Loud W. S.), Trans. Amer. Math., Soc., 1957, **85**, № 1, 257—264 (англ.)

1. С использованием методов А. М. Ляпунова даются оценки роста решений и оценка наибольшего характеристического показателя системы дифференциальных уравнений вида

$$dx/dt=A(t)x,$$

где $A(t)$ — ограниченная при $t>0$ кусочно-непрерывная матрица. В неравенствах, которыми даются оценки роста решений, привлекаются абсолютные величины начальных значений и норма матрицы $A(t)$.

2. Для уравнения $x''+a(t)x=0$, где $a(t)$ — кусочно-непрерывная и удовлетворяющая при $t\geqslant 0$ условиям $\alpha\leqslant a(t)\leqslant\beta$ функция, даются оценки наибольшего характеристического показателя λ_0 следующими неравенствами:

$$\lambda_0\leqslant|\alpha|^{1/2}\ \text{при}\ (3\alpha+\beta)\leqslant 0,$$

$$\lambda_0\leqslant 2^{-3/2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)^{-1/2}\ \text{при}\ (3\alpha+\beta)\geqslant 0.$$

Уравнение предварительно преобразуется к полярным координатам.

Полученный результат применяется к исследованию уравнения $x''+cx'+a(t)x=0$ при $0<\alpha\leqslant a(t)\leqslant\beta$ и $c>\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$. Б. Ф. Былов

3778. Несколько рассмотрений, относящихся к некоторым нелинейным системам дифференциальных уравнений. Кордуняну (Cîteva consideratii în legatură cu unele sisteme neliniare de ecuatii diferentiale. Corduneanu C.), Studii si cercetări stiint. Acad. RPR Fil. Iasi. Mat., 1956, **7**, № 2, 13—32 (рум.; рез русск., франц.)

Работа содержит несколько результатов, относящихся к поведению в целом решений некоторых дифференциальных систем вида

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_i)+g_i(t,x_1,\ldots,x_n)\ (i=1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

и

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=f_i(t,x_i)+g_i(t,x_1,\ldots,x_n) \qquad (2)$$

при различных условиях относительно функций $f_i(t,x_i)$ и $g_i(t,x_1,\ldots,x_n)$.

Пусть функции f_i и g_i удовлетворяют условиям: а) f_i и g_i непрерывны при $t\geqslant 0$, $-\infty<x_1,\ldots,x_n<+\infty$; б) $f_i(t,0)+g_i(t,0,0,\ldots,0)$ ограничены на полуоси $t\geqslant 0$;

в) производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ удовлетворяют условиям

$0 \leqslant k \leqslant n$

$$-M \leqslant \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqslant -m \quad (i = 1,2,\ldots,k),$$

$$0 < m \leqslant \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqslant M \quad (i = k+1,\ldots,n);$$

г) функции g_i удовлетворяют условиям

$$|g_i(t,x_1,\ldots,x_n) - g_i(t,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)| \leqslant$$
$$\leqslant L\sum_{j=1}^{n} |x_j - \bar{x}_j|,$$

где $L < \frac{m}{n}$.

Тогда система (1) допускает единственное ограниченное решение (на полуоси $t \geqslant 0$), которое удовлетворяет условиям

$$x_i(0) = x_i^\circ \quad (i = 1,\ldots,k). \qquad (3)$$

Если x и $\bar{x}$ — два ограниченных решения этой системы, тогда

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \bar{x}_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2,\ldots,n).$$

Когда функции f_i и g_i удовлетворяют аналогичным условиям для $-\infty < t, x_1,\ldots,x_n < +\infty$, тогда система (1) имеет единственное ограниченное решение на всей вещественной оси. Она имеет также k-параметрическое семейство ограниченных решений на полуоси $t \geqslant 0$ и $(n-k)$-параметрическое семейство ограниченных решений на полуоси $t \leqslant 0$. Пусть f_i и g_i — непрерывные функции в области

$$t \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant a, \quad a > 0, \qquad (4)$$

которые удовлетворяют условиям б), в), г). Если $\sum_{j=1}^{k} |x_j^\circ|$ и $|f_i(t,0) + g_i(t,0,\ldots,0)|$ достаточно малы, тогда система (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (3). Показывается, что каждое ограниченное решение системы (1) является условно устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Работа содержит также несколько результатов относительно периодичности и почти периодичности ограниченных решений. Вторая часть работы посвящена аналогичным задачам относительно систем вида (2).

Пусть функции f_i и g_i удовлетворяют условиям а), в), г) и пусть

$$0 < m \leqslant \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqslant M \quad (i = 1, 2,\ldots,n).$$

Тогда система (2) имеет единственное решение на полуоси $t \geqslant 0$, так что имеют место соотношения (3). Если x и $\bar{x}$ — два ограниченных решения, тогда

$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \bar{x}_i(t)| = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Резюме автора

3779. **Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.** Шусюэ цзиньчжань, Shuxue jinzhan, 1958, **4**, № 3, 410—449 (кит.)

3780. **Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Айзерман, Гантмахер** (Determination of stability by linear approximation of a periodic solution of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides. Aizerman M. A., Gantmacher F. R.) Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 4, 385—398 (англ.)

См. РЖМат, 1959, 363.

3781. **Решение некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений рядом из экспоненциальных функций. Вазов** (Solution of certain nonlinear differential equations by series of exponential functions Wasow Wolfgang), Illinois J. Math., 1958, **2**, № 2, 254—260 (англ.)

Рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(y) + \sum_{k=1}^{n} g_k e^{i\omega_k x}$$

ω_k вещественны, необязательно несоизмеримы. При условиях: 1) $f(a_0) = 0$, 2) компоненты $f(y)$ — голоморфные функции компонент вектора y в области $\|y - a_0\| \leqslant \leqslant \rho\ (\rho > 0)$, 3) собственные числа матрицы A не лежат на мнимой оси, где A — матрица при линейных членах разложения $f(y)$ в $y = a_0$, 4) $\|g_k\| \leqslant g_0$, где $g_0 > 0$ — постоянная, зависящая от вида $f(y)$, доказано существование почти периодического решения, представимого рядом

$$y = a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r e^{i\mu_r x},$$

который сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < x < +\infty$ $\mu_r = \sum_{k=1}^{m} n_k\omega_k$, где n_k — целые неотрицательные числа, не все равные нулю. Коэффициенты $a_r (r > 0)$ последовательно определяются решением систем линейных алгебраических уравнений. К. Г. Валеев

3782 К. **Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Титчмарш** (Eigenfunction expansions associated with second—order differential equations. Part 2. Titchmarsh Edward Charles. Oxford, Clarendon Press, 1958, xi, 404 pp., 70 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 444, 9 (англ.)

3783 К. **Дифференциальные уравнения.** Учебно-метод. пособие для студ.-заочн. III и IV курсов физ.-матем. фак. пед. ин-тов. **Егорова И. А.** М., Учпедгиз, 1958, 116 стр., илл., 1 р. 85 к.

3784 К. **Элементарные дифференциальные уравнения и операторы. Рейтер** (Elementary differential equations and operators. Reuter G. E. H. London, Routledge and K. Paul, 1958, viii, 67 pp., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 447, 10 (англ.)

3785 К. **Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. Пинни** (Ordinary difference-differential equations. Pinney Edmund. Berkeley, California: Univ. Press; London, Cambridge Univ. Press, 1958, xii, 262 pp., ill., 37 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 440, 12 (англ.)

3786 К. **Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е, испр. и доп. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** М., Физматгиз, 1958, 408 стр., илл., 17 р. 55 к.

3787 Д. **О решениях систем дифференциальных уравнений с почти периодическими и с «близкими к периодическим» коэффициентами. Штелик В. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т металлофиз. АН УССР, Киев, 1958

3788 Д. **Качественное исследование некоторой нелинейной системы двух дифференциальных уравнений. Кушков Н. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

3789 Д. **О существовании периодических решений у некоторых систем дифференциальных уравнений треть-**

его и четвертого порядка и о поверении решений систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Вайсборд Э. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

3790 Д. Асимптотические методы в теории релаксационных колебаний. Мищенко Е. Ф. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3791. Замечание о критерии Петровского равномерной корректности задачи Коши для уравнений в частных производных. Соболев С. Л., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 4, 598—601

Линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{k<n} A_{k,l} \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l}$$

с двумя независимыми переменными t, x и с постоянными коэффициентами называется оператором Петровского, если задача Коши

$$L u = F(t, x),$$
$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \ldots = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=0} = 0$$

корректно разрешима. Имеет место следующее предложение алгебраического характера, доказанное И. Г. Петровским (Бюл. Моск. ун-та, 1938, № 7, 23): Для того чтобы L был оператором Петровского, необходимо и достаточно, чтобы корни $\lambda = \lambda(\alpha)$ уравнения

$$\Delta(\lambda, \alpha) = \lambda^n + \sum_{k<n} A_{k,l} \lambda^k \alpha^l$$

при чисто мнимых α удовлетворяли неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0 \quad (\sigma_0 = \text{const}).$$

В реферируемой работе дается некоторое каноническое представление операторов Петровского, вытекающее из определенных свойств многочлена $\Delta(\lambda, \alpha)$.

Л. Н. Слободецкий

3792. Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Салахитдинов М., ЎЗССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 8, 5—8 (рез. узб.)

Автор применяет метод внешних форм Картана к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t, \lambda) = 0,$$

где $z(x, y)$ — неизвестная функция, а λ — параметр.

Н. И. Мозжерова

3793. О новом расширении теоремы существования для уравнений с частными производными первого порядка. Чинкуини-Чибрарио, Чинкуини (Sopra una nuova estensione di un teorema di esistenza per equazioni a derivate parziali del primo ordine. Cinquini Cibrario Maria, Cinquini Silvio), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 51—81 (итал.)

Теорема существования (в стиле Каратеодори) решения задачи Коши

$$z_x = f(x, y_1, y_2, z, z_{y_1}, z_{y_2}); \quad z\,|_{x=0} = \varphi(y_1, y_2);$$
$$0 \leqslant x \leqslant a_0; \quad -\infty < y_1, y_2 < \infty, \qquad (1)$$

которое понимается как решение интегрального уравнения

$$z(x, y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2) + \int_0^x f(t, y_1, y_2, z(t, y_1, y_2), z_{y_1}, z_{y_2})\, dt.$$

Пусть функция f определена при $x \in [0, a_0]$ и для всех y_1, y_2, z, q_1, q_2 непрерывна вместе с $f_{y_1}, \ldots, f_{q_2}$ по $y_1, \ldots, q_2$; все функции $f, f_{y_1}, \ldots, f_{q_2}$ измеримы и мажорируются суммируемой функцией по x и удовлетворяют по $y_1, \ldots, q_2$ условию Липшица с суммируемой по x константой; функция φ непрерывно дифференцируема, а φ_{y_1} и φ_{y_2} ограничены и удовлетворяют условию Липшица. Тогда в некотором слое $0 \leqslant x \leqslant a$; $-\infty < y_1, y_2 < \infty$ существует решение задачи, которое вместе с z_{y_1} и z_{y_2} непрерывно, абсолютно непрерывно по x и удовлетворяет по y_1, y_2 условию Липшица. Доказательство основано на рассмотрении системы уравнений характеристик в интегральной форме и опирается на результаты предыдущей работы авторов (Ann. mat. pura ed appl., 1951, **31**, 121—155; см. также РЖМат, 1955, 1220), где аналогичным образом исследовано уравнение $p = f(x, y, z, q)$. Дан метод для вычисления a; на примере показано, что этот общий метод может быть значительно уточнен, но, вообще говоря, положить $a = a_0$ нельзя. Доказано, что интегральная поверхность целиком состоит из характеристик. Если дополнительно дано, что функция f непрерывна по всем аргументам, то существует непрерывная производная z_x и уравнение (1) удовлетворяется в классическом смысле. Единственность решения в общем случае вытекает из результатов предыдущей работы одного из авторов. Указано, что предположение о наличии только двух аргументов вида y_1, y_2 сделано лишь для простоты изложения. А. Д. Мышкис

3794. О решении задачи Коши для некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами. Галонен Л. М., Тр. Ростовск.-н/Д. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 6, 259—265

Рассматривается решение задачи Коши для уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_{n+1} u = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$X[Y(u)] + aX(u) + bY(u) + cu = 0, \qquad (2)$$

и что a, b и c связаны между собой одним из соотношений

$$X(a) + ab - c = 0, \qquad (3)$$

$$Y(b) + ab - c = 0, \qquad (4)$$

где

$$X(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad Y(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \mu_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

λ_i и μ_i — функции от x_i, которые выражаются через коэффициенты уравнения (1).

Уравнение (2) при выполнении, например, условия (3) приводится к системе уравнений 1-го порядка

$$X(v) + bv = 0, \quad Y(u) + au = v. \qquad (5)$$

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения (2) сводится к последовательному решению задач Коши для уравнений первого порядка системы (5). Для решения этих задач применяется метод полного интеграла.

Далее автор утверждает, что условия приведения уравнения (1) к виду (2) легко получить, если уравнение характеристик может быть разложено на линейные множители. В частности, для уравнения гиперболо-параболического типа

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_n \frac{\partial u}{\partial t} + A_{n+1} u = 0, \qquad (6)$$

где

$$A_{ii}A_{kk} - A_{ik}^2 = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

эти условия будут

$$[X(\sqrt{A_{ii}}) - A_i]\sqrt{A_{kk}} = [Y(\sqrt{A_{kk}}) - A_k]\sqrt{A_{ii}}. \qquad (7)$$

При этом

$$X(u) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{A_{ii}}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad Y(u) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_{ii}}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{X(\sqrt{A_{ii}}) - A_i}{\sqrt{A_{ii}}} - A_n\right], \quad b = \frac{1}{2}\left[\frac{X(\sqrt{A_{ii}}) - A_i}{\sqrt{A_{ii}}} + A_n\right]$$

$$c = A_{n+1}$$

и если, кроме того, a, b и c удовлетворяют условию (3) или (4), то уравнение (6) сводится к системе уравнений (5).

Условия (7) и (3) заведомо выполняются, если $A_{ik} = \text{const}$, $A_i = 0$, $A_n = 0$ и $A_{n+1} = 0$. М. М. Смирнов

3795. Письмо в редакцию. Фаге М. К., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 2, 248

Сообщается, что в заметке автора „Дифференциальные уравнения с чисто смешанными производными и главным членом" (РЖМат, 1959, 376) повторяются результаты Л. Бианки о существовании и единственности решения задачи с характеристическими предельными данными и задачи Коши, определение функции Римана и билинейная формула. Однако доказательство теоремы существования было опубликовано Л. Бианки лишь для простейшего случая. Новой в заметке автора была постановка начальных данных и детализация формулы Римана.

А. С. Монин

3796. Задача Дирихле для уравнения $\text{Det}\,\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0$. **Александров А. Д.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 1, 5—24 (рез. англ.)

Рассматривается задача Дирихле для указанного уравнения, которое представляется в виде

$$f(z_i, z, x)\,\text{Det}\,\|z_{ij}\| = h(x). \qquad (1)$$

Функция f подчиняется условиям: I) $f(\zeta, z, x)$ определена для всех ζ и z и всех $x \in D$; кроме того, $f \geqslant 0$. II) Для всякой ограниченной области R изменения переменных ζ, z, x существует суммируемая функция $f_0(\zeta)$ такая, что в R $f \leqslant f_0$. III) Существует такое z_0 и функция $f_1(\zeta) \geqslant 0$, что $\int f_1(\zeta)\,d\zeta > 0$ и при всех $x \in D$ и $z < z_0$ $f(\zeta, z, x) \geqslant f_1(\zeta)$. IV) При всех ζ функция $f(\zeta, z, x)$ непрерывна по z и x. Функция $h(x)$ предполагается суммируемой и неотрицательной.

Для борелевских множеств в D и выпуклой функции z определяется функция множества

$$\omega_f(M, z) = \int_{(M)} f(z_1, \ldots, z, x, \ldots)\,\text{Det}\,\|z_{ij}\|\,dx_1, \ldots, dx_n.$$

Благодаря соотношению $\text{Det}\,\|z_{ij}\|\,dx_1 \ldots dx_n = dr_1\,dr_2 \ldots dr_n$, эта функция множеств ω_f распространяется на любые выпуклые функции $z(x_1, \ldots, x_n)$

Если обозначить

$$\mu(M) = \int_M h(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1, \ldots, dx_n,$$

то отыскание выпуклых функций, удовлетворяющих (1), эквивалентно отысканию таких выпуклых функций z, для которых равенство

$$\omega_f(M, z) = \mu(M) \qquad (2)$$

имеет место для любого борелевского множества M из D. А эта задача имеет смысл в классе выпуклых функций без предположения двукратной дифференцируемости. Выпуклая функция, удовлетворяющая (2), называется обобщенным решением (1).

Доказывается существование обобщенных решений уравнения (1). Доказательство ведется геометрическими средствами. А. В. Погорелов

3797. К теории уравнений Монжа-Ампера. Бакельман И. Я., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 1, 25—38 (рез. англ.)

Рассматривается краевая задача для уравнения Монжа-Ампера вида

$$rt - s^2 = \varphi(x, y) \cdot R(p, q), \qquad (1)$$

где $\varphi(x, y) > 0$ – суммируемая в каждой ограниченной области плоскости xy функция, а R — непрерывная функция на плоскости pq, удовлетворяющая условию $R(p, q) \geqslant R_0 = \text{const} > 0$.

Если обозначить

$$\omega_R(z, M) = \int_M \frac{rt - s^2}{R(p, q)}\,dx\,dy, \quad \mu(M) = \int_M \varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

то решение задачи Дирихле для уравнения (1) в области D равносильно отысканию такой функции $z(x, y)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям, для которой

$$\omega_R(z, M) = \mu(M) \qquad (2)$$

по отношению к любому борелевскому множеству M из D.

Функция $\omega_R(z, M)$ легко распространяется на случай любых выпуклых функций $z(x, y)$.

Таким образом, краевая задача для уравнения (2) может рассматриваться в классе выпуклых функций $z(x, y)$ без предположения двукратной дифференцируемости. Такие решения автор называет обобщенными решениями для уравнения (1).

Основная теорема: Для выпуклой области D при заданных непрерывных граничных значениях ψ существует два и только два решения $z^+(x, y)$, $z^-(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющих условиям: 1) поверхность $z = z^+(x, y)$ обращена выпуклостью в сторону $z > 0$, а поверхность $z = z^-(x, y)$ в сторону $z < 0$, 2) на границе D $z^+(x, y) \geqslant \psi(x, y) \geqslant z^-(x, y)$, 3) не существует решения $z^\dagger(x, y)$ уравнения (2) в D, для которого на границе D было бы $z^+(x, y) \geqslant \bar{z}^+(x, y) \geqslant \psi(x, y)$ и которое не совпадало бы с $z^+(x, y)$, точно так же не существует решения $\bar{z}^-(x, y)$, которое на границе D удовлетворяло неравенству $z^-(x, y) \leqslant \bar{z}^- (x, y) \leqslant \psi(x, y)$ и не совпадало с $z^-(x, y)$. А. В. Погорелов

3798. Применения функционального анализа для доказательства существования решений краевых задач для уравнений с частными производными трех основных типов. Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 200—202

Рассматриваются некоторые типы нестационарных операторных уравнений при определенных начальных условиях. Краевые задачи и задачи Коши для уравнений и систем параболического и гиперболического типов, для уравнения Шредингера, а также для систем Максвелла, Дирака и ряда других уравнений могут быть трактованы как частные случаи изучаемых операторных уравнений.

Пусть H есть полное сепарабельное гильбертово пространство, и H_1—полное гильбертово пространство всех измеримых на $[0, l]$ функций $u(t)$ со значениями из H, с метрикой $(u, v)_{H_1} = \int_0^l (u(t), v(t))_H dt$. Устанавливается разрешимость следующих задач:

I. Найти функцию $u(t)$ из H_1, удовлетворяющую уравнению

$$Su \equiv u_t + S_1(t)u + B(t)S_1(t)u + S_2(t)u = f$$

и условию $u(0) = \varphi_0$. Здесь $S_k(t)$ — заданные линейные операторы в H, зависящие от параметра $t \in [0, l]$, так что $v_k(t) = S_k(t)x\ (k = 1, 2)$ принадлежат H_1, если $x \in D(S_1)$; f и φ_0 — заданные элементы H_1 и H соответственно. Оператор $S_1(t)$ является самосопряженным и положительно определенным, причем область определения его $D(S_1)$ плотна в H и не зависит от t. Оператор $S_2(t)$ в определенном смысле подчинен $S_1(t)$, а $B(t)$ является ограниченным кососимметрическим.

II. Найти функцию $u(t) \in H_1$, удовлетворяющую уравнению

$$Su \equiv u_{tt} + S_1(t)u + B(t)S_1(t)u + S_2(t)u = f$$

и условиям

$$u(0) = \varphi_0 \text{ и } u_t(0) = \varphi_1.$$

Здесь заданные операторы и функции подчинены, примерно, тем же ограничениям, что и в п. I.

III. Найти функцию $u(t) \in H_1$, удовлетворяющую уравнению Шредингера

$$Su = u_t - iS_1(t)u = f$$

и условию

$$u(0) = \varphi_0.$$

Относительно $S_1(t)$ предполагается то же, что и в п. I. Может быть сформулирован метод приближенного вычисления решения этих задач, сходимость которого следует из указанных теорем существования. О. В. Гусева

3799. Теория вероятностей и первая краевая задача. Дуб (Probability theory and the first boundary value problem. Doob J. L.), Illinois J. Math., 1958, 2, № 1, 19—36 (англ.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 1454; см. также РЖМат, 1958, 7741) развита общая схема вероятностного анализа первой краевой задачи (для линейных уравнений в условиях применимости принципа максимума). В данной работе эти исследования продолжены в различных направлениях, причем предыдущие результаты кратко сформулированы и систематически используются. В основу положено локально бикомпактное сепарабельное хаусдорфово пространство R, причем некоторые из открытых подмножеств R, компактные в R и образующие базис, объявлены регулярными (в смысле решения первой краевой задачи). Если D — такое множество с границей D' и $\xi \in D$, то на D' предполагается заданной мера $\mu(\xi, D, \cdot)$ (аналогичная гармонической мере). При выполнении определенных естественных требований с помощью этой меры автор ввел понятие регулярных функций (аналогичных гармоническим, а при другом выборе μ — решениям уравнения теплопроводности), суб- и суперрегулярных функций. Решение первой краевой задачи для регулярных функций (в любом открытом множестве K) строится с помощью обобщенного метода Перрона, в связи с чем введены понятия резолютивных граничных условий и резолютивного множества K (для которого любые непрерывные граничные условия резолютивны). Считается, что R можно представить в виде суммы возрастающей последовательности резолютивных множеств R_n с компактными замыканиями. В некоторых случаях рассматриваются также бикомпактное расширение $R \cup R'$ пространства R и случайные пути, уходящие к R' по множествам R_n'; каждый из этих путей представляет собой марковский процесс с вероятностью перехода от R_n' к R_{n+1}', равной $\mu(\xi, R_{n+1}')$, где ξ — фиксированная точка (начало пути).

Пусть теперь в R дана регулярная функция $h \geqslant 0$ $(h \not\equiv 0)$, причем H — множество точек, где $h > 0$. Тогда функция u называется h-регулярной (это понятие введено в данной работе), если uh регулярна в R. Вводится соответствующая мера μ^h, с помощью которой можно выразить h-регулярную функцию через ее граничные значения на резолютивной области. На h-регулярные функции переносятся все основные рассмотрения предыдущей работы, в частности изучаются свойства случайных h-путей. Далее, h-регулярная функция $u \geqslant 0$ на R называется h-минимальной, если любая h-регулярная на R функция u_1, для которой $0 \leqslant u_1 \leqslant u (\text{в} H)$ пропорциональна u в H. Исследуются различные свойства таких функций; например, доказано, что если h-минимальная функция ограничена, причем $\sup u = 1$, то почти для всех h-путей с началом в любой точке $\xi \in H$ предел u равен 0 или 1, и $u(\xi)$ равно вероятности того, что предел равен 1, а на R' существует такая точка, что $u(\xi)$ равно вероятности того, что h-путь из $\xi \in H$ имеет ее предельной точкой. Затем рассматривается вероятность $u^h_G(\xi)$ попадания h-путей с началом в ξ в заданное открытое множество $G \subset R$, причем для дальнейшего приходится потребовать, что u^h_G обладает рядом необходимых свойств (которые имеют место, например, для „пространств Грина" по Брело и гармонических функций). После этого проводится подробный анализ решения первой краевой задачи для h-регулярных функций в R по Перрону—Винеру, Брело; например, доказано, что ограниченная борелевская функция, определенная на R', резолютивна тогда и только тогда, когда она постоянна на предельном множестве почти всех h-путей с началом в любой точке H. В заключение рассматриваются свойства функции $h_A(\xi)$, равной нижней грани неотрицательных суперрегулярных функций, которые $\geqslant h$ в какой-либо окрестности заданного множества $A \in R'$.

А. Д. Мышкис

3800. О зависимостях между решениями некоторых классов граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков. Манжерон (Asupra relatiilor ce interced între diferite tipuri de probleme pe contur pentru unele clase de ecuatii cu derivate partiable de ordin superior. Mangeron D.), Bul. Inst. politehn. Iasi, 1957, 3, № 1-2, 39—42 (рум.; рез. русск., англ.)

Доказывается, что из решений $W_k(z_k, t)$ системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^m W_k(x_k,t)}{\partial x_k^m} = \frac{\partial W_k(x_k,t)}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial^m W_k(x_k,t)}{\partial x_k^m} = \varepsilon_k \frac{\partial W_k(x_k,t)}{\partial t},$$

$\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаются соответственно решения уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^m U(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k^m} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial^m U(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k^m} = 0,$$

где

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n} W_k(x_k, t)\, dt$$

при условиях вида

$$\lim_{t\to\infty}\prod_{k=1}^{n} W_k(x_k,t) - \lim_{t\to 0}\prod_{k=1}^{n} W_k(x_k,t) = 0.$$

Н. И. Мозжерова

3801. Еще одно добавление к «Преобразованию краевых задач». Комацу (Further supplement to «On transference of boundary value problems». Komatu Yusaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 1, 1—8 (англ.)

Дается дополнение к работе автора (РЖМат, 1956, 1378).

3802. Приложение метода приближенных решений в теории смешанных задач. Лион (Une application de la méthode des solutions approchées dans la théorie des problèmes mixtes. Lions J. L.), Bull. Soc. math. Belgique, 1956, 8, № 2, 127—135 (франц.)

Пусть Ω — область в R^n, $D(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω и естественной топологией, $D'(\Omega)$ — двойственное ему пространство распределений на Ω; $L_2(\Omega) = H^0$; для f, $g \in H^0$ положено

$$(f, g)_0 = \int_\Omega f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Рассматривается сепарабельное гильбертово пространство V такое, что $D(\Omega) < V < H^0$; V плотно в H^0 (неравенство обозначает возможность соответственного алгебраического вложения с сохранением непрерывности). На V задается билинейная эрмитова непрерывная форма

$$u, v \to a(u,v), \qquad u,v \in V.$$

На V определяется линейный оператор A равенством $a(u,\varphi) = <Au,\varphi>$, $u \in V$, $\varphi \in D(\Omega)$, $Au \in D'(\Omega)$; при этом линейное вложение $u \to Au$ непрерывно из V в $D^1(\Omega)$.

Далее определяется подмножество $N \subset V$ функций u таких, что $Au \subset H^0$ и при этом $(Au,v)_0 = a(u,v)$ для всех $v \in V$. N превращается в гильбертово пространство, если положить $|u|_N = (|u|_v^2 + |Au|_0^2)^{1/2}$. В приложениях A будет дифференциальным оператором, условие $u \in N$ означает, что u удовлетворяет некоторым граничным условиям.

Определение 1. Говорят, что форма a эллиптическая на V, если существует число λ такое, что

$$\mathrm{Re}\, a(u,u) + \lambda |u|_0^2 \geqslant \alpha |u|_V^2, \qquad \alpha > 0,$$

для всех $u \in V$.

Пусть далее, $t \in R$ — временная переменная, D_- — пространство бесконечно дифференцируемых на R_t функций, с носителем, ограниченным справа с топологией Шварца. (Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, 1950—1951, II). Если E — локально выпуклое векторное топологическое пространство, то определяется

$$D'_+(t, E) = L(D_-, E)$$

пространство распределений по t со значениями в E и носителями, ограниченными слева (через $L(E,F)$ обозначается пространство линейных непрерывных отображений из E в F). Если E обозначает пространство бесконечно дифференцируемых функций на R_t с произвольным носителем и топологией Фреше, то определяется

$$E'(t, E) = L(E, E)$$

пространство распределений по t со значениями в E и компактным носителем.

Известно, что если E — банахово пространство, то любой элемент $T \in E'(t, E)$ есть

$$T = D^\mu(f), \qquad D = \frac{d}{dt},$$

где $f(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция из R_t в E с носителем, сколь угодно близким к носителю T.

Наконец, если $u \in D'_+(t, N)$, то Au определяется как элемент $D'_+(t, H^0)$ формулой

$$Au(\varphi) = A(u(\varphi)), \quad \varphi \in D$$

и вложение $u \to Au$ из $D'_+(t, N)$ в $D'(t, H^0)$ линейно и непрерывно.

Основной результат работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Если форма a эллиптическая над V, то оператор $A + D\left(D = \frac{d}{dt}\right)$ определяет изоморфизм из

$$D'_+(t, N) \text{ в } D'_+(t, H^0).$$

Эта теорема, доказанная ранее автором с помощью преобразования Лапласа, доказана в настоящей работе более элементарным и общим методом Фаэдо—Галеркина, позволяющим рассматривать оператор A зависящим от времени.

А. Л. Крылов

3803. Уравнения и трансформация Лапласа. Винтнер (Equations laplaciennes et transformation de Laplace. Wintner Aurel), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 17, 1369—1371 (франц.)

Для уравнения

$$\Delta u - f(r)\, u = 0 \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \tag{1}$$

в трехмерном пространстве построены, при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию $f(r)$, фундаментальные решения. Результат обобщается в виде следующей теоремы:

Пусть $f(r) \in C^\infty(0, \infty)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\left(-1\right)^k \frac{\partial^k f}{\partial r^k} \geqslant 0 \qquad (k = 0,1, \ldots, 0 < r < \infty);$$

обозначим через $Y_m(\theta, \varphi)$ сферическую функцию порядка $m \geqslant 0$. Тогда дифференциальное уравнение (1) имеет решение $u(x,y,z)$ вида

$$u(x,y,z) = u_m(r)\, Y_m(\theta, \varphi),\ u_m(r) = \nu_m(r)\, r^{-1},$$

в котором функция $\nu_m(r)$ (>0) есть интеграл Лапласа—Стилтьеса

$$\int_0^\infty e^{-rs}\, d\mu(s) \qquad (d\mu(s) \geqslant 0), \tag{2}$$

сходящийся на полупрямой $(0, \infty)$. Как следствие, множитель $u_m(r)$ при функции $Y_m(\theta, \varphi)$ сам обладает представлением (2). Функция $\nu_m(r)$ не зависит от частного выбора $2m + 1$ произвольных постоянных полинома $Y_m(\alpha, \beta, \gamma) = Y_m(\theta, \varphi)$, она определяется (с точностью до положительного множителя) степенью m полинома Y_m и коэффициентом $f(r)$ дифференциального уравнения (1).

О. В. Гусева

3804. Неполуограниченные дифференциальные операторы в частных производных при граничных условиях третьего рода. Кордес (Nicht-halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren bei Randbedingungen dritter Art. Cordes Heinz Otto), Math. Nachr., 1956, 15, № 4, 240—249 (нем.)

Рассматривается дифференциальный оператор

$$D = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -\Delta$$ в гильбертовом пространстве

H функций, суммируемых с квадратом в некоторой области G с гладкой границей Γ. Область определения оператора D устанавливается следующими условиями:

а) $u(x,y)$ и ее первые производные непрерывны в D, вторые производные кусочно-непрерывны в каждой замкнутой подобласти, б) $\Delta u \in H$, в) $\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u \mid_\Gamma = 0$, где σ непрерывна на Γ, за исключением точки (x_0,y_0), г) $u \equiv 0$ в окрестности (x_0,y_0).

Показывается что достаточно выбрать особенность σ больше, чем первого порядка, и подходящего знака, чтобы оператор не был полуограниченным. С другой стороны, если особенность σ имеет порядок меньше единицы, то доказывается полуограниченность оператора. В этом случае индексы дефекта оператора оба равны 1.

В. С. Виноградов

3805. О третьей граничной задаче теории потенциала. Фрейд (A potenciálelmélet harmadik paremértékfeladatáról. Freud Géza), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), **3**, № 1-2, 223—239 (венг.; рез. русск., нем.)

3806. К задаче Дирихле для областей с углами. Никольский С. М., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 1, 33—35

В статье кратко и без доказательств излагаются результаты автора о необходимых и достаточных условиях, которым удовлетворяют граничные значения функций, заданных на плоских областях с кусочно-гладкой границей и принадлежащих некоторым функциональным пространствам; в частности, этот вопрос изучается и для гармонических функций определенных классов. Подробное изложение всех этих результатов было дано автором в его последующих работах (РЖМат, 1957, 6263 и 1959,293).

Приводится также способ, позволяющий улучшить тот или иной метод решения задачи Дирихле для гармонических функций за счет предварительного вычисления стандартных для данной области гармонических функций, не зависящих от граничных условий. Л. Д. Кудрявцев

3807. О некоторых свойствах гармонических функций, заданных на полупространстве. Бесов О. В., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, **20**, № 4, 469—484

Доказывается следующая теорема: Пусть на гиперплоскости $x_n = 0$ n-мерного евклидова пространства E^n, состоящего из точек $(x_1, \ldots, x_n)$, задана функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}(E^{n-1}, N)$$ (определение H-классов см. РЖ Мат, 1953, 148), причем $r>1$, $r-1/p$ — не целое для $1 \leqslant p < \infty$ и $r > 0$, r — не целое для $p=\infty$. Пусть $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha \leqslant 1$. Обозначим полупространство $x_n > 0$ через E^n_+ и положим для функций f, определенных на E^n_+,

$$\| f \|_{L_p\left(E^n_+\right)} = \left(\int |f|^p \, dE^n_+ \right)^{1/p}.$$

Тогда существует гармоническая функция $u(x_1,\ldots, x_n)$, определенная в полупространстве E^n_+, для которой выполняются следующие условия:

1. Существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $x_n > 0$ имеет место

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) |^p \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/p} \leqslant M.$$

2. Все частные производные функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ порядка от 1 до $\bar{r}$ в случае $1 \leqslant p < \infty$ и соответственно порядка от 0 до $\bar{r}$ в случае $p = \infty$ ограничены в смысле нормы пространства $L_p(E^n_+)$.

3. Существует постоянная $\bar{N} > 0$ такая, что для всех частных производных функции u порядка $\bar{r}$ в случае $0 < \alpha < 1$ имеет место

$$\left\| \Delta^1_{h_i} \left(\frac{\partial^{\bar{r}} u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \right) \right\|_{L_p\left(E^n_+\right)} \leqslant \bar{N} |h_i|^\alpha,$$

а в случае $\alpha = 1$

$$\left\| \Delta^2_{h_i} \left(\frac{\partial^{\bar{r}} u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \right) \right\|_{L_p\left(E^n_+\right)} \leqslant \bar{N} |h_i|,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, причем при $i = n$ предполагается $h_n > 0$.

Здесь $\Delta^1_{h_i}$ и $\Delta^2_{h_i}$ обозначают соответственно первую и вторую разности рассматриваемых функций по i-й переменной с шагом h_i.

4. $$\bar{N} \leqslant c \left(N + \|\varphi\|_{L_p\left(E^{n-1}\right)} \right),$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от функции φ.

5. В смысле сходимости в среднем имеет место

$$u(x_1, \ldots, x_n)\big|_{x_n = 0} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Указывается, что полученная теорема является обобщением соответствующих результатов С. М. Никольского (РЖМат, 1955, 5034).

Примечание референта. Автор утверждает, что существует и при том единственная гармоническая функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в полупространстве E^n_+ и удовлетворяющая условиям 1 и 5; однако доказательства этого хотя и верного, но отнюдь не самоочевидного факта в статье нет. Автор говорит на стр. 471 о возможности продолжения некоторой функции f с полосы $0 < x_n \leqslant a$ через гиперплоскость $x_n = a$ на все полупространство E^n_+ с сохранением (в известном смысле) H-класса; насколько известно референту в настоящее время это доказано лишь при дополнительном условии, что число r не является целым (см. по этому поводу РЖМат,1957, 6263). Л. Д. Кудрявцев

3808. О дифференцировании спектральной функции оператора $-\Delta+q$ (x,y). Саргсян И. С., Докл. АН АрмССР, 1958, **26**, № 3, 129—134 (рез. арм.)

Автор изучает асимптотические формулы для частных производных различных порядков спектральной функции уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x,y)\} u = 0,$$

рассматриваемого в конечной или бесконечной плоской области.

Основной результат состоит в том, что главный член в этих формулах получается из спектральной функции двумерного оператора Лапласа во всей плоскости. Доказательства не приводятся. Б. М. Левитан

3809. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора $-\Delta+q$ (x, y). Саргсян И. С. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа, Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, **26**, № 4, 201—205 (рез. арм.)

Изучается вопрос о возможности почленного дифференцирования разложения по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x,y)\} u = 0, \qquad (1)$$

заданного в конечной или бесконечной двумерной области D.

В частности, приводится следующая теорема: Пусть $\Delta f - q(x,y)f \in L_2(D)$ и пусть функция f удовлетворяет краевому условию. Если в окрестности некоторой точки (x_0,y_0) $f(x,y)$ имеет ограниченные частные производные второго порядка, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_n<\lambda} c_n \frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

где $\varphi_n(x,y)$ — собственные функции уравнения (1), соответствующие собственным значениям λ_n и

$$c_n = \int_{(D)} f(x,y)\,\varphi_n(x,y)\,dxdy.$$

Б. М. Левитан

3810. О собственных значениях в задачах со сферической симметрией. Титчмарш (On the eigenvalues in problems with spherical symmetry. Titchmarsh E. C.), Proc. Roy. Soc., 1958, **A245**, № 1241, 147—155 (англ.)

Пусть $q(r)$, $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ при $r\to\infty$ монотонно стремится к $+\infty$. В работе доказывается, что собственные значения уравнения

$$\Delta\psi + \{\lambda - q(r)\}\psi = 0$$

являются корнями уравнения

$$\int_0^R \left\{\lambda - q(r)\right\}^{1/2} dr = \left(\frac{1}{2}l + n + {}^3/_4\right)\pi + \delta_n, \qquad (1)$$

где l, n — натуральные числа, R — корень уравнения $q(r) = \lambda$ и $\delta_n = o$ (1) при $n\to\infty$.

При доказательстве формулы (1) используется метод Лангера, в связи с чем предполагается, что: 1) $q(r)$ и $q'(r)$ не убывают, 2) при $r\to\infty$ $q'(r)/q(r)$, $q''(r)/q'(r)$, $q'''(r)/q''(r) = O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Б. М. Левитан

3811. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям во всей замкнутой области. Ильин В. А., Матем. сб., 1958, **45**, № 2, 195—232

Изучается разложение по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad (1)$$

заданного в конечной области g N-мерного пространства с однородным краевым условием любого из трех родов.

Пусть $u_n(P)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — собственные функции уравнения (1), соответствующие собственным значениям λ_n.

Доказываются следующие теоремы:

I. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2(P)}{\lambda_n^{N/2+\varepsilon}} \quad (\varepsilon>0)$$

сходится равномерно в замкнутой области g.

II. Пусть область g ограничена поверхностью типа Ляпунова, а f — произвольная функция, заданная в этой области и удовлетворяющая следующим двум требованиям: 1) $f\in W_2^{(N/2+1)}(g)$, 2) $f, \Delta f, \ldots, \Delta^k f$ $\left(k = \left[\frac{N}{4}\right]\right.$ для случая первой краевой задачи, $\left.k = \left[\frac{N-2}{4}\right]\right.$ для случая второй или третьей краевой задачи) в обобщенном смысле удовлетворяют соответствующему однородному краевому условию. В таком случае ряд Фурье функции $f(P)$ сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области g.

Имеются также другие результаты, в частности дается оценка остатка ряда Фурье.

Б. М. Левитан

3812. Спектральная теория операторов в частных производных эллиптического типа. Браудер (La théorie spectrale des opérateurs aux dérivées partielles du type elliptique. Browder Félix), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 4, 526—528 (франц.)

$$A = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha; \quad D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}; \quad |\alpha| = \sum_j \alpha_j$$

— равномерно эллиптический оператор в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Первоначально оператор A определяется на множестве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в E_n. Формально сопряженный с A оператор обозначается через $A' = \sum c_\alpha D^\alpha$. Через $q(x)$ обозначена некоторая вещественная непрерывная в E_n функция, через A_q и A'_q — операторы с минимальной областью определения, соответствующие дифференциальным выражениям $A+q$ и $A'+q$. Оператор с максимальной в $L_2(E_n)$ областью определения, порождаемый дифференциальным выражением $A+q$, совпадает с $(A'q)^*$.

Теорема. Пусть a_α и $|c_\alpha|$ равномерно ограничены в E_n, равномерно непрерывны в E_n при $|\alpha| = 2m$ и пусть $(-1)^m q(x) \geqslant c$, $c = \text{const}$.

Тогда: а) $(A'_q)^* = A_q$; если оператор A симметричный, то A_q самосопряженный.

б) Для любого $\varepsilon>0$ существует такая постоянная $k(\varepsilon)$, что в области определения оператора A_q справедливо неравенство

$$(-1)^m \mathrm{Re}(A_q u, u) \geqslant (p_0-\varepsilon)\ \|u\|^2_{W_2^{(m)}} - k(\varepsilon)\ \|u\|^2_{L_2},$$

где p_0 — постоянная эллиптичности оператора A.

в) Существуют такие постоянные $c\geqslant 0$ и k_0, что спектр оператора $(-1)^m A_q$ лежит внутри множества

$$\left\{|\zeta||\mathrm{Im}\,\zeta| \leqslant c(\mathrm{Re}\,\zeta + k_0)^{\frac{2m-1}{2m}}\right\}.$$

г) Если функция $q(x)$ ограничена в E_n, то $D(A_q) = W_2^{(2m)}(E_n)$. В этом случае для любого $p\geqslant 2$ существует такая постоянная h_p, что если $f\in L_2(E_n)\cap L_p(E_n)$ и $A_q u = f$, то $u\in W_p^{(2m)}(E_n)$ и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_p^{(2m)}} \leqslant h_p\left\{\|u\|_{L_2} + \|f\|_{L_p}\right\}. \qquad (1)$$

д) Если $c_\alpha(x) - a_\alpha(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$ для любого α, то вне луча $(-1)^m\xi \geqslant -k_0$ вещественной оси все точки спектра оператора A_q суть изолированные точки конечной кратности.

Пусть теперь G — открытое множество в E_n, граница которого подчинена некоторым условиям регулярности, и пусть на этой границе заданы краевые условия первой задачи. Тогда, при некоторых дополнительных условиях относительно коэффициентов a_α и q, для оператора A_q справедлива приведенная выше теорема, с той лишь разницей, что в определении операторов A_q, A'_q, $(A'_q)^*$ и в неравенстве (1) нужно пространство E_n заменить через G.

Примечание референта. Неравенство (1) вместе с теоремой существования решения сильно эллиптической системы в $W_p^{(2m)}$ было доказано ранее А. И. Кошелевым (РЖМат, 1958, 6734). Доказательство А. И. Кошелева проведено для первой краевой задачи в случае ограниченной области с гладкой границей.

С. Г. Михлин

3813. О спектральной функции оператора

$$-\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + c(x_1, x_2, x_3)\,u.$$

Флексер М. Ш., Матем. сб., 1956, **40**, № 1, 3—22

Автор обобщает результаты А. Я. Повзнера о спектральной функции оператора $-\Delta u + cu$ (РЖМат, 1953, 263) на дифференциальные операторы, указанные в заглавии. При доказательствах используется существование фундаментального решения.

Примечание референта. Работа поступила в редакцию 15/VII 1953 г. и вышла в свет в 1956 г. За это время были получены значительно более общие результаты (см., например, Гординг, РЖМат, 1957, 3153).

Б. М. Левитан

3814. Частное решение класса линейных уравнений в частных производных второго порядка. Алач (Solutii particulare pentru o clasă de ecuatii cu derivate partiale liniare de ordinul al 2-lea. Alaci Valeriu), Bul. stiint. si tehn. Inst. politehn. Timisoara, 1956, **1**, № 1, 11—15 (рум.; рез. франц., русск.)

Рассматривается класс уравнений в частных производных вида

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i x_i^{p-2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (1)$$

с переменными коэффициентами, для которого частные решения ищутся в виде

$$u = \varphi(a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + \ldots + a_n x_n^p) = \varphi(v).$$

Рассматриваются частные случаи уравнения (1) и соответствующие частные решения с двумя произвольными постоянными. Отмечается, что в класс уравнений вида (1) включено также уравнение плоских волн

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Из резюме автора

3815. О функции Римана—Грина. Копсон (On the Riemann—Green function. Copson E. T.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 4, 324—348 (англ.)

Дается обзор различных приемов отыскания функции Римана (ф. Р.) для гиперболического уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Один из них восходит к Риману и основывается на том, что если решение задачи Коши для данного уравнения известно для какой-нибудь кривой специального вида, зависящей от переменного параметра, то соответствующая ф. Р. может быть получена сравнением этого решения с решением, записываемым по методу Римана. В случае, рассмотренном Риманом,

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{\alpha}{x} u_x = 0 \qquad (1)$$

(α — постоянное), соответствующее решение было найдено методом Фурье (с начальными условиями на прямой $y = y_0$ при произвольном y_0). Отмечается, что этот прием может оказаться полезным (по крайней мере с точки зрения эвристической) для уравнений

$$u_{xx} + p_1(x)u_x + q_1(x)u = u_{yy} + p_2(y)u_y + g_2(y)u, \qquad (2)$$

поскольку в отдельных случаях здесь возможно эффективное применение метода Фурье. Именно этим способом автор находит ф. Р. для уравнения

$$u_{xx} + \frac{\alpha}{x} u_x = u_{yy} + \frac{\beta}{y} u_y, \qquad (3)$$

α и β — постоянные. Указывается, что на ином пути она была найдена Чоунди еще в 1938 г. (см. ниже). Другой прием отыскания ф. Р. связан с замечанием Адамара о том, что коэффициентом при логарифмическом члене в элементарном решении рассматриваемого уравнения является ф. Р. сопряженного уравнения. Приводится также интегральное уравнение типа Вольтерра, единственным решением которого является ф. Р. (Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948); оно дает возможность строить ф. Р. методом последовательных приближений. Далее автор обращает внимание на малоизвестный цикл работ Чоунди (Chaundy, Quart. J. Math., 1935—1940, 6—11), посвященный уравнениям в частных производных гипергеометрического типа (по терминологии Чоунди); в одной из них (1938, 9) найдена ф. Р. для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = \left(\frac{a}{(r+s)^2} + \frac{b}{(r-s)^2} + \frac{c}{(1+rs)^2} + \frac{d}{(1-rs)^2}\right) u,$$

a, b, c и d — постоянные которое при $c = d = 0$ надлежащей заменой переменных приводится к (3).

Примечание референта. Автору, по-видимому, осталась неизвестной работа референта (Докл. АН СССР, 1952, **87**, № 3, 337—340), в которой была установлена формула, выражающая ф. Р. для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = [\rho_1(x) + \rho_2(y)]u \qquad (4)$$

через ф. Р. для уравнений

$$u_{xx} - u_{yy} = \rho_1(x)u, \quad u_{xx} - u_{yy} = \rho_2(y)u.$$

Из нее, в частности, непосредственно следует выражение ф. Р. для уравнения (3), поскольку ф. Р. для уравнения (1) известна (необходимо учесть, что уравнение (2) надлежащей подстановкой приводится к виду (4)).

М. Н. Олевский

3816. Принцип максимума для гиперболических уравнений в окрестности начальной линии. Проттер (A maximum principle for hyperbolic equations in a neighborhood of an initial line. Protter M. H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 1, 119—129 (англ.)

Уравнение

$$Lu = (a(x, y)u_x)_x - (b(x, y)u_y)_y + c(x, y)u_x + d(x, y)u_y + f(x, y)u = 0, \quad a > 0, \quad b > 0 \qquad (1)$$

рассматривается в области T, ограниченной отрезком AB оси $y = 0$ и двумя характеристиками AC и BC разных семейств, выходящими из точек A и B и пересекающимися в точке C. Для уравнения (1) в некоторой окрестности $D = T \cup 0 \leqslant y \leqslant y_0 (y_0 < y(c))$ отрезка AB устанавливается принцип максимума в следующем смысле. Пусть $Lu \geqslant 0$ и $f \geqslant 0$ в D, $d(x, 0) \leqslant 0$. Если $u|_{AB} \leqslant 0$ и найдется функция $v(x, y)$, удовлетворяющая в D условиям: I. v и $Mv \geqslant 0$, где M — оператор, сопряженный оператору L;

$$\text{II.} \quad -2av_x + 2\sqrt{ab}\,v_y + v\left[(\sqrt{ab})_y - \sqrt{a/b}\,(\sqrt{ab})_x + c + d\sqrt{a/b}\right] \geqslant 0,$$

$$2av_x + 2\sqrt{ab}\,v_y + v\left[(\sqrt{ab})_y + \sqrt{a/b}\,(\sqrt{ab})_x - c + d\sqrt{a/b}\right] \geqslant 0$$

такая, что: III. $(u/v)_y|_{AB} \leqslant 0$, то максимум $u(x, y)$ в D может иметь место лишь на отрезке AB.

Принимается

$$v(x, y) = e^{\gamma x}(1 - \beta e^{-\alpha y}), \qquad (2)$$

где α и $\gamma \geqslant 0$, $0 \leqslant \beta < 1$ — постоянные, При достаточно большом α, достаточно малом y_0 и β, близком к 1, эта функция удовлетворяет условию I. В частных случаях условия, при которых имеет место принцип максимума, ослабляются. Например, при $b(x, 0) \equiv 0$ отпадает условие III, при $f \equiv 0$ отпадает условие $u|_{AB} \leqslant 0$.

Во второй части работы приведенные результаты используются для исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(f_1(x)\,\varphi'(x))' + g_1(x)\,\varphi(x) = 0;\quad f_1(x) > 0;\quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \tag{3}$$

$$(f_2(x)\,\psi'(y))' + g_2(x)\,\psi(y) = 0;\quad f_2(x) > 0;\quad 0 \leqslant y \leqslant x_0/2 \tag{4}$$

(включая случай $f_1(0) = f_2(0) = 0$). Функция $u(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y)$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant x_0;\ 0 \leqslant y \leqslant x_0/2$ удовлетворяет уравнению гиперболического типа

$$Lu \equiv (f_1(x) f_2(y) u_x)_x - (f_1(x) f_2(y) u_y)_y + (g_1(x) f_2(y) - f_1(x) g_2(y))\,u = 0,$$

для которого при некоторых ограничениях на f_i и g_i $(i = 1, 2)$, вытекающих из условий I—III и выражения (2) для $v(x, y)$, имеет место принцип максимума. Из наличия принципа максимума следует ряд теорем о нулях и о знаке решения $\psi(y)$ уравнения (4) при известных свойствах решения $\varphi(x)$ уравнения (3). Например, если $\varphi(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, то решение $\psi(y)$, удовлетворяющее условиям $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) < 0$, не имеет нулей на промежутке $0 < y < y_0$.

Аналогичный метод применяется для исследования знака сумм рядов вида $\sum_k a_k \varphi_k(x)\,\psi_k(y)$, где $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(y)$ — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для уравнений

$$(p(x)\,\varphi')' + (\lambda\, q(x) - r(x))\,\varphi = 0,$$

$$(p(y)\,\psi')' + (\lambda\, q(y) - r(y))\,\psi = 0$$

при известном знаке суммы $\sum_k a_k \varphi_k(x)$ и условии $\psi_k(0) = 1$.

В частном случае получаются известные результаты Бохнера (РЖМат, 1959, 627) для рядов из полиномов Лежандра и полиномов Гегенбауэра. И. Л. Кароль

3817. О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении «коэффициента вязкости» к нулю. Ладыженская О. А., Тр. Моск. матем. об-ва, 1957, **6**, 465—480

Работа содержит развернутое изложение результатов заметки с тем же названием из Докл. АН СССР (РЖМат, 1958, 2957) и некоторые дополнения. В ней дается новый простой способ введения „исчезающей вязкости" для задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0;\qquad u|_{t=0} = \psi(x) \tag{1}$$

в предположении лишь, что φ есть заданная функция, удовлетворяющая неравенству $\varphi''_{uu} \geqslant \text{const} > 0$ (или $\varphi''_{uu} \leqslant \text{const} < 0$) и некоторым условиям гладкости, а $\psi(x)$ — измеримая ограниченная функция ($\varphi(u)$ можно заменить на $\varphi(x, t, u)$). В работе при использовании общих свойств параболических уравнений доказывается, что вся совокупность решений $u^{\varepsilon}_{m,n}(x, t)$ вспомогательной задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_m(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (\varepsilon > 0);\quad u|_{t=0} = \psi_n(x) \tag{2}$$

(φ_m и ψ_n — гладкие аппроксимирующие φ и ψ функции), которые существуют во всей полуплоскости $t \geqslant 0$, имеют при $m, n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ единственный предел $u(x, t)$, также определенный для всех $t \geqslant 0$. Кроме того, доказывается, что $u(x, t)$ есть ограниченная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{u(x + \Delta, t) - u(x, t)}{\Delta} < M(t), \tag{3}$$

где $M(t)$ — непрерывная при $t > 0$ функция, и интегральному тождеству

$$\iint_{t>0} \left[u\,\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + \varphi(u)\,\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right] dx\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,\Phi(x, 0)\,dx \tag{4}$$

при всех финитных гладких $\Phi(x, t)$. Тождество (4) и неравенство (3) определяют $u(x, t)$ единственным образом. В реферируемой работе и упомянутой выше заметке указаны результаты других авторов, занимавшихся тем же вопросом. В. И. Смирнов

3818. Представление решений уравнений с частными производными эллиптического и параболического типа. Николеску (La structure des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique ou du type parabolique. Nicolescu Miron), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), **1**, № 4, 465—479 (франц.; рез. русск., венг.)

Изложение содержания доклада автора на конференции математического института Венгерской Академии наук в 1955 г.

В первой части приводятся известные результаты исследований автора общих свойств полигармонических функций (см., например, Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, Изд-во ин. лит., 1957). Основной результат заключается в следующем: Пусть D_ρ представляет собой область D в n-мерном евклидовом пространстве, за исключением множества точек, принадлежащих сферам радиуса ρ с центрами на границе D. Тогда имеет место теорема 1: Необходимым и достаточным условием того, чтобы суммируемая в D функция $u(M)$ была бы полигармонической функцией порядка p в этой области, является существование такого положительного числа ρ^*, что для всех $\rho \leqslant \rho^*$ в любой точке D_ρ имеет место

$$u(M) = \frac{V\left(\mu(u; M; r), \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)} \tag{1}$$

для $r \leqslant \rho$. Здесь

$$V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{n}{n+2} & \ldots & \frac{n}{n+2p-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \left(\frac{n}{n+2}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\frac{n}{n+2p-2}\right)^{p-1} \end{vmatrix} \tag{2}$$

$V\left[\mu, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right]$ получается заменой первого столбца предыдущего определителя последовательностью $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$

$$\mu_s(u; M; r) = \frac{n}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1} \mu_{s-1}(u; M; \rho) d\rho, \qquad (3)$$

а $\mu_0(u; M; r)$ является средним значением функции u на сфере радиуса r с центром в точке M.

На основании этой теоремы получены обобщения теорем Лиувилля, Гарнака, Вейерштрасса и ряда других на полигармонические функции, а также представление полигармонической функции в окрестности сингулярной точки через гармонические функции.

Вторая часть посвящена изложению результатов исследования решений интегрированного уравнения теплопроводности

$$\Delta^{(p)} u = \left\{\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}\right\}^{(p)} = 0, \qquad (4)$$

названных автором „поликалорическими" функциями, и представляет из себя резюме работы автора (РЖМат, 1958, 364).

Доказано существование и единственность решения уравнения (4) в полосе $-\infty < x < \infty$; $0 < t < t_1$ при задании при $t=0$ либо $u; \frac{\partial u}{\partial t}; \ldots \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}$; либо $u; \Delta u; \ldots \Delta^{(p-1)} u$.

Построенные при этом явные выражения решения являются обобщением формулы Пуассона.

В заключение приводится аналог теоремы 1 для „поликалорических" функций, из которого следует ряд теорем, анологичных соответствующим теоремам для полигармонических функций. А. Г. Свешников

3819. Асимптотика решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром. Исакова Е. К., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1077—1080

В начале работы изучается поведение при $\varepsilon \to +0$ решения следующей задачи Коши:

$$\varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x,t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} + C(x,t) u^\varepsilon - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = \Psi(x) \qquad (2)$$

в слое $[0, T]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ $\overline{n+1}$-мерного пространства точек (x, t) $(x = (x_1, \ldots, x_n))$. Предполагается, что функции A_{ij}, B_j и C имеют ограниченные производные по x до порядка $2n$ и по t 1-го порядка, квадратичная форма

$$\sum A_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

определенно положительна и $\Psi(x)$ имеет всюду, исключая некоторую поверхность $F(x) = 0$, ограниченные производные до порядка $2n$. На поверхности $F(x) = 0$ функция $\Psi(x)$ и ее производные до порядка n имеют разрыв 1-го рода. Поверхность $F(x) = 0$ обладает той же гладкостью, что коэффициенты уравнения (1), и, кроме того, каждая прямая, параллельная оси x_1, пересекает ее точно в одной точке.

При $\varepsilon = 0$ задача (1) — (2) переходит в задачу Коши (1°) — (2°) для уравнения 1-го порядка. Пусть $v(x, t)$ — решение этой последней задачи. Главная по ε часть разности $u^\varepsilon - v$ называется внутренним параболическим пограничным слоем. Вдоль всякой характеристики уравнения (1), проходящей через поверхность разрыва $F = 0$ (характеристики разрыва), функция $v(x, t)$ разрывна. В работе дается представление u^ε в окрестности характеристики разрыва.

Во второй части работы полученные результаты прилагаются к изучению поведения при $\varepsilon \to +0$ решения смешанной задачи для уравнения (1) с начальным и краевым условиями

$$u^\varepsilon(x, 0) = \Psi_1(x) \; (x_1 > 0); \quad u^\varepsilon|_{x_1=0} = \Psi_1(x_2, \ldots, x_n, t). \qquad (3)$$

При этом предполагается, что $\Psi_1|_{x_1=0} = \Psi_2|_{t=0}$ и $B_1 < 0$. Поверхностью разрыва в этом случае будет гиперплоскость

$$x_1 = 0, \quad t = 0.$$

В конце работы изучается поведение при $\varepsilon \to +0$ решения смешанной задачи с начальным и краевым условиями

$$u^\varepsilon(x, 0) = \Psi_1(x) \; (x \in \Omega), \; u^\varepsilon|_S = \Psi_2.$$

Здесь Ω — область пространства точек x и S — ее граница. Л. Н. Слободецкий

3820. Теорема Лиувилля для параболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Фридман (Liouville's theorem for parabolic equations of the second order with constant coefficients. Friedman Avner), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 272—277 (англ.)

Доказана следующая теорема лиувиллевского типа: Пусть $u(x,t)$ — нетривиальное неотрицательное решение параболического уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

в полупространстве $t < 0$. Пусть существует предел

$$\lim_{t \to -\infty} t^{-1} \log u(0, t) = c + \gamma, \quad \text{где } c + \gamma \geqslant 0, \; \gamma > 0.$$

Тогда функция $u(x, t)$ не может быть ограниченной в конусе D_α, определяемом с помощью неравенства $|x| < \alpha |t|$, при

$$\alpha > (c + \gamma) \left[\left(\gamma + \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2}\right]^{-1}, \quad b = \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Кроме того, если $b = 0$, $\gamma = 0$ и $u(x, t) \not\equiv Ae^{ct}$, то функция $u(x, t)$ не может быть ограниченной в каждом конусе D_α. Д. М. Эйдус

3821. Граничная задача с касательными производными для параболического уравнения. Погожельский (Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique. Pogorzelski M. W.), Ann. scient. École norm. supér., 1958, **75**, № 1, 19—35 (франц.)

Пусть Ω — область n-мерного пространства точек $A = (x_1, \ldots, x_n)$, ограниченная поверхностью S Ляпунова. В цилиндре $\Omega \times [0, T]$ $(A \in \Omega, \; 0 \leqslant t \leqslant T)$ ищется решение нелинейного параболического уравнения

$$\Psi(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(A, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \; (A \in \Omega) \qquad (2)$$

и на $S \times [0, T]$ — граничному условию

$$\frac{du}{dT_P} + g(P,t)\,u = G\left(P, t, u, \frac{\partial u}{\partial S_P^{(1)}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial S_P^{(q)}}\right). \qquad (3)$$

Здесь

$$\frac{d}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P,t)\cos(N_P, x_\beta)\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

N_P — внутренняя нормаль к S в точке P и $S_P^{(1)}, \ldots, S_P^{(q)}$ $(q \leqslant n-1)$ — линейно независимые касательные направления к S в точке P.

Решение ищется в виде суммы параболического потенциала простого слоя и объемного параболического потенциала

$$u(A,t) = \int_0^t \int_S \Gamma(A,t;B,\tau)\,\varphi(B,\tau)\,d\tau\,dS_B + \int_0^t \int_\Omega \Gamma(A,t;B,\tau)\,F\left(B,\tau,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\tau\,d\Omega_B$$

с неизвестной плотностью $\varphi(B,\tau)$. Здесь $\Gamma(A,t;B,\tau)$ — основное решение параболического уравнения $\Psi(u)=0$.

При определенных ограничениях на данные задачи для плотности $\varphi(B,\tau)$ потенциала простого слоя получается регулярное интегральное уравнение. Л. Н. Слободецкий

3822. Поправка. Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 737

См. РЖМат, 1956, 8845.

3823. О проблемах теплопроводности и диффузии со сложными граничными условиями. I. Фрёйд (Hővezetési és diffüziós feladatok osszetett peremfeltételekkel, I. Froud Géza), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), **3**, № 3-4, 369—394 (венг.; рез. русск., нем.)

Автор решает проблему теплопроводности в системе состоящей из бруса и концентрированного тела.

Соответственно он рассматривает две неизвестные функции $V(x,t)$ — температура бруса в точке x в момент времени t и $U(t)$—температура тела в момент времени t.

Типичная задача следующая:

$x \geqslant 0, t \geqslant 0, v_{xx} = av_t, v(x,0)=0, u(0)=u_0, v_x(0,t) = C[u(t) - V(0,t)], u'(t) + B[u(t) - V(0,t)] = Q(t).$

Здесь $Q(t)$ — данная функция, представляющая приток тепла в тела. Автор решает несколько задач этого вида, доказывая единственность решения этих задач. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, №8, 858.

3824. О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности. Адлер (A hővezetés differenciálegyenletének maximum—elvéről. II. Adler György), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 3, 429—435 (венг.; рез. русск., франц.)

Настоящая работа является продолжением статьи, в которой дано одно усиление теоремы Тихонова.

Теорема 1 настоящей работы содержит более сильное утверждение, а именно: Пусть P_0 есть точка границы области R, обладающая тем свойством, что R содержит внутренность такого гипершара Γ, на границе которого находится точка P_0. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. Пусть не равная тождественно постоянной функция $V(P,t)$ в некоторой ограниченной области R n-мерного пространства при $0 < t \leqslant T$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = a^2(P)\,\frac{\partial V}{\partial t},\quad a^2(P) \neq 0$$

и достигает своего max в точке P_0 границы S при $t = t_0 > 0$. Тогда

$$\liminf \frac{V(P,t_0) - V(P_0,t_0)}{\overline{PP_0}} > 0,$$

если $P \to P_0$ вдоль любого выходящего из P_0 направления l, которое образует угол $< \frac{\pi}{2}$ с внутренней нормалью шара Γ в точке P_0. После этого доказывается одна теорема о max градиента функции температуры.

Теорема 2. Пусть функция $V(P,t)$ удовлетворяет в ограниченной области R n-мерного пространства при $0 < t \leqslant T$ дифференциальному уравнению

$$\Delta v = a^2\,\frac{\partial V}{\partial t},\quad a^2 = \text{const},$$

а grad V непрерывен на границе S области R.

Тогда grad V принимает свой максимум на границе или в начальный момент времени $t = t_0$. Наконец, теорема 3 дает распространение теоремы Тихонова на некоторую теплопроводную систему и является обобщением теоремы, доказанной Фрейдом (реф. 3823) для одномерного случая и более простой теплопроводной системы.

Резюме автора.

3825. Решение смешанной задачи для одного нелинейного параболического уравнения. Агаев Г. Н., Намазов Г. К., Мәрузәләр. АзәрбССР Элмләр Акад., Докл. АН АзербССР, 1958, **14**, № 7, 505—510 (рез. азерб.)

Рассматривается решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,u), \qquad (1)$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

определенное в области $D\left[\begin{matrix}\varphi_1(t) \leqslant x \leqslant \varphi_2(t)\\ 0 \leqslant t \leqslant T\end{matrix}\right]$.

Если выполняются условия:

1) $|f(t,x,u) - f(t,x,v)| \leqslant \frac{A|u-v|}{t^\alpha}$, $1/2 \leqslant \alpha < 1$,

2) $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности аргументов и $|f(t,x,0)| \leqslant \frac{A_1}{t^\alpha}$,

3) $|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < Kt^{\alpha - 1/2}$, то имеет место теорема: При выполнении условий 1), 2), 3) задача (1) имеет решение в области „D“, и оно единственно.

Теорема доказывается с помощью сведения уравнения (1) к соответствующему интегральному уравнению.

Н. И. Мозжерова

3826. Функциональное уравнение, разрешающее задачу T'_{330}. Пулькин С. П., Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 14, 79—97

Решается следующая задача T'_{330}. Найти решение уравнения

$$z(u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz} = 0$$

в области Δ, ограниченной поверхностями: 1) Σ, расположенной в полупространстве $z \geqslant 0$ и проходящей через окружность $x^2 + y^2 = 1$; (c_0); 2) характеристическим конусом k_0

$$x^2 + y^2 = (z+1)^2,\quad -1 \leqslant z \leqslant 0$$

(k_0^+ — часть k_0, на которой $x > 0$ и $x = 0$ при $y \geqslant 0$), которое на Σ обращается в функцию $\varphi(x,y)$, а на k_0^+ в функцию $\psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ непрерывны и $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$ на c_0^+ (c_0^+ — дуга окружности, для то-

чек которой $x > 0$ и $x = 0$ при $y = +1$). Доказательство проводится методами интегральных уравнений.

Н. И. Мозжерова

3827. **Новый метод решения одной краевой задачи смешанного типа. Чибрикова Л. И.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 44—47

Решается краевая задача для уравнения смешанного типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в двусвязной области с границей, составленной в эллиптической области ($y > 0$) из двух концентрических полуокружностей и в гиперболической области из двух пар характеристик (РЖМат, 1954. 2965).

Полукольцо конформно отображается на прямоугольник, и краевая задача для эллиптической области приводится к известной краевой задаче Гильберта для аналитических функций. Пользуясь известной связью между краевыми задачами Гильберта и Римана для областей с прямолинейными и круговыми границами, автор сводит далее рассматриваемую задачу к краевой задаче Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t)$$

для двоякопериодических функций. Причем $G(t)$ и $g(t)$ определенным образом выражаются через данные исходного краевого условия. Последняя задача решается в замкнутой форме. После этого решение задачи в гиперболической части находится обычным способом.

Ф. Д. Гахов

3828. **О задаче Коши с субгармоническими начальными данными. Вейнштейн** (On a Cauchy problem with subharmonic initial values. Weinstein Alexander), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 325—340 (англ.)

Пусть функция $f(x)$ является функцией класса C^2 и определена в некоторой области G; $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Изучаются средние функции

$$M(x, r, f) = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int_S f dS,$$

где ω_m — величина поверхности единичной m-мерной сферы, а S — сфера радиуса r с центром в точке $x \in G$, и применение оператора усреднения M к исследованию задачи Коши

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial r} = 0$$

для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \Delta_x u$$

$$\left(\Delta_x u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right).$$

Решение этой задачи обозначается $u^k = u^k(x, r, f)$. Большая часть результатов автора относится к случаю, когда функция f является субгармонической функцией; причем, согласно определению автора, функция f, принадлежащая к классу C^p, называется p-субгармонической, если для всех $i = 1, 2, \ldots, p$ имеет место

$$\frac{\partial^i M(x, r, f)}{\partial r^i} \geqslant 0$$

(в случае, когда $f \in C^{2p}$, это условие эквивалентно условию $\Delta_x^i f \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$).

Рассматриваются интегральные представления решений u^k и выясняются некоторые связи между u^k при различных k. Исследуется принцип минимума и максимума для функций u^k именно, если $k \geqslant m - 1$, то доказывается, что $\min f(x) \leqslant u^k(x, r, f) \leqslant \max f(x)$; если же $0 \leqslant k < m - 1$, то в предположении n-субгармоничности функции f, где $n \geqslant (m - k - 1)/2$, доказывается, что

$$u^k(x, r, f) \geqslant \min f(x).$$

Далее изучаются связи между уравнением Эйлера — Пуассона — Дарбу и обобщенным уравнением Трикоми и определенные свойства выпуклости функций $M(x, r, f)$ и $u^k(x, r, f)$, в предположении субгармоничности функции f, а также рассматриваются некоторые другие смежные вопросы.

Л. Д. Кудрявцев

3829. **Некоторые общие формулы для решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Агранович М. С.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 3—20

Всякое решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (1)$$

порядка m_j по переменной x_j, в классе функционалов (обобщенных функций) над основным пространством бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне n-мерного куба $A = \{|x_j| \leqslant a\}$, есть конечная сумма производных от функций вида

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \int_H \frac{G(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_n)}{\Pi(b_j - s_j)^{l_j} P(-is)} e^{\pm i a s_k - i(x, s)} d\sigma. \qquad (2$$

Здесь H—лестница Хёрмандера для многочлена $P(-is)$) (Гельфанд И. М., Шилов, Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2, Пространства основных и обобщенных функций, гл, 2, § 3), b_j — любое комплексное число с мнимой частью знака $\mp$ (по сравнению с $\pm$ в числителе) и по модулю большей, чем $\max_H |Im s|$; $l_j \geqslant m_j + 2$; G — целая функция экспоненциального типа, преобразование Фурье (любой) меры, сосредоточенной на грани $x_k = \pm a$ куба A.

Функция U непрерывно дифференцируема до порядка $(l_1 - 2, \ldots, l_n - 2)$ и есть решение уравнения (1) при $\mp(x_k \mp a) > 0$.

В частности, всякое решение уравнения (1) в кубе A есть конечная сумма производных от обычных решений уравнения (1) в полупространствах $\mp(x_k \mp a) > 0$, пересечением которых является куб A.

Если лестница Хёрмандера H может быть взята непрерывной, т. е. в форме произведения n прямых $\tau_j = \tau_j^0$, то формула (2) может быть преобразована к виду

$$U = \int_{\substack{\tau_\nu = \tau_\nu^0 \\ (\nu \neq k)}} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n) \times$$

$$\times e^{-i(x_1 s_1 + \ldots + x_{k-1} s_{k-1} + x_{k+1} s_{k+1} + \ldots + x_n s_n)} \times$$

$$\times \sum_{\tau_k \neq \tau_k^0} \text{Выч} \left\{ \frac{e^{i s_k (\pm a - x_k)}}{(b_k - s_k)^k P(-is)} \right\} d\sigma_1 \ldots d\sigma_{k-1} d\sigma_{k+1} \ldots d\sigma_k,$$

где f—любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n) = 0 \left\{ |\sigma_1^{l_1} \ldots \sigma_{k-1}^{l_{k-1}} \sigma_{k+1}^{l_{k+1}} \ldots \sigma_n^{l_n}| \right\}.$$

В указанном случае каждое решение уравнения (1) аппроксимируется „многочленами с экспонентами" вида $\sum a_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} e^{(\beta, x)}$, которые также являются решения-

ми уравнения (1). Этим улучшается теорема Мальгранжа (РЖМат, 1957, 434), обеспечивающая возможность аналогичной аппроксимации и в общем случае, но не дающая конструкции аппроксимирующих многочленов.

Указанному условию удовлетворяют гиперболические, параболические и некоторые другие уравнения.

Г. Е. Шилов

3830. Краевая задача для полигармонических функций третьего порядка. Болотин А. С., Лившин Г. Л., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1955, **17**, 3—13

3831. О функции Грина для бигармонического оператора. Марич (On the Green's funcition of the biharmonic operator. Marić Vojislav), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 59—66 (англ.)

3832. О регулярности решений нелинейных эллиптических и параболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. Фридман (On the regularity of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations. Friedman Avner), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 1, 43—59 (англ.)

Рассматривается нелинейная система уравнений

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_N, D u_1, \dots, D^{2m} u_N) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где D_k—операция дифференцирования порядка k. Дуглисом и Ниренбергом (РЖМат, 1958, 1201) доказано, что если функции Φ_i бесконечно дифференцируемы по всем аргументам, а $u = (u_1, \dots, u_N)$—решение системы, имеющее непрерывные по Гёльдеру производные до порядка $2m$, причем система является в некотором смысле эллиптической на решении u, то вектор-функция u бесконечно дифференцируема. В реферируемой работе доказаны теоремы, уточняющие этот результат. В частности, доказана теорема о регулярности решения в замкнутой области. Кроме того, доказаны аналогичные теоремы для квазилинейной параболической системы вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\Sigma k_s = 2m} a_{ij}^{k_1 \dots k_n}(t) \frac{\partial^{2m} u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \Phi_i(x_1, \dots, x_n, t, u_1, \dots, D_x^{2m-1} u_N), \quad i = 1, \dots, N.$$

Д. М. Эйдус

3833. О системе гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка. III. Хельвиг (Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. III. Hellwig Günter), Math. Z., 1958, **68**, № 4, 325—337 (нем.)

Ч. I, II, см. Math. Z., 1950, **53**, 244—266; 340—356.

Высказываются некоторые (частично известные) соображения, связанные с исследованием и решением линейных гиперболических в узком смысле систем уравнений с частными производными первого порядка и двумя независимыми переменными (при этом применяются компактные обозначения теории дифференциальных форм). В § 1 рассматривается вопрос о приведении системы к нормальной (канонической) форме; в качестве следствия из теоремы Э. Картана получается необходимое и достаточное условие возможности приведения квазилинейной системы к нормальной форме. В дальнейшем рассматриваются почти только линейные системы в нормальной форме. В § 2 вводится понятие о сопряженных системах. В § 3 приведена известная теорема о решении задачи Коши и теорема о решении задачи Гурса, в которой искомые функции задаются на характеристиках, проходящих через одну точку; рассмотрена также обобщенная задача Гурса, в которой дополнительно задаются скачки искомых функций при переходе через указанные характеристики. Все эти задачи можно решить методом последовательных приближений. В § 4 решение последней задачи для сопряженной системы применяется к выводу интегральных форм улдля решения задачи Коши, обобщающих формулы Римана и Хольмгрена. Работа служит продолжением статей Хака (W. Haack) и автора (Math. Z., 1950, **53**, 244—266, 340—356).

А. Д. Мышкис

3834. О существовании решений некоторых краевых задач для гиперболической системы дифференциальных уравнений. Шмидт (Sur l'existence de solutions de certains problèmes aux limites relatifs à un système d'équations différentielles hyperboliques. Szmydt Z.), Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 1, 31—36 (франц.; рез. русск.)

Обобщение некоторых из предыдущих результатов, относящихся к системе уравнений в векторной записи

$$u_{xy} = F(x, y, U, U_x, U_y) \quad (-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha, -\beta \leqslant y \leqslant \beta)$$

(см., в частности, РЖМат, 1959, 1537), когда на двух пересекающихся линиях вида $y = \gamma(x)$ и $x = \lambda(y)$ заданы нелинейные краевые условия (обоих типов, приведенных в указанном реферате). Новым моментом является то, что функция F и функции, входящие в краевое условие, считаются заданными при всех U, U_x, U_y, но удовлетворяют условию Липшица только по U_x и U_y, а по U требуется только рост не выше линейного (с достаточно малым коэффициентом). При соответствующих ограничениях на константы, входящие в задачу, оказывается возможным применить теорему Шаудера о неподвижной точке и тем самым доказать существование решения задачи. Указаны также некоторые другие обобщения.

А. Д. Мышкис

3835. Исследование матрицы фундаментальных решений параболической системы уравнений в частных производных. Погожельский (Étude de la matrice des solutions fondamentales du système paraboliques d'équation aux dérivées partielles. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci. sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 2, 79—83, VI (франц., рез. русск.)

Для линейной параболической системы, рассмотренной в работе С. Д. Эйдельмана (РЖМат, 1956, 8844), построена фундаментальная матрица решений при более слабых предположениях относительно коэффициентов. Коэффициенты предполагаются ограниченными и удовлетворяющими условию Гёльдера. Подробных доказательств нет.

Д. М. Эйдус

3836. Некоторые граничные задачи для системы дифференциальных уравнений параболического типа с переменными коэффициентами. Загорский (Деякі граничні задачі для системи диференціальних рівнянь параболічного типу із змінними коефіцієнтами. Загорський Т. Я.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 4, 364—367 (укр.; рез. русск., англ.)

В цилиндре $W = V \times [0, T]$ $(x = (x_1, \dots, x_n) \in V, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$, где V — выпуклая область, ограниченная поверхностью S типа Ляпунова, ищется решение параболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$u|_{t=0} = 0; \ B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u|_S = f(y, t) \ (y \in S). \tag{2}$$

Здесь $A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — линейный дифференциальный оператор порядка S, коэффициентами которого являются переменные квадратные матрицы порядка N, определенные в $\overline{W}$, $B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — линейный дифференциальный оператор, коэффициентами которого являются прямоугольные матрицы порядка $\left(\frac{NS}{2}, N\right)$, определенные на S, $u =$

$= u(x, t)$ — вектор-функции с N компонентами и $f = f(y, t)$ — вектор-функции с $\frac{NS}{2}$ компонентами.

В статье автора „Некоторые краевые задачи для параболических систем в полупространстве" (РЖМат, 1956, 8845) для случая, когда V — полупространство $x_n > 0$, операторы A и B содержат только старшие члены и их коэффициенты постоянны, дано алгебраическое условие разрешимости задачи (1)—(2). Предполагая, что это условие выполняется в каждой точке поверхности S, если за ось x_n принять внутреннюю нормаль к S и остальные оси расположить в касательной к S плоскости, а также, что коэффициенты операторов A и B достаточно гладки, автор сводит задачу (1)—(2) к регулярной системе интегральных уравнений.

Автор также налагает ограничение на рост $f(y, t)$ при больших t. Так как все свои построения автор производит в конечном цилиндре, то это ограничение кажется референту излишним. Л. Н. Слободецкий

3837. Об одном классе регулярных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Эйдельман С. Д., Успехи матем. наук, 1958, **13**, вып. 4(82), 205—209

Пусть $\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ система, $2b$ — параболическая по Петровскому. Тогда для системы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right] = R\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

с произвольным оператором $R\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядка не выше $2b$, можно установить следующую оценку матрицы Грина:

$$| G(t, t_0, s) | \leqslant C_1 e^{C(t-t_0)\,|\,\mathrm{Im}\,s\,|^{2b}}$$

Таким образом, система (1) регулярна в смысле Гельфанда—Шилова (РЖМат, 1955, 3291) и поэтому (РЖМат, 1956, 8815) обладает решением при начальных данных, которые вместе с производными до порядка $2b + \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ удовлетворяют условиям

$$| D^m \varphi(x) | \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |x|^{2b/(2b-1)}}$$

Система (1) не гиперболична и не параболична. К типу систем (1) относятся системы уравнений распространения звука в вязком газе и распространения возмущений в вязко-упругой среде.

Указывается, что результаты распространяются на системы вида

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(t, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} R_k\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

а также на системы с ограниченными и достаточно гладкими по x коэффициентами. Г. Е. Шилов

3838. Внутренние оценки для параболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. Фридман (Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations. Friedman Avner), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 3, 393—417 (англ.)

Рассматривается линейная параболическая система порядка m вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x, t),$$

коэффициенты и правая часть которой удовлетворяют условию Гёльдера. Пусть $u(x, t)$ — решение системы в конечной области Ω $n+1$-мерного пространства (x, t), имеющее непрерывную производную $\partial u/\partial t$ и непрерывные в смысле Гёльдера производные до порядка m по пространственным переменным. Доказывается априорная оценка производных от $u(x, t)$ по пространственным переменным в норме пространства функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, через $\sup_{\Omega} | u |$ и через норму f. Эта оценка аналогична известной оценке Шаудера для эллиптического уравнения второго порядка (Schauder J .,Math. Z., 1934, **38**). Автор пользуется нормами, введенными в работе Дуглиса и Ниренберга (РЖМат, 1958, 1201), посвященной аналогичным оценкам для эллиптических систем. Полученный результат имеет характер оценки во внутренней подобласти. Доказанное неравенство используется для исследования дифференциальных свойств решений нелинейных параболических систем. Рассматривается система вида

$$F_k(x, t, u_1, \ldots, u_N, D_x u_1, \ldots, D_x^m u_N, D_t u_k) = 0,\ k = 1, \ldots, N,$$

и доказывается, что если функции F_k имеют непрерывные в смысле Гёльдера производные по всем аргументам до порядка σ и решение системы имеет непрерывные в смысле Гёльдера производные до порядка m по x и первого порядка по t, то это решение имеет непрерывные в смысле Гёльдера производные по x до порядка $m + \sigma$. Д. М. Эйдус

3839. О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского. Золотарев Г. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 118—135

Рассматривается линейная система порядка $2b$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

параболическая в смысле И. Г. Петровского. Коэффициенты системы непрерывны и ограничены в области $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x_i < +\infty$ и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x_l до порядка $2b+1$. Пусть $h(r)$ — некоторая положительная неубывающая функция, которая определена при $r > 1$. Вводится класс C_h регулярных решений $u(x, t)$ данной системы, удовлетворяющих неравенствам $| D^m u(x, t) | \leqslant \exp[\beta r h(r)]$, $m = 0, 1, \ldots, 2b-1$, где D^m — любая производная порядка m по пространственным переменным, β — любое положительное число, $r^2 = \sum x_i^2 > 1$. Доказывается, что если $\int_1^\infty h^{1-2b} dr = \infty$, то в классе C_h имеет место единственность решения задачи Коши. Кроме того, доказано, что для систем с постоянными коэффициентами условие $\int_1^\infty h^{1-2b}\, dr = \infty$ необходимо для единственности решения задачи Коши в классе C_h. Эти результаты обобщают теорему Тэклинда, относящуюся к уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{b-1}\frac{\partial^{2b} n}{\partial x^{2b}}$ (Täcklind S., Nora Acta Reg. Sos. Sci. Upsal., 1936, **10**). Д. М. Эйдус

3840. О решении одной задачи для уравнения Шредингера в бесконечном трехмерном пространстве. Бурнат М., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 2, 224—227

Ряд полученных Повзнером (РЖМат, 1953, 263) результатов относительно уравнения Шредингера

$$Bu = -\Delta u + q(x)\, u = k^2 u$$

во всем трехмерном пространстве при условии гладкости потенциала $q(x)$, переносятся на случай, когда потенциал имеет особенности в конечной области типа

$$q(x) = O\left(\frac{1}{|x - P_s|^{\alpha_s}}\right) \alpha_s < 1{,}5.$$

При условии убывания потенциала на бесконечности $\left(q(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\beta}}\right) \beta > 3{,}5\right)$ получены оценки в окрестности особых точек для резольвентного ядра оператора A, получающегося замыканием дифференциального оператора B, и для решения задачи теории рассеяния, которое строится с помощью этого ядра. Л. Д. Фаддеев

3841 К. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. Зоммерфельд, Заутер (Partielle Differentialgleichungen der Physik. Sommerfeld Arnold, 4. Aufl. Bearb. und erg. Sauter Fritz. Leipzig, Akad. Verl. Ges., 1958, XI, 300 S., ill., 16.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 11, 754 (нем.)

3842 К. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гюнтер (Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Günter N. M. Übers. aus dem Russ. Leipzig, Teubner, 1957, X, 341 S., ill., 18.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 7, 449 (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1956, 446К)

3843 К. Уравнения математической физики. Учебн. пособие для студ. III курса. Рябов Ю. А. Всес. заочн. энерг. ин-т. М., 1958, 75 стр., илл.

3844 К. К проблеме уравнений смешанного типа. Бицадзе (Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus. Bizadse A. W. (в подл. ошибочно Bizadse W. A.). Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1957, 58 S., ill., 13. 20 DM) (нем.)

Перевод с русского, см. РЖМат, 1954, 2965.

3845 Д. Об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными при наличии дополнительных связей. Салахитдинов М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Ташкент, 1958

3846 Д. О точных оценках роста классов единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Золотарев Г. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

3847 Д. Априорные оценки в L_p и теоремы существования для эллиптических уравнений и систем. Кошелев А. И. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, Л. 1958

3848 Д. О некоторых краевых задачах для уравнения колебания струны в прямоугольной области. Вахания Н. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Тбилиси, 1958

3849 Д. Применение метода Фурье к исследованию некоторых нелинейных задач. Чандиров Г. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1958

См. также: 3673, 3868, 3926 К, 3978, 4212—4217, 4219, 4221—4223, 4225

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

3850. Об уравнениях типа свертки. Черский Ю. И. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 3, 361—378

Вводятся пространства $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\{\alpha, \beta\}\}$. Первое пространство функций вещественной переменной x, $-\infty < x < \infty$, таких, что $f(x)e^{-\alpha x} \in L_2(0, \infty)$, $f(x)e^{-\beta x} \in L_2(-\infty, 0)$. Пространство $\{\{\alpha, \beta\}\}$ состоит из функций $F(\zeta) = F(x + iy)$, аналитических в полосе $\alpha < y < \beta$ и удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx \leqslant K < \infty,$$

в котором постоянная K зависит от функции F, но не от y. Через V_y обозначен оператор

$$V_y f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it\zeta} dt, \quad \operatorname{Im} \zeta = y;$$

сверткой называется всякий оператор вида $A = V_y^{-1} A(\zeta) V_y$, $\zeta = x + iy$, $y = \text{const}$.

Рассматривается уравнение, которое можно представить в виде

$$M_1 \varphi + M_2 \varphi + \ldots + M_n \varphi = 0, \qquad (1)$$

где M_k — свертка (об этом в тексте не сказано), преобразующая элемент φ в элемент пространства $\{\alpha_k, \alpha_k\}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$. Уравнение (1) сводится к краевой задаче типа задачи Римана для некоторых новых неизвестных функций $\Omega_j \in \{\{\alpha_{j+1}, \alpha_j\}\}$. Эта задача Римана отличается той особенностью, что краевые условия задаются на совокупности параллельных прямых. Автор отмечает, что таким же способом можно свести к задаче Римана и систему уравнений типа свертки.

Приведен ряд примеров, иллюстрирующих общую схему. Некоторые из них приводятся к задаче Римана с известным решением — в этих случаях удается высказать содержательные утверждения о разрешимости данного уравнения. Следует отметить, что в примерах рассмотрены неоднородные уравнения, хотя общую схему автор относит к уравнениям однородным.

Подробнее рассмотрим один из примеров. Введем обозначение $\psi \pm (x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} x \pm 1)\psi(x)$ и рассмотрим уравнение

$$\lambda\varphi_+(x) - \mu\varphi_-(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x - t)\varphi_+(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(x - t)\varphi_-(t)\, dt = f(x),$$

в котором λ, μ — постоянные, $k_j(x) \in \{a_j, b_j\}$, $V_{a_j} k_j$ и $V_{b_j} k_j$ ограничены. Решение $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ ищется в пространстве $\{b_1, a_2\}$; для этого необходимо

$$f(x) \in \{\max(b_1, a_1, a_2), \min(a_1, b_1, b_2)\}.$$

Подробно рассмотрен ряд случаев; укажем один из них. Если $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2$, то задачу удается довести до конца; индекс уравнения равен

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{ib_1 - \infty}^{ib_1 + \infty} \operatorname{darg} \frac{\mu + K_2(x)}{\lambda + K_1(x)},$$

где $K_j(x) = V_{b_1} k_j$.

В числе других примеров применения общей схемы рассмотрены парное уравнение

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0,$$

$$\mu\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x < 0$$

и „полное уравнение"

$$\frac{\lambda+\mu}{2}\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x-t)\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda-\mu}{2}\varphi(x)\operatorname{sgn}x +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x-t)\varphi(t)\operatorname{sgn}t\,dt + T\varphi = f(x).$$

В последнем уравнении a_j принадлежат некоторому пространству $\{\alpha, \alpha\}$, T — вполне непрерывный оператор в том же пространстве. С. Г. Михлин

3851. Расчет мощности взаимодействия бегущей электромагнитной волны и электронного потока с учетом кулоновских сил и разброса скоростей электронов. Лопухин В. М., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 2, 27—35

Рассчитана мощность взаимодействия электронного потока и бегущей электромагнитной волны с экспоненциально нарастающей амплитудой. Учет кулоновских сил в потоке приводит к интегральному уравнению для плотности конвекционного тока $j(z, t)$, которое решено методом последовательных приближений. Использование кинетического уравнения для функции распределения электронов позволяет учесть разброс скоростей электронов. Установлено, что кулоновские силы и разброс скоростей электронов ухудшают условия взаимодействия потока и поля. Резюме автора

3852. Физическая интерпретация в среднем свободной траектории и интегральный метод. Прайс (The physical interpretation of mean free path and the integral method. Price P. J.), IBM J. Res. and Developm., 1958, 2, № 3, 200—293. (англ.)

3853. Краевые задачи и собственные функции интегрального уравнения Пуанкаре — Фредгольма. Шиффер (Problèmes aux limites et fonctions propres de l'équation intégrale de Poincaré et Fredholm. Schiffer Menahem), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 1, 18—21 (франц.)

S — достаточно гладкая замкнутая поверхность в трехмерном пространстве; $D(\widetilde{D})$ — область [внутри (вне) S; $H(\widetilde{H})$ — множество функций, гармонических в $D(\widetilde{D})$ и непрерывных вместе с первыми производными в замкнутой области; n — внутренняя нормаль к S. В каждом из пространств $H, \widetilde{H}$ вводятся три скалярных произведения

$$[\alpha, \beta] = \int_S\int_S \frac{\partial\alpha(z)}{\partial n_z}\frac{\partial\beta(\zeta)}{\partial n_\zeta}\frac{1}{r(z,\zeta)}d\sigma_z d\sigma_\zeta; \quad [\alpha, \alpha] = [\alpha]^2;$$

$$(\alpha, \beta) = \mp\int_S \frac{\partial\alpha(z)}{\partial n}\beta(z)\,d\sigma; \quad (\alpha, \alpha) = (\alpha)^2;$$

$$\{\alpha, \beta\} = 4\pi(\alpha, \beta) - [\alpha, \beta]; \quad \{\alpha, \alpha\} = \{\alpha\}^2.$$

Изучаются свойства функций $\varphi_\nu \in H$ и $\widetilde{\varphi}_\nu \in \widetilde{H}$; $\nu = 1, 2, \ldots$, определяемых краевым условием $\varphi_\nu(z) = \widetilde{\varphi}_\nu(z) = \mu_\nu(z)$, в котором z — точка поверхности S, а $\mu_\nu(z)$ — собственная функция уравнения

$$\mu_\nu(z) - \frac{\lambda_\nu}{2\pi}\int_S \mu_\nu(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\left[\frac{1}{r(z,\zeta)}\right]d\sigma = 0. \qquad (1)$$

Устанавливаются соотношения

$$(\varphi_\nu, \varphi_\rho) = \frac{\lambda_\nu}{2\pi(\lambda_\nu - 1)}[\varphi_\nu, \varphi_\rho]; \quad (\widetilde{\varphi}_\nu, \widetilde{\varphi}_\rho) = \frac{\lambda_\nu}{2\pi(\lambda_\nu + 1)}[\widetilde{\varphi}_\nu, \widetilde{\varphi}_\rho],$$

из которых вытекает, что функции φ_ν, так же, как и функции $\widetilde{\varphi}_\nu$, ортогональны в каждой из трех упомянутых метрик. В более ранней работе Шиффера (РЖМат, 1958, 9860), в которой были введены эти метрики, было также установлено неравенство $(\widetilde{\alpha})^2 \geqslant (\alpha)^2\frac{\{\alpha\}^2}{[\alpha]^2}$, верное, если $\alpha \in H_2$ $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{H}$ и $\alpha = \widetilde{\alpha}$ на S. Доказывается, что для пары функций $\varphi_\nu, \widetilde{\varphi}_\nu$ это неравенство переходит в равенство.

Пусть Λ — наименьшее положительное нетривиальное (т. е. отличное от единицы) характеристическое число уравнения (1), а λ — его наибольшее отрицательное характеристическое число. Доказывается, что $\Lambda \leqslant 3$. На основе некоторых интуитивных соображений высказывается утверждение, что $\lambda \to 1$, когда поверхность S сжимается в плоскую пластинку. С. Г. Михлин

3854. Поправка. Докл. АН СССР, 1958, 122, № 4, 542 См. РЖМат, 1959, 1591.

3855. Об одном свойстве последовательности Некрасова — Назарова. Рыбин П. П., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 11—13

Как известно, при исследовании точек разветвления решений нелинейных интегральных уравнений в случае собственного значения получали бесконечную рекуррентную систему линейных интегральных уравнений, откуда определяются коэффициенты $\varphi_n(x)$ ряда, в виде которого ищется решение.

Если решить каждое уравнение этой системы на основании второй теоремы Фредгольма, то получается следующая рекуррентная последовательность:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = c_1 p(x),\\
&\varphi_2(x) = \int_0^1 R(x, s)\,\varphi_1^2(s)\,ds + c_2 p(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(x) = \int_0^1 R(x,s)\sum_{i_1+i_2=n}\varphi_{i_1}(s)\,\varphi_{i_2}(s)\,ds + c_n p(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где R — резольвента известного ядра, $p(x)$ — собственная функция этого ядра, $c_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольные постоянные.

Если произвести последовательные подстановки в системе (1), то имеем

$$\varphi_n(x) = \psi_n(x, c_1, \ldots, c_n).$$

Автор ставит перед собой цель — найти конкретный вид функции $\varphi_n(x)$.

Для этого автор рассматривает вспомогательное уравнение

$$z(x) = \int_0^1 R(x, s)\,z^2(s)\,ds + D\cdot p(x), \qquad (2)$$

где D — достаточно малый параметр.

Решение этого уравнения автором находится в виде ряда по степеням малого параметра. Далее конкретный вид функции определяется через коэффициенты $z_n(x)$ решения уравнения (2) в виде:

$$\varphi_n(x) = z_1(x)\,c_n + z_2(x)\,c_{n-1}^{(2)} + \ldots + z_n(x)\,c_1^{(n)}, \qquad (3)$$

где

$$c_j^{(i)} = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=i+j-1} c_{k_1} c_{k_2}\ldots c_{k_n}. \qquad (4)$$

Доказана теорема: В последовательности Некрасова-Назарова (1) член $\varphi_n(x)$ имеет вид (3), где $z_i(x)$ последовательно определяются из системы

$$z_1(x) = p(x),$$
$$z_2(x) = \int_0^1 R(x, s)\, z_1(s)\, ds,$$
. . . . . .
$$z_n(x) = \int_0^1 R(x, s) \sum_{i_1+i_2=n} z_{i_1}(s)\, z_{i_2}(s)\, ds,$$
. . . . . .

$c_j^{(i)}$ определяются из (3).

В работе имеются опечатки. К. Т. Ахмедов

3856. К теории спаренных интегральных уравнений. Ахиезер Н. И., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 5—31

Изучается решение следующих систем интегральных уравнений:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \int_0^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, \lambda d\lambda = 0 \quad (r > a), \\ \int_0^k H(\lambda) C(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda + \int_k^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda r) \dfrac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k^2)^p} = \\ \qquad = f(r) \quad (0 < r < a), \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} \int_0^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda r) \dfrac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k^2)^p} = 0 \quad (r > a), \\ \int_0^k H(\lambda) C(\lambda) J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda + \int_k^\infty C(\lambda) J_\gamma(\lambda r)\, \lambda d\lambda = f(r) \\ (0 < r < a), \end{cases}$$

где $p\ (0 < p < 1)$, $k \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ — целое, непрерывная функция $f(r)$ и суммируемая функция $H(\lambda)$ заданы.

Сформулируем один из типичных результатов работы: Если система (A) при $0 < p \leqslant 1/2$, $\nu = 0$, имеет решение $C(\lambda)$, для которого $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2(0, \infty)$, то оно представимо в виде

$$C(\lambda) = \int_0^a \sqrt{s}\, h(s) (\lambda^2 - r^2)^{p/r} J_{-p}(s\sqrt{\lambda^2 - k^2})\, ds, \qquad (1)$$

где $h(s) \in L^2(0, a)$ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(x) + \int_0^a k(x, s)\, h(s)\, ds = \varphi(x) \qquad (2)$$

с ядром

$$k(x, s) = \sqrt{x, s} \int_0^k H\left(\sqrt{k^2 - t^2}\right) I_{-p}(st)\, t^{1+2p}\, dt$$

и правой частью

$$\varphi(x) = x^{p-1/2} \frac{d}{dx} \int_0^x r f(r) \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{tk}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2 - r^2})\, dr.$$

Обратно, если $0 < p \leqslant 1/2$ и если интегральное уравнение (2) имеет решение $h(s)$, для которого функция

$$s^{1/2-p} \frac{d}{ds}[s^{p-1/2} h(s)]$$

имеет смысл и кусочно-непрерывна, то функция $C(\lambda)$, определяемая формулой (1), является решением системы (A) и удовлетворяет условию $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$, когда $0 < p < 1/2$, и условию

$$\int_0^\infty \lambda\, |C(\lambda)|^q\, d\lambda < \infty$$

для любого $q > 2$, когда $p = 1/2$.

Случай любого целого ν сводится к случаю $\nu = 0$.

В конце работы рассмотрено применение полученных результатов к задаче о свободных гармонических колебаниях жесткого диска. Из вспомогательных средств, используемых в работе, отметим следующее интересное обобщение теоремы Винера-Пэйли: Для того чтобы функция $f(x)$ $(0 < x < \infty)$ допускала представление

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{x t}\, J_{\nu - \frac{1}{2}}(xt)\, h(t)\, dt,$$

где $\nu \geqslant 0$ и $h(t) \in L^2(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы 1) $f(x) \in L^2(0, \infty)$, 2) $f(x) = x^\nu g(x)$, где $g(x)$ — четная целая аналитическая функция степени $\leqslant 1$.

Б. М. Левитан

3857. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. Драгош (Asupra ecuatiei integro-diferentiale a lui Prandtl. Dragos L.), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 5, 451—459 (рум.; рез. русск., франц.)

Используя метод И. Н. Векуа, автор задачу интегрирования уравнения Прандтля приводит к задаче гильбертова типа, рассматриваемой в комплексной плоскости $\zeta = y + iz$ с разрезом $(-b, +b)$ по действительной оси, и далее к интегрированию дифференциального уравнения

$$\pi i \varphi'(\zeta) - A(\zeta)\varphi(\zeta) = \frac{2V_0}{\sqrt{\zeta^2 - b^2}} \int_{-b}^{+b} \frac{i(s)\sqrt{b^2 - s^2}}{s - \zeta}\, ds - \frac{P(\zeta)}{\sqrt{\zeta^2 - b^2}} \qquad (2)$$

с коэффициентами-голоморфными функциями в области вне отрезка $(-b, +b)$.

В случае когда коэффициенты допускают непрерывное продолжение на границу области, дифференциальное уравнение (1) интегрируется при помощи уравнений

$$\pi i \varphi'_+(y) - A_+(y)\varphi_+(y) = -F_+(y),$$
$$\pi i \varphi'_-(y) - A_-(y)\varphi_-(y) = -F_-(y).$$

Из резюме автора

3858. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Ландо Ю. К., Уч. зап. Минск. пед. ин-та, 1956, вып. 6, 257—269

Рассматривается краевая задача

$$A_\lambda u = f; \quad V_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где

$$A_\lambda u \equiv \sum_{k=0}^{n} [P_{n-k}(x)\, u^{(k)}(x) - \lambda \int_a^x K_{n-k}(x, s)\, u^{(k)}(s)\, ds];$$

$$V \equiv R_i(u) + \int_a^b \varphi_i(x)\, u(x)\, dx;$$

$$R_i(u) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} [d_{ik} u^{(k)}(a) + \beta_{ik} u^{(k)}(b)].$$

В § 2 показывается, что, если $z(x)$ — решение некоторого интегрального уравнения, $g(x, s)$ удовлетворяет условиям:

а) $R_i[g(x, s)] = 0$; для любой непрерывной функции $h(x)$

$$\Big[\int_a^b g(x, s)h(s)ds\Big]^{(i)} = \begin{cases} \int_a^b g^{(i)}(x, s)\, h(s)\, ds \text{ при } i < n; \\ h(x) + \int_a^b g^{(i)}(x, s)\, h(s)\, ds \text{ при } i = n, \end{cases}$$

то $u(x) = \int_a^b g(x, s)\, R(s)\, ds$ — решение краевой задачи $A_\lambda u = f$; $R_i(u) = 0$ (2). Приводятся правила построения функций Грина краевых задач (2) и (1) и изучаются их свойства.

В § 3 изучаются: 1) свойства функций Грина сопряженных краевых задач; 2) условия разрешимости краевой задачи (2) для случая собственных значений λ.

Я. В. Быков

3859. Некоторые замечания к статье Т. И. Виграненко. Васильев В. В., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзбССР, 1956, вып. 18, 163—165

Автор полемизирует с Т. И. Виграненко (РЖМат, 1954, 2173). В первой части заметки на конкретном примере показывается, что прием автора, изложенный в его работе „К решению линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и вырожденным ядром" (Прикл. матем. и механ. 1949, 13, 2) применим и к решению специальных классов линейных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденными ядрами, когда внутренний дифференциальный оператор содержит переменные коэффициенты.

Во второй части заметки автор утверждает, что для случая собственных значений условие А. И. Некрасова (Тр. ЦАГИ, вып. 190, 1934).

$$\int_a^b U_m [y_i(t)]\, K(x, t)dt \equiv 0 \quad (i = 1,\ldots,n)$$

для уравнения

$$U_n [y(x)] = \int_a^b K(x, t)\, U_m [y(t)]\, dt,$$

где U_k $(k = n, m)$ — линейные дифференциальные операторы, в скрытом виде содержатся в упомянутой работе Т. И. Виграненко.

Примечание референта. Утверждение второй части заметки ошибочно. Утверждение автора о том, что упомянутое условие А. И. Некрасова является необходимым условием разрешимости задачи Коши имеется и в другой работе автора (РЖМат, 1956, 477). Ошибочность этого утверждения отмечена в нашем реферате (РЖМат, 1956, 477). Я. В. Быков

3860. Асимптотическая устойчивость решения интегро-дифференциального уравнения из одного класса. Самедова С. А., Мəʾрузəлəр. АзербССР Элмлəр Акад., Докл. АН АзербССР, 1958, 14, № 6, 419—423 (рез. азерб.)

В работе исследуются условия асимптотической устойчивости решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t, y)u(t, y) + \int_0^1 K(t, y, \tau_1)\, u(t, \tau_1)d\tau_1 + F(t, y) \quad (1)$$

$$u|_{t=0}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad 0 \leqslant y, \tau_1 \leqslant 1.$$

$u(t, y)$ — при каждом фиксированном y относительно t есть элемент пространства $L_p(0, 1)$.

Предполагается, что

1. $A(t, y)$ непрерывна относительно t и ограничена и суммируема относительно t.

2. $K(t, y)$ непрерывна относительно t, суммируема относительно y,

$$K(t, y, \tau_1) \in L_q, \quad \Big[\int_0^1 \{K(t, y, \tau_1)\}^q\, d\tau_1\Big]^{1/q} < \overline{K}.$$

3. $F(t, y, \tau_1)$ — функция со значениями из пространства $L_p(0,1)$ и непрерывна относительно t.

Показано, что если $A(t, y) < a < 0$ и $\max |F(t, y)| < \varphi$, то решение задачи (1) будет асимптотически устойчивым по показательному закону, т. е. существуют постоянные N, ν такие, что $\|u(t)\| \leqslant N \|u(0)\| e^{-\nu t}$.

Е. А. Барбашин

3861. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с частными производными в неограниченном пространстве. Розовский М. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 369—375

Пусть $L_r[u(x_1,\ldots,x_n, t)]$ — линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными коэффициентами, главная часть которого имеет вид

$$\sum_{m_1 + \ldots + m_{n+1} = r} a_{m_1 \cdots m_{n+1}} \frac{\partial^r u(x_1,\ldots,x_n, t)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}\, \partial t^{m_{n+1}}}.$$

В работе автор излагает символический метод построения решения задачи Коши

$$u\Big|_{t=0} = f_1(x_1,\ldots,x_n); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x_1,\ldots,x_n);\ldots;$$

$$\frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}\Big|_{t=0} = f_p(x_1,\ldots,x_n) \quad (1)$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$L_\rho [u] + \int_0^t K(t - s)\, L_q [u]\, ds = 0, \quad (2)$$

где p — наивысший порядок дифференцирования по t в операторах L_ρ и L_q.

Сущность метода заключается в следующем. Вводя в рассмотрение оператор Вольтерра

$$K^* y = \int_0^t K(t - s)\, y(s)\, ds,$$

автор уравнение (2) записывает в виде

$$L_\rho(u) + \overset{*}{K} L_q [u] = 0 \quad (3)$$

и строит решение $u = u(\overset{*}{K}, t, x_1,\ldots,x_n)$ задачи Коши (1) для уравнения (3), рассматривая $\overset{*}{K}$ в качестве постоянного множителя. Затем автор разлагает $u(\overset{*}{K}, t, x_1,\ldots,x_n)$ в ряд по целым положительным степеням $\overset{*}{K}$, что позволяет ему построить решение задачи Коши (1) для уравнения (2). Случай, когда $u(\overset{*}{K}, t, x_1,\ldots,x_n)$ не разлагается по целым положительным степеням $\overset{*}{K}$, в работе не рассматривается. Этим методом автор построил решение задачи Коши двух конкретных примеров интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

В заключение автор отмечает, что его методом можно построить решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$L_\rho [u] + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_\nu} Q_\nu (x_1 - \xi_1;\ldots, \quad x_\nu - \xi_\nu;$$
$$t - s) L_q [u]\, d\xi ds.$$

Примечание референта. Если число p определяется подынтегральным дифференциальным оператором L_q, то задача Коши (1) для уравнения (2) может и не иметь решения, так как некоторые начальные условия могут оказаться лишними. Поэтому прежде чем применять метод автора следует изучить во-

прос: нельзя ли путем преобразований уравнение (2) привести к виду того же уравнения, но с меньшим числом наибольшего порядка дифференцирования по t.

Я. В. Быков

3862. Об альтернативе для некоторых классов систем интегро-дифференциальных уравнений. Л а н д о Ю. К., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 5, 49—58

Изучаются условия существования решения системы интегро-дифференциальных уравнений (и.-д. у.) вида

$$M_i(u) \equiv \frac{du_i}{dx} - \sum_{k=0}^{n} a_{ik}(x)\, u_k(x) -$$

$$-\lambda \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} K_{ik}(x, s)\, u_k(s)\, ds = f_i(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \quad (1)$$

при произвольных правых частях $f_i(x)$.

Доказываются две теоремы.

Т е о р е м а 2. Для существования решения системы и.-д. у. (1) при произвольных правых частях $f_i(x)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная система и.-д. у. имела точно $n+1$ линейно независимых решений.

В замечании указывается, что теоремы 1 и 2 справедливы и для систем и.-д. у. более общего вида

$$\frac{du_i}{dx} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}(x)\, u_k(x) +$$

$$+\lambda \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} K_{ikj}(x, s) u_k^{(j)}(s) ds + f_i(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

если ядра $K_{ikj}(x, s)$, коэффициенты $a_{ik}(x)$ и функции $f_i(x)$ имеют непрерывные производные по x до $m-1$ порядка включительно.

Приведены формулировки еще двух теорем, выражающие: 1) необходимое и достаточное условие существования решения уравнения

$$L(u) \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, u^{(k)}(x) +$$

$$+\lambda \sum_{i=0}^{m} \int_0^1 K_i(x, s)\, u^{(i)}(s)\, ds = f(x)$$

для любой $p+1$ раз непрерывно дифференцируемой правой части $f(x)$ (теорема 4); 2) условие существования не менее $m-p-1$ ($m-p-1 > n$) линейно независимых решений уравнения $L(u) = 0$ (теорема 3). Примеры, рассмотренные на стр. 52, 56, также имеют интерес для теории и.-д. у.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. Имеются опечатки, затрудняющие чтение работы: 1) утверждения, относящиеся к первому примеру (стр. 52), справедливы только тогда, когда второе уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{du_1}{dx} = 60 \int_0^1 [1 - 6y + 6y^2]\, u_0(y) dy + f_1(x).$$

2) правую половину 8-й строки (снизу) стр. 54 следует читать

$$\gamma_{n-p}^{(1)};\ \gamma_{n-p}^{(2)};\ \ldots;\ \gamma_{n-p}^{(p)}.$$

Я. В. Быков

3863. Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений деформирования. Т е м к и н А. Г., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7 (А), 91—96

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i=-n}^{p} \sum_{j=-n}^{p} c_{ij} \int_0^t y^{(i)}(t-\tau) y^{(i)}(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{m=-n}^{p} \int_0^t [a_m(\tau)\, y^{(m)}(t-\tau) + b_m(t-\tau)\, y^{(m)}(\tau)] d\tau = f(t). \quad (1)$$

После применения преобразования Лапласа, учитывая теорему Бореля об изображении свертки, автор получает

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \overline{y^{(i)}}(s) \overline{y^{(j)}}(s) + \sum_m [\overline{a_m(s)} + \overline{b_m(s)}]\, \overline{y^{(m)}}(s) = \overline{f(t)},$$

где $\overline{f(s)}$ — изображение правой части уравнения (1), а $\overline{y^{(j)}}(s)$ — изображение производных. Используя формулы для изображения производных, автор находит решение уравнения (1).

Далее в работе рассматриваются нелинейные уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{k=-n}^{p} \int_0^t d\tau_i \int_0^{t-\tau_i} d\tau_{i-1} \int_0^{t-\tau_i-\tau_{i-1}} d\tau_{i-2} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{t-\tau_i-\ldots-\tau_2} a(t-\tau_i-\ldots-\tau_1) \prod_{j=1}^{i} y^{m_{kj}}(\tau_j) d\tau_1 = f(t).$$

Применяя аналогичный прием, автор получает уравнение относительно изображения искомой функции

$$\alpha_0(s)\, \overline{y(s)}^r + \alpha_1(s)\, \overline{y(s)}^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}\, \overline{y(s)} + \alpha_r(s) = 0.$$

В работе имеются опечатки. К. Т. Ахмедов

3864. Об условиях сохранения свойства устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений. Б а р б а ш и н Е. А., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1957, № 1, 25—34

Исследуется интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varphi'_t(x, t) = \int_a^b K(x, s, \varphi(s, t)) ds + F(x, \varphi(x, t)), \quad (1)$$

где

$$|K(x, s, \varphi_1) - K(x, s, \varphi_2)| < K |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

$$|F(x, \varphi_1) - F(x, \varphi_2)| < \lambda |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

$$|K(x, s, \varphi)| < M, \ |F(x, \varphi)| < N,$$

K, λ, M, N — положительные константы. Автор доказывает существование решения задачи Коши для этого уравнения методом сжатых отображений.

С помощью трех лемм доказывается

Т е о р е м а 1. Пусть тривиальное решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать γ и r такие, что при выполнении условий:

$$|\bar{K}(x, s, \varphi) - K(x, s, \varphi)| < \gamma; \qquad |\bar{F}(x, \varphi) - F(x, \varphi)| < r,$$

где $\bar{K}$, $\bar{F}$ — функции, фигурирующие в уравнении

$$\varphi'_t(x, t) = \int_a^b \bar{K}(x, s, \varphi(s, t))\, ds + \bar{F}(x, \varphi(x, t)). \quad (2)$$

Тривиальное решение уравнения (2) будет ε-устойчивым. Далее при помощи применения леммы 4 доказана

Т е о р е м а 2. Пусть тривиальное решение $\varphi \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво по показательному закону. Можно указать такие $\gamma_1 > 0$, $r_1 > 0$, что при выполнении неравенств

$$|\overline{K}(x, s, \varphi) - K(x, s, \varphi)| \leqslant \gamma_1 |\varphi|,$$
$$|\overline{F}(x, \varphi) - F(x, \varphi)| < r_1 |\varphi|,$$

тривиальное решение $\varphi \equiv 0$ уравнения (2) будет также устойчивым по показательному закону.

Используя леммы 5, 6, 7, автор доказывает

Теорему 3. Если тривиальное решение $\varphi \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво по показательному закону, то существует целое положительное число n_0 такое, что при $n > n_0$ решение системы

$$\psi_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(\psi_k)\Delta s + F_i(\psi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (3)$$

будет также устойчивым по показательному закону.

Основным для доказательств является применение следующей леммы.

Лемма. Если непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет при $t > t_0 \geqslant 0$ неравенству

$$0 \leqslant u(t) < \delta + \int_{t_0}^{t} (Lu(t) + \sigma e^{M(t-t_0)})\, dt,$$

где L, δ, σ, M — положительные постоянные, то

$$u(t) < \frac{\sigma}{L-M}(e^{L(t-t_0)} - e^{M(t-t_0)} + \delta e^{L(t-t_0)}).$$

К. Т. Ахмедов

3865. Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений. Либерман Л. Х., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 142—151

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, s, t, \varphi(s, t))ds + F(x, t, \varphi(x, t)), \quad (1)$$

где функции $K(x, s, t, \varphi)$, $F(x, t, \varphi)$ определены и непрерывны по всем аргументам в области H, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, $|\varphi| \leqslant r$, $0 \leqslant t < \infty$ и удовлетворяют условию $K(x, s, t, 0) = 0$, $F(x, t, 0) = 0$.

Тривиальное решение $\varphi = 0$ уравнения (1) называется равномерно асимптотически устойчивым, если:

а) существует число δ такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать число $T > 0$ настолько большое, что из $|\varphi(x, t_0)| < \delta$ следует $|\varphi(x, t)| < \varepsilon$ при $t > T$;

б) для любого ε можно указать число $\delta > 0$ такое, что из $|\varphi(x, t_0)| < \delta$ следует $|\varphi(x, t)| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$.

Наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b \overline{K}(x, s, t, \varphi)ds + \overline{F}(x, t, \varphi), \quad (2)$$

где функции $\overline{K}$ и $\overline{F}$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции K и F.

Пусть в области H имеют место неравенства

$$|\overline{K}(x, s, t, \varphi) - K(x, s, t, \varphi)| < \gamma_1(t)|\varphi|, \quad (3)$$
$$|\overline{F}(x, t, \varphi) - F(x, t, \varphi)| < r_1(t)|\varphi|. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть тривиальное решение $\varphi = 0$ уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво, причем существуют постоянные $\alpha > 0$, $B \geqslant 1$ такие, что любое решение уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x, t)| < B\delta e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \text{при } t > t_0, \quad (5)$$

если $|\varphi(x, t_0)| < \delta < r$. Пусть далее выполняются неравенства (3), (4) и при этом функции $\gamma_1(t)$, $r_1(t)$ малы „в среднем", т. е.

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \gamma_1(t)\, dt < \eta_1, \frac{1}{T}\int_t^{t+T} r_1(t)\, dt < \eta_2, \text{ где } T = \frac{1}{\alpha}\ln 4B,$$

а η_1 и η_2 достаточно малы.

Нулевое решение $\overline{\varphi} = 0$ уравнения (2) будет равномерно асимптотически устойчивым, а любое решение уравнения (2) будет удовлетворять неравенству типа (5).

Пусть функции K, F, $\overline{K}$, $\overline{F}$, входящие в уравнения (1) и (2), удовлетворяют неравенствам

$$|\overline{K}(x, s, t, \varphi) - K(x, s, t, \varphi)| < \gamma_1(t), \quad (6)$$
$$|\overline{F}(x, t, \varphi) - F(x, t, \varphi)| < r_1(t). \quad (7)$$

Тривиальное решение уравнения (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях малых „в среднем", если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ такие, что как только

$$|\varphi(x, t_0)| < \delta(\varepsilon) \text{ и } \frac{1}{T}\int_t^{t+T} [(b-a)\gamma_1(t) + r_1(t)]\, dt < \eta(\varepsilon),$$

где $T > 0$, то $|\varphi(x, t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$.

Теорема 2. Пусть выполняются неравенства (6), (7), в которых функции $\gamma_1(t)$ и $r_1(t)$ интегрируемы и малы „в среднем" на любом интервале длины t_1, где $t_1 > 0$.

Если тривиальное решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво, то тривиальное решение уравнения (2) будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых „в среднем".

Результаты статьи обобщают результаты статьи референта (реф. 3864).

Теоремы 1 и 2 являются аналогом теорем, полученных для систем обыкновенных дифференциальных уравнений В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовским (РЖМат, 1957, 7867; 1958, 8818). Однако метод автора не опирается, в отличие от метода указанных авторов, на аппарат функций Ляпунова. Е. А. Барбашин

3866. Точки разветвления решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Наджафов К. А., Азэрб. сэнае инст. эсэрлэри, Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1957, вып. 19, 202—225 (рез. азерб).

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$F(\lambda, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = \int_0^1 K(x, s, \lambda) f(\lambda, s, \varphi(s), \varphi'(s))\, ds, \quad (1)$$

где F — аналитическая функция относительно λ, φ, φ', φ'', $K(x, s, \lambda)$ — аналитическая функция относительно λ и регулярное симметрическое ядро относительно $0 \leqslant x, s \leqslant 1$ при фиксированном значении λ.

Предполагая, что при $\lambda = \lambda_0$ кривая $\varphi = \varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (1), ищется решение этого уравнения в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ в классе функций, представимых по степеням $(\lambda - \lambda_0)$.

Автор предполагает, что $E(x, s, \lambda_0) = \lambda_0 H(x, s)$, где

$$E(x, s, \lambda_0) = \frac{A_{1000}}{A_{0010}}\left[\int_0^1 K_1(x, s, \lambda_0) D(s, t)\, dt + \int_0^1 K_2(x, s, \lambda_0) D_1(s, t)\, dt - D(x, s)\right] - \frac{A_{0100}}{A_{0010}} D_1(x, s);$$

$$K_1(x, s, \lambda_0) = \frac{B_0(x, s, \lambda_0) C_{100}(s, \lambda_0)}{A_{1000}(x, \lambda_0)};$$

$$K_2(x, s, \lambda_0) = \frac{B_0(x, s, \lambda_0) C_{010}(s, \lambda_0)}{A_{1000}(x, \lambda_0)},$$

$$A_{mnij}(x, \lambda_0) = \frac{1}{(m+n+i+j)!} \frac{\partial^{m+n+i+j} F}{\partial \varphi_0^m \partial \varphi_0'^n \partial \lambda_0^i \partial \varphi_0''^i},$$

$$C_{mnj}(s, \lambda_0) = \frac{1}{(m+n+j)!} \frac{\partial^{m+n+j} f}{\partial \varphi_0^m \partial \varphi_0'^n \partial \lambda_0^j};$$

$$B_\nu(x, s, \lambda_0) = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu K(x, s, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^\nu},$$

$$D(x, s) = \begin{cases} x - s & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant x, \\ 0 & \text{при } x < s \leqslant 1, \end{cases}$$

$$D_1(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant x \\ 0 & \text{при } x < s \leqslant 1. \end{cases}$$

В работе предполагается симметричность ядра $H(x, s)$ без этого условия тоже можно получить результаты. Имеются опечатки, нет ссылок на известные работы референта. К. Т. Ахмедов

См. также: 3763, 3926 К, 3934, 4226, 4230—4233

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

3867. Об одной экстремальной проблеме. Суиннертон-Дайер (On an extremal problem. Swinnerton-Dyer H. P. F.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 28, 568—583 (англ.)

Даны n дифференциальных уравнений

$$\dot{\alpha}_i = f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где дифференцирование производится по переменной t. Функции f_i и начальные значения $\alpha_i(0)$ даны, так же как и некоторое число $T>0$. Ставится задача: найти такую функцию $x=x(t)$, для которой при $t=T$ $\alpha_1(t)$ имеет максимальное значение.

Так как не каждая система обладает такой экстремальной функцией (например, $\dot{\alpha} = x^2/(1+x^4) - \beta^2$, $\dot{\beta} = x$, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$), то вводятся обобщенные функции (distributed functions), причем оказывается, что можно всегда построить такую последовательность функций $\{x^{(n)}(t)\}$ так называемых „почти экстремалей", которые слабо сходятся к обобщенной функции $x(t)$, дающей решение задачи.

Автор дает критерии, посредством которых можно судить, является ли решение задачи обычной или обобщенной функцией. Л. Я. Цлаф

3868. О применении вариационного принципа к некоторым нелинейным дифференциальным уравнениям. Лангенбах А., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 214—217

Пусть P— некоторый нелинейный оператор, определенный на линейном множестве $M \subset H$ и действующий из гильбертова пространства H в H. Решается уравнение

$$Pu = f \qquad (1)$$

на некотором множестве $M^\circ \subset M$, где M° плотно в H, $f \in H$ — фиксированный элемент. Доказываются следующие предложения:

1. Если: а) $P(0) = 0$, для любых $x, y \in M$ существует линейный по y дифференциал Гато $P'(x)\,y$, непрерывный в любой „плоскости", содержащей x; б) $(P'(x)h_1, h_2) = (P'(x)h_2, h_1)$, где $h_1, h_2 \in M^\circ$; в) $(P'(x)h, h) > 0$, $h \in M^\circ$, $h \neq 0$; г) существует решение $u \in M^\circ$ уравнения (1), то решение u единственно, оно сообщает минимум функционалу

$$\Phi(u) = \int_0^1 (Ptu, u)dt - (f, u), \qquad (2)$$

и обратно: точка минимума $u \in M^\circ$ функционала (2) является решением уравнения (1).

2. Если выполнены а), б) и $(P'(x)h, h) \geqslant \gamma^2 \| h \|^2$ для любых x, h, то $\Phi(u)$ ограничен снизу и любая минимизирующая последовательность сходится в метрике H.

3. Все минимизирующие последовательности функционала $\Phi(u)$ имеют один и тот же предел.

4. Пусть $\Phi(u) = F(u) + lu$ — заданный на некотором линейном множестве $N \subset H$ функционал, причем u —линейный функционал на H, $F(u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2$ при $u \in N$; $F(2u) \leqslant KF(u)$, k=const, $u \in N$, $F(0) = 0$, $F(-u) = F(u)$;

$$\rho(u, V) = \frac{1}{2}\Phi(u) + \frac{1}{2}\Phi(V) - \Phi\left(\frac{U+V}{2}\right) = \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(V) - F\left(\frac{U+V}{2}\right) \geqslant F\left(\frac{U-V}{2}\right),$$

$U, V \in N$; из $F(U-V) \to 0$ следует $|F(U) - F(V)| \to 0$; тогда существует метрическое пространство $R \subset H$, на котором $\Phi(u)$ достигает минимума. $\Phi(u)$ непрерывен на R и N плотно в R.

Доказанные теоремы проиллюстрированы на задаче упруго-пластического кручения сплошного стержня.

Э. С. Цитланадзе

3869. Об условном экстремуме функционалов в линейных топологических пространствах. Вайнберг М. М., Энгельсон Я. Л., Матем. сб., 1958, **45**, № 4, 417—422

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — дифференцируемые по Фреша функционалы для всех x из вещественного линейного топологического пространства E с некоторым запасом линейных функционалов на нем, $U_c(\varphi)$ — множество точек $x \in E$, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x) = c$, c=const. Используя метод и результаты Л. А. Люстерника (Матем. сб., 1934, **41**, 390—401), авторы доказывают следующую теорему: Если обыкновенная точка $x_0 \in E$ является условно экстремальной для функционала $f(x)$ относительно $U_c(\varphi)$, то она является и условно критической, т. е. $\operatorname{grad} f(x_0) = \lambda \operatorname{grad} \varphi(x_0)$, λ — вещественное число. Э. С. Цитланадзе

3870. Несколько вариационных задач, связанных с движением ракет. Фокнер (Some variational problems arising in the study of rocket trajectories. Faulkner F. D.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 138 (англ.)

Краткое резюме доклада.

3871. О брахистохроне в поле постоянной силы. Турковский В. А., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 3, 336—339

3872. Вариационные методы решения задачи кручения для многосвязных областей. Линь Хун-сунь (On variational methods in the problem of torsion for mul-

tiplyconnected cross sections. Lin Hung-sun), Acta Scientia sinica, 1954, 3, № 2, 171—186 (англ.)
См. РЖМат, 1954, 4915.

3873. Вариационные методы, основанные на матрице плотности. Марч, Янг (Variational methods based on the density matrix. March N. H., Young W. H.), Proc. Phys. Soc., 1958, 72, № 2, 182—192 (англ.)

3874. Дополнения к работе автора о вариационном принципе для классической теории поля. Пахнер Ergänzung zum Variationsprinzip für klassische Feldtheorien. Pachner Jaroslav), Ann. Physik, 1958, 1, № 4-5, 201—202 (нем.)
См. РЖМат, 1958, 2997.

См. также: 3762.

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

3875. Понятие о функции и ось *Y*. Вредендёйн (Het functiebegrip en de *Y*-as. Vredenduin P. G. J.), Euclides (Nederl.), 1958, 33, № 10, 313—320 (гол.)

3876. Графики и неравенства. Бюргерс (Grafieken en ongelijkheden. Burgers W. A. M.), Euclides (Nederl.), 1958, 33, № 10, 301—302 (гол.)

3877. Пользование осью *Y* и значком *y* при оперировании с функциями и их графиками. Тол (Het gebruik van de *Y*-as en de *y* bij de behandeling van functies en hun grafieken. Tol M. G. van), Euclides (Nederl.), 1958, 33, № 10, 308—312 (гол.)

3878. Сравнение двух средних. Осл, Теруиллигер (A comparison of two means. Ostle Bernard, Terwilliger H. L.), Proc. Montana Acad. Sci., 1957, 17, 69—70 (англ.)
Показывается, что при $x \geqslant y > 0$

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y},$$

и приводится таблица для ошибки

$$E = 100\left\{\frac{(x+y)/2 - (x-y)/\ln(x/y)}{(x-y)/\ln(x/y)}\right\}$$

замены среднего логарифмического средним арифметическим. В. К. Захаров

3879. Расширение исчисления бесконечно малых. Шмиден, Лаугвиц (Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Schmieden Curt, Laugwitz Detlef), Math. Z., 1958, 69, № 1, 1—39 (нем.)
Работа посвящена перенесению основ анализа из области действительных чисел в новую область, область „Ω-рациональных чисел". Ω-рациональное число есть произвольная последовательность рациональных чисел.

Работа состоит из введения и трех глав. В первой главе изучаются сами Ω-рациональные числа. Вводятся (покомпонентно) арифметические операции над Ω-рациональными числами, превращающие их совокупность в кольцо (с делителями нуля), и отношения порядка (определенные лишь частично). Определяются бесконечно большие и бесконечно малые Ω-рациональные числа как последовательности рациональных чисел, бесконечно большие и бесконечно малые в обычном смысле. Определяется порядок величины Ω-рационального числа (a_n) как класс Ω-рациональных чисел (b_n) таких, что отношение b_n/a_n содержится, начиная с некоторого n, между твердыми рациональными положительными границами. Определяется предел последовательности Ω-рациональных чисел $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots$ относительно целого положительного (т. е. имеющего целые положительные компоненты) бесконечно большого Ω-рационального числа (g_n), как Ω-рациональное число $(a_n^{(g_n)})$. Рациональное число r отождествляется с Ω-рациональным числом, все компоненты которого равны r, после чего произвольное Ω-рациональное число (a_n) оказывается пределом последовательности своих компонент a_n. Обычные действительные числа отождествляются со специальными „действительными" классами Ω-рациональных чисел. Наконец, рассматриваются возможности дальнейшего целесообразного расширения области Ω-рациональных чисел.

На основании этих определений во второй главе вводятся понятия функции, непрерывной функции, производной и интеграла. Соответствующие определения аналогичны обычным, но требуют некоторых предосторожностей. В частности, на рассматриваемые функции во многих случаях налагается условие „нормальности": область определения функции должна содержать вместе с каждым Ω-рациональным числом (x_n) его компоненты x_n, и значение функции в точке (x_n) должно быть равно пределу ее значений в точках x_n. Устанавливаются аналоги теорем обычного анализа о равномерной непрерывности, ограниченности, точных гранях и промежуточных значениях непрерывной функции, об аппроксимации непрерывной функции полиномами, о непрерывности дифференцируемой функции, об интегрируемости непрерывной функции, а также аналоги теорем о средних значениях в интегральном и дифференциальном исчислении.

В третьей главе кратко рассматриваются в области Ω-рациональных чисел некоторые другие вопросы анализа: элементарные функции, δ-функции, степенные ряды, условно сходящиеся ряды.

Во многих своих частях этот вариант анализа, без сомнения, сложнее обычного. Однако в ряде вопросов он проще. Так, всякая последовательность Ω-рациональных чисел сходится. Для двойной последовательности результат двух предельных переходов не зависит от их порядка. Члены любого ряда можно произвольно переставлять. Определение δ-функции не требует расширения понятия функции. Введение содержит несколько замечаний исторического характера. В. А. Рохлин

3880. О средних арифметическом и геометрическом и неравенстве Гёльдера. Кобер (On the arithmetic and geometric means and on Hölder's inequality. Kober H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 3, 452—459 (англ.)
Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны и не все равны между собою, то, как известно (Харди Г., Литтльвуд Д., Пойа Г., Неравенства, М., Изд-во ин. лит., 1948, §2. 23), положительная разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел при $n > 2$ приводится к сумме квадратов (при $n = 2$ — к одному квадрату). С возрастанием n состав этой суммы все более усложняется; так, при $n = 6$ число квадратов равно 19.

В статье показывается, что с помощью более простых сумм квадратов можно получить выражение, сравнимое с упомянутой разностью. Говорят, функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сравнимы если между ними имеет место неравенство, справедливое, для всех неотрицательных действительных $x_1, \ldots, x_n$, т. е. если $f \leqslant \varphi$ или $f \geqslant \varphi$ для всех таких x_k; так, среднее арифметическое и среднее геометрическое сравнимы, ибо первое не меньше второго.

Имея в виду взвешенные средние и вводя обозначение

$$\Delta_n = \sum_1^n q_i x_i - x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n},$$

автор доказывает следующую теорему: Если $n \geqslant 2$, $0 < q_1 \leqslant q_2 \leqslant \dots \leqslant q_n$, $\sum q_i = 1$, $x_i \geqslant 0$, то имеют место неравенства

$$q_1 (n-1)^{-1} \leqslant \frac{\Delta_n}{\sum_{i,k} [(x_i)^{1/2} - (x_k)^{1/2}]^2} \leqslant q_n, \quad 1 \leqslant i < k \leqslant n. \quad (1)$$

На основе этой теоремы и исходя из тех же соображений автор получает ряд других неравенств, имеющих отношение к неравенствам Гёльдера и Минковского. В добавлении к статье доказывается, что если точка $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ n-мерного пространства ($n > 2$) стремится к точке $\{x_0, x_0, \dots, x_0\}$, $x_0 > 0$, то дробь, стоящая в средней части неравенств (1), стремится к единственному пределу в том и только в том случае, когда $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1/n$; предел этот равен $2n^{-2}$.

А. К. Харадзе

3881. **Рассказ по тригонометрии. Парамесваран** (Trigonometry retold. Parameswaran S.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 81—83 (англ.)

Рассматривается вопрос об определении тригонометрических функций функциональными уравнениями.

3882. **Об одном классе формул среднего значения. Стамате** (O clasă de formule de medie. Stamate I.), Comun. Acad. RPR, 1958, **8**, № 1, 19—22 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор рассматривает известные формулы

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(x_0) - x_0 f'(x_0),$$

$$f(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\, x + \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2},$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \qquad x_1 < \alpha < x_2$$

и дает им геометрическое истолкование.

В. В. Немыцкий

3883. **Одно новое обоснование дифференциального исчисления. Гестейи** (A differenciálszámítás egy új megalapozása. Gesztelyi Ernö), Mat. lapok, 1958, **9**, № 1-2, 91—114 (венг.; рез. русск., нем.)

Дается новое обоснование дифференциального исчисления, в котором для определения дифференциала и производной не нужно понятия предела. Вводится некоторая алгебра второго порядка над вещественными числами, где базисные элементы суть 1 и j, а образованные из них произведения $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$, $j \cdot j = j^2 = 0$. Элементы этой алгебры второго порядка называются смешанными числами. Введенное упорядочение таково, что любой делитель нуля меньше любого положительного числа и больше любого отрицательного числа. Эти делители нуля, таким образом, могут быть названы бесконечно малыми числами.

Из резюме автора

3884. **Одна теорема об интеграле Лапласа—Стилтьеса. Деланж** (Un théorème sur l'intégrale de Laplace—Stieltjes. Delange Hubert), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1958, **75**, № 1, 1—17 (франц.)

Доказана следующая теорема: Пусть

$$\alpha(t) = \int_0^t e^{t\psi(u)}\, dv(u),$$

где $v(t)$—действительная неубывающая функция и $\psi(t)$—действительная непрерывная функция для $t \geqslant 0$. Пусть существует положительное число k такое, что для произвольных $t', t'' > 0$

$$|\psi(t'') - \psi(t')| < k\,|t'' - t'|.$$

Предположим, что интеграл

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha(t) = f(s)$$

имеет абсциссу сходимости σ_c. Тогда, если

$$\int_0^t |d\psi(u)| = o(t),$$

то точка σ_c является особой точкой для $f(s)$.

Частным случаем этой теоремы является известная теорема Фабри для степенных рядов (Fabry, Ann. scient. École norm. supér., 1896, **13**, № 3, 367—399).

Б. М. Левитан

3885. **О вычислении интегралов от log—sin. Левин** (On the evaluation of log—sine integrals. Lewin L.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 125—128 (англ.)

3886. **Интегральные неравенства типа неравенства Виртингера. Бисак** (Integral inequalities of the Wirtinger type. Beesack Paul R.), Duke Math. J., 1958, **25**, № 3, 477—498 (англ.)

Неравенство Виртингера

$$\int_{-\pi}^{\pi} [u']^2\, dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} u^2 dx, \quad (1)$$

если $u' \in L_2$, $u(-\pi) = u(\pi)$ и $\int_{-\pi}^{\pi} u\, dx = 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u = A\cos x + B\sin x$, вместе с родственными ему неравенствами доказывается различными способами, из которых один опирается на экстремальное свойство первого собственного значения соответствующей краевой задачи. В 1955 г. были доказаны два новых неравенства этого же типа (РЖМат, 1956, 3078):

$$\int_0^{\pi} u''^2\, dx \geqslant \int_0^{\pi} u^2 dx, \quad (2)$$

если $u'' \in L_2$, и либо $u(0) = u(\pi) = 0$, либо $u'(0) = u'(\pi) = 0$ и $\int_0^{\pi} u\, dx = 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда либо (в первом случае) $u = A\sin x$, либо $u = A\cos x$. Неравенства (1) и (2) могут быть базированы соответственно на изучении уравнений $y'' + y = 0$ и $y^{IV} - y = 0$. Этот подход обобщается в статье на случай произвольной непрерывной весовой функции $p(x)$, т. е. на уравнения

$$y'' + p(x)\, y = 0 \quad (1')$$

и

$$y^{IV} - p(x)\, y = 0. \quad (2')$$

Из выведенных в статье неравенств отметим следующие.

Теорема 1. 3*. Если (1') имеет решение $y_1(x) > 0$ $(-a < x < a)$ и

$$\int_{-a}^{a} p(x)\, dx \geqslant 0,$$

и если $u(-a)=u(a)$, $u'\in L_2$ и

$$\int_{-a}^{a} pudx=0,$$

то

$$\int_{-a}^{a} u'^2dx \geqslant \int_{-a}^{a} pu^2dx,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u\equiv Ay_1(x)$ (и $A=0$, если либо $y_1(-a)\neq 0$, либо $y_1(a)\neq 0$).

Теорема 2. 2. Пусть $p(x)\geqslant 0$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, и $y(x)$ является решением (2'), $y'(x_1)=y'(x_2)=y'''(x_1)=y'''(x_2)=0$, причем $y(x)$ имеет единственный простой нуль $\bar{x}$ $(x_1<\bar{x}<x_2)$ и $y''(\bar{x})=0$. Пусть $u''\in L_2$, $u'(x_1)=u'(x_2)=0$ и

$$\int_{x_1}^{x_2} pudx=0.$$

Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} u''^2\,dx\geqslant\int_{x_1}^{x_2} pu^2\,dx,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u\equiv Ay(x)$. В. И. Левин

3887. Исследование функции $I(\Theta)=\int_{\Theta}^{\infty} p(\Theta)L(\Theta)d\Theta$. **Ергин А.**, Бюл. Студ. научн. о-ва, Ленингр. ун-т, 1958, вып. 1, 20—35

В написанном интеграле $p(\Theta)$ есть полином относительно $\sin\Theta$ и $\cos\Theta$, причем $\int_0^{2\pi} p(\Theta)d(\Theta)=0$; $L(\Theta)$—такая функция, стремящаяся к 0 при $\Theta\to\infty$, что исследуемый интеграл сходится. Ставится вопрос о порядке малости (при $\Theta\to\infty$) величины $I(\Theta)$ по сравнению с величиной $L(\Theta)$. Выясняются достаточные условия для того, чтобы эти величины были одного порядка малости. Делаются указания относительно некоторых „исключительных“ (по терминологии автора) случаев, когда порядок $I(\Theta)$ будет другим. Г. М. Фихтенгольц

3888. О сингулярных интегралах. Ицкович И. А., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, **29**, 37—44

Рассматривается многомерный сингулярный интеграл

$$\int_{E_n}\frac{f(M,\Lambda)}{r^n}u(N)\,dS_N, \qquad (1)$$

где M, N — точки n-мерного евклидова пространства E_n, r — расстояние между M и N, Λ — точка пересечения сферы единичного радиуса с центром в точке M и луча, исходящего из M в направлении точки N.

Кальдерон и Зигмунд (РЖМат, 1957, 2173) доказали, что оператор (1) ограничен в $L_p(E_m)$, $1<p<\infty$, если

$$\int_{r=1}|f(M,\Lambda)|^q\,d\Lambda\leqslant\text{const},\ p^{-1}+q^{-1}=1.$$

Автор дает новое и весьма простое доказательство этой теоремы при дополнительном предположении, что $f(M,\Lambda)=-f(M,\Lambda^*)$, если Λ и Λ^* — точки сферы $r=1$, лежащие на концах одного диаметра. Доказательство основано на применении δ-функции; существенным моментом доказательства является то, что многомерный сингулярный интеграл с характеристикой $f=\delta(\Lambda)-\delta(\Lambda^*)$ превращается в одномерный, и его ограниченность как оператора в $L_p(-\infty,+\infty)$ дается известной теоремой М. Рисса.

Выясняется также ряд элементарных свойств одномерного сингулярного интегрального оператора

$$S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-x},$$

из которых отметим одно: если $D=i\frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования в $L_2(-\infty,+\infty)$, то $S=-\operatorname{sgn}D$. С. Г. Михлин

3889. Об обобщении некоторых функциональных уравнений нескольких переменных. Хоссу (Néhány többváltozós függvényegyenlet általánosítása. Hosszú Miklós), Magyar tud. akad. mat. és. fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 3-4, 439—449 (венг.)

Суммирование предыдущих результатов автора (РЖМат, 1954, 4446; 1955, 1809; 1955, 2722; 1956, 1436; 1957, 4911; 1958, 5131).

3890. О функциональном уравнении. Чонди, Мак-Лауд (On a functional equation. Chaundy T. W., McLeod J. B.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 35, 202—206 (англ.)

Рассматривается функциональное уравнение

$$f(x)+uf(vx)=Uf(Vx),$$

где x, u, v — независимые переменные, $f(x)$ — искомая функция, предполагаемая непрерывной, а U и V — функции от u и v, форма которых зависит от вида функции $f(x)$. Общее решение получено в виде

$$f(x)=Ax^a+Bx^b,$$

где A, B, a, b — константы; U и V даются формулами

$$1+uv^a=UV^a;\quad 1+uv^b=UV^b.$$

Случаю $b\to a$ соответствует решение

$$f(x)=(A+B\log x)x^a,$$

где $1+uv^a=UV^a$, $u\log v=U\log V$.

Для $B=0$ получено решение

$$f(x)=Ax^a;$$

в этом случае u, v, U, V связаны одним уравнением $1+uv^a=UV_a$. Э. А. Чернышенко

3891. О некоторых функциональных уравнениях. Попович (Asupra unor ecuatii functionale. Popoviciu Tiberiu), Studii si cercetari stiint. Acad. R. P. R. Fil. Cluj., Ser. I., 1956, **6**, № 3-4, 37—49 (рум.; рез. русск., франц.)

В первой части работы автор рассматривает систему функций

$$f_0(x),f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x), \qquad (1)$$

определенных на $[a,b]$. Если $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — любые точки на $[a,b]$ и определитель

$$V\begin{pmatrix}f_0,f_1,\ldots,f_{n-1}\\ x_1,x_2,\ldots,x_n\end{pmatrix}=\left\|f_{j-1}(x_i)\right\|,\ i,j=1,2,\ldots,n, \qquad (2)$$

не равен нулю, то (1) образуют систему (I) — независимых функций на $[a,b]$.

В случае эквидистантных точек $x_{i+1}=x+ih$ положим

$$V\begin{pmatrix}f_0,f_1,\ldots,f_{n-1}\\ x,x+h,\ldots,x+(n-1)h\end{pmatrix}=\Delta_h(f_0,\ldots,f_{n-1}).$$

Рассматривается функциональное уравнение

$$\Delta_h(f_0,f_1,\ldots,f_{n-1},f)=0 \qquad (3)$$

для случая, когда $f_0,\ldots,f_{n-1}$ образуют систему (I) на $[a,b]$ и, кроме того, непрерывны.

Получается следующий результат: Общее непрерывное решение уравнения (2) имеет вид

$$f(x)=\sum_0^{n-1}c_if_i(x), \qquad (4)$$

где c_i — произвольные постоянные. Результат (4) сохраняет силу и в случае, когда решение — всего лишь ограниченная функция на $[a,b]$.

Во второй части рассматриваются функции от двух переменных вида

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\cdot g_i(y), \qquad (5)$$

названные квазиполиномами степени m, F определена на $E(x\in E_x, y\in E_y)$. Выражение (5) называется квазиполиномом точно степени m, если (f_i) и (φ_i) соответственно линейно независимы на E_x и на E_y.

Если обозначить через $D\begin{bmatrix}x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\\ y_1, y_2, \dots, y_{m+1}\end{bmatrix}; F\Big]$ определитель $\| F(x_i,y_i)\|$, $i, j = 1,2,\dots,m+1$, то имеет место результат: Каждый квазиполином $F(x, y)$ степени m удовлетворяет на E уравнению $D=0$.

Обратно, каждая функция F, которая удовлетворяет главному уравнению, есть квазиполином точно степени m. Пусть E есть прямоугольник $R(a\leqslant x\leqslant b; c\leqslant y\leqslant d)$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$D\begin{pmatrix}x, x+h, \dots, x+mh\\ y, y+k, \dots, y+mk\end{pmatrix}; F\Big)=0. \qquad (6)$$

Справедливо следующее утверждение: Если некоторая $F(x, y)$ непрерывна относительно каждого из переменных x, y, если на R она удовлетворяет условию

$$D\begin{pmatrix}x_1, x_2, \dots, x_m\\ y_1, y_2, \dots, y_m\end{pmatrix}; F\Big)\neq 0,$$

а также уравнению (6), то F есть квазиполином точно m-й степени.

Полученные результаты применены к квазиполиномам, симметричным относительно x и y. В работе имеются опечатки и неточности в определениях. Е. В. Вороновская

3892. О решении функционального уравнения. Поведа-Рамос (Sobre la solución de una ecuación funcional. Poveda Ramos Gabriel), Ingeniería y arquit., 1958, **12**, № 139, 15—19 (исп.)

Исследуется функциональное уравнение

$$F(x)+F(y)=F(xy).$$

Рассмотрен ряд свойств уравнения, на основании которых получены решения

$$f_1(u)=C_1\log_a u,$$
$$f_2(u)=-C_2\log_b u,$$
$$f_3(u)=0,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные и a, b — произвольные постоянные, большие 1.

Э. А. Чернышенко

3893. О теоремах сложения и вычитания. Ацел (Über Additions- und Subtraktionstheoreme. Aczél J.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 325—333 (нем.)

Рассматриваются функциональные уравнения

$$f(x+y)=F[f(x), f(y)], \qquad (1)$$
$$f(x-y)=G[f(x), f(y)]. \qquad (2)$$

Даются необходимые и достаточные условия существования непостоянных непрерывных решений указанных уравнений. Доказывается, что если уравнения (1) и (2) имеют непостоянные непрерывные решения, то каждое из них на множестве положительной меры мажорируется измеримой функцией, также непрерывной, и если не постоянной, то строго монотонной. Э. А. Чернышенко

3894 К. Элементарные функции. Метод. пособие для студ.-заочн. I—III курсов. Куницкая Е. С. М., Учпедгиз, 1958, 64 стр., илл., 85 к.

3895 К. Конкурсные задачи по математике. Изд. 6-е дополн. Албукерки (Matemática para concursos; pontos atualizados. 6. ed. ampl. Albuquerque Arci Tenóriode. Rio de Janeiro, Conquista, 1957, 223 p., 70,00 cruz.) Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 6, 303 (порт.)

3896 К. Анализ; современный подход. Менгер (Calculus, a modern approach. 2nd ed. Menger Karl. Chicago, Bookstore, III. Inst. Technol., 1953, XXIV, 304 pp., 4.85 doll.) (англ.)

Настоящая книга представляет собой учебник по анализу для студентов, в котором приведены новые обозначения и новые термины, необходимые и достаточные, по мнению автора, для ликвидации существующей путаницы при использовании общепринятых обозначений. Следующие слова взяты из предисловия к книге: „В книге мы определяем переменную величину в терминах концепций класса и числа. Мы развиваем строго дедуктивную теорию переменной величины. Мы описываем подробно применение этих результатов в физических науках, где переменные величины имеют важнейшее значение. Мы настойчиво подчеркиваем различие между переменной величиной и переменной Вейерштрасса. Мы приписываем некоторые трудности, оставшиеся не разрешенными у Рассела (Russell), и некоторые неудачи в математической литературе игнорированию этого различия. Мы отказываемся признавать, что переменная величина, в том виде как она применяется в науке, была арифметизирована Вейерштрассом; мы указываем, что ее арифметизировать нельзя. Мы даем изложение теории чистых функций, основанное на постулатах. Наконец, мы проводим арифметико-аналитический параллелизм между измерением объектов и функциональной зависимостью переменных, считая аналогичными единицу и независимое переменное."

Под „переменной величиной" (variable quantity) автор понимает действительную функцию, определенную на произвольном множестве, а под „функцией" подразумевается действительная функция, определенная на множестве действительных чисел. Так как книга является учебником для студентов, то автор не дает полного описания своей системы. Чтобы избавиться от трудностей, связанных с делением на переменную величину, которая иногда может быть нулем, автор предлагает свой метод, иллюстрирующий в данном случае наилучшим образом достаточность его системы.

Референт не находит никакого опровержения общепринятого использования переменных Вейерштрасса (по терминологии автора), согласно которому последние буквы алфавита, такие как x, y, z, используются для переменных, а первые буквы, такие как a, b, c — для постоянных. В этих обозначениях $f(x)$ выражает функцию, а $f(a)$ — значение функции. Если букву I, примененную автором для тождественной функции, заменить всюду через x, то его обозначение в основном отличается от обычного обозначения тем, что он применяет вместо $\int_a^b f(x)dx$ выражение $\int_a^b f$, т. е. небольшим улучшением.

Называя традиционную переменную величину действительной функцией, автор не указывает, как избежать путаницы между обозначениями „переменная" и „переменная величина".

Автор приводит хороший пример, доказывающий достаточность своей системы, но дает мало примеров, доказывающих ее необходимость. O. Frink

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 575—576

3897 К. Современный курс анализа. Менгер (Calculus, a modern approach. Menger Karl. New York, Ginn and Co., 1955, XVII, 354 pp.) (англ.)

См. реф. 3896.

3898 К. Учебное пособие по курсу высшей математики. Тема 4. Производная и дифференциал. Никитин Б. Д., Всес. заочн. энерг. ин-т. М., 1958, 56 стр.,

3899 К. Краткий курс высшей математики. Вып. 3. Интегральное исчисление. Майстров Л. Е. Моск. финанс. ин-т. М., 1958, 93 стр., илл.

3900 К. Интегральное исчисление. [Учебн. пособие для вузов]. 6 изд. Лузин Н. Н. М., «Сов. наука», 1958, 415 стр., илл., 10 р.

3901 К. Интегральное исчисление. Изд. 2-е дополн. Шёнхубер (Rachunek całkowy. Wyd. 2 uzup. Schönhuber Antoni. Poznań, PWN, 1957, 362 s., il., 16 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 5, 48 (польск.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3902. Сходимость рядов с положительными членами. Шанкс (Convergence of series with positive terms. Shanks E. Baylis), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 5, 338—341 (англ.)

Несколько видоизменяя принцип сходимости рядов, автор использует полученные таким образом необходимые и достаточные условия сходимости положительных рядов для выведения признаков сходимости Даламбера, Куммера, интегрального признака Коши и др.

Б. М. Макаров

3903. Суммирование бесконечных рядов с помощью функций Грина. Умэбара (Umebara Tadatoshi), Дэнки цусин гаккай дзасси. J. Inst. Electr. Commun. Engrs Japan, 1958, **41**, № 3, 267—271 (японск.)

3904. Об одной проблеме теории рядов. Сюс (A sorelmélet egy problémájáról. Szüsz Péter), Magyar tud. akad. mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 3-4, 461—465 (венг.)

Статья напечатана на немецком языке (РЖМат, 1959, 1629).

3905. Некоторые обобщения теорем тауберова типа. Гопалакришна, Рао (Some generalized Tauberian type theorems. Gopalakrishna J., Rao C. Ramamohana, J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 147—156 (англ.)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для $x \geqslant 1$ $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, $g(x)$ для достаточно больших значений x неубывает и стремится к $+\infty$ вместе с x, а интеграл Римана — Стилтьеса $h(x) = \int_1^x f(t) d\ln g(t)$ существует для всех $x > 1$. В обозначениях

$$L = \limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad l = \liminf_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$M = \limsup_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)}, \qquad m = \liminf_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)},$$

$$p = \limsup_{x \to +\infty} [g(x+0) - g(x)]/g(x),$$

$$q = \limsup_{x \to +\infty} [g(x) - g(x-0)]/g(x-0),$$

$$\beta_\lambda = \liminf_{x \to +\infty} \left[\min_{\substack{x \leqslant t \\ g(t) < \lambda g(x)}} \frac{f(t)}{f(x)} \right],$$

$$\gamma_\lambda = \liminf_{x \to +\infty} \left[\min_{\substack{t \leqslant x \\ g(x) < \lambda g(t)}} \frac{f(x)}{f(t)} \right]$$

устанавливается, что $l \leqslant m \leqslant M \leqslant L$, и при $\lambda > 1$

$$M \geqslant m/\lambda(1+q) + \max[0, \beta_\lambda L \ln\{\lambda/(1+p)\}/\lambda(1+q)],$$

$$m \leqslant M(1+q)/\lambda + (l/\gamma_\lambda)\ln\lambda(1+p).$$

Выводится ряд следствий из этих оценок и в качестве приложения приведен один аналог известной теоремы П. Л. Чебышева о распределении простых чисел.

А. Ф. Тиман

3906. Тауберова теорема для интеграла Римана—Лиувилля целого порядка. Раджагопал (A Tauberian theorem for the Riemann—Liouville integral of integer order. Rajagopal C. T.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 4, 487—499 (англ.)

Интеграл Римана—Лиувилля порядка α определен как

$$s_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} s(t)\, dt,$$

где $s(x)$ — функция, интегрируемая по Лебегу на любом конечном интервале полуоси $x \geqslant 0$. Ряд известных результатов, позволяющих судить о поведении $s(x)$ по поведению $s_\alpha(x)$ при некоторых дополнительных предпосылках относительно $s(x)$ (тауберовы теоремы), обобщается в следующей теореме: Если для $\lambda > 1$ выполняется одно из следующих условий (вытекающих каждое из другого):

$$\limsup_{t \to \infty} \sup_{t \leqslant t' \leqslant \lambda t} \frac{s(t') - s(t)}{t^{q-p}} = W_1(\lambda) \text{ конечен,}$$

или

$$\limsup_{t \to \infty} \sup_{t \leqslant t' \leqslant \lambda t} \frac{s(t') - s(t)}{t'^{q-p}} = W_1^*(\lambda) \text{ конечен,}$$

где p — целое положительное число, и если

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{s_p(x)}{x^q} = \underline{\sigma}_{p,q}, \quad \limsup_{x \to \infty} \frac{s_p(x)}{x^q} = \overline{\sigma}_{p,q},$$

то

$$-\left(\frac{\lambda-1}{p}\right)^p \liminf_{x \to \infty} \frac{s(x)}{x^{q-p}} \leqslant \mathfrak{A}_q(\lambda, p)\, \underline{\sigma}_{p,q} +$$

$$+ \mathfrak{B}_q(\lambda, p)\, \overline{\sigma}_{p,q} + \left(\frac{\lambda-1}{p}\right)^{p-1} \int_{1+(1-p^{-1})(\lambda-1)}^{\lambda} W_1(t)\, dt,$$

где $\mathfrak{A}_q(\lambda, p)$ и $\mathfrak{B}_q(\lambda, p)$ являются соответственно суммой отрицательных и положительных членов суммы

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu+1} \binom{p}{\nu} \left\{1 + (p-\nu)\frac{\lambda-1}{p}\right\}^q =$$

$$= \mathfrak{A}_q(\lambda, p) + \mathfrak{B}_q(\lambda, p).$$

Кроме того, при $0 < \theta < 1$,

$$\left(\frac{1-\theta}{p}\right)^p \limsup_{x \to \infty} \frac{s(x)}{x^{q-p}} \leqslant \mathfrak{C}_q(\theta, p)\, \underline{\sigma}_{p,q} + \mathfrak{D}_q(\theta, p)\, \overline{\sigma}_{p,q} +$$

$$+ \left(\frac{1-\theta}{p}\right)^{p-1} \int_{\theta}^{1-(1-p^{-1})(1-\theta)} W_1^*(t)\, dt,$$

где $\mathfrak{C}_q(\theta, p)$ и $\mathfrak{D}_q(\theta, p)$ являются соответственно суммой отрицательных и положительных членов суммы

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \binom{p}{\nu} \left\{1 - \nu\frac{1-\theta}{p}\right\}^q = \mathfrak{C}_q(\theta, p) + \mathfrak{D}_q(\theta, p).$$

Статья содержит также ряд частных случаев и примечаний к этой теореме.

В. И. Левин

3907. Теоретико-функциональное доказательство O-теоремы Таубера для степенных рядов. Юркат (Ein funktionentheoretischer Beweis für O-Taubersätze bei Potenzreihen. Jurkat Wolfgang B.), Arch. Math., 1956, **7**, № 2, 122—125 (нем.)

Опираясь на известные теоремы Монтеля и Витали (Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, 1951, гл. V), автор непосредственно получает следующие тауберовы теоремы. Если $k>1$, то из сходимости ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ для $|z|<1$ и условий $f(z)=o\left(\frac{1}{1-z}\right)$,

$$f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \qquad (1)$$

следует, что

$$s_n^k=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}s_\nu=o(n^k). \qquad (2)$$

Если вместо (1) предполагать, что $(1-z)f(z)=O\left[\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}\right]$, $(|z|<1)$, где $\alpha\geqslant -1$, то (2) остается в силе для $k>\alpha$.

Если $\alpha>\beta\geqslant -1$, то при выполнении условия (2) для $k>\alpha$ и условия $s_n^k=O(n^k)$ для $k>\beta$, следует (2) для $k>\beta$.

А. Ф. Тиман

3908. О $\sum_{k=1}^{n-1}k^p$. Блей (Alweer $\sum_{k=1}^{n-1}k^p$. Blij F. van der), Euclides (Nederl.), 1958, **34**, № 1, 26—27 (гол.)

3909. Об одной формуле Диксона. Нанджундия (On a formula of A. C. Dixon. Nanjundiah T. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 308—311 (англ.)

Дается новое элементарное доказательство формулы Диксона (Dixon A. C., Messenger Math., 1891, **20**, 79—80) для суммы кубов биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{r=0}^{2p}(-1)^r\binom{2n}{r}^3=(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}. \qquad (1)$$

Доказательство основывается на тождестве

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^p\alpha^{n-r}\beta^r=\sum_{r=0}^{[n/2]}C_{n,r}^{(p)}\binom{n-r}{r}(\alpha+\beta)^{n-2r}(\alpha\beta)^r, \qquad (2)$$

где коэффициенты $C_{n,r}^{(p)}$ последовательно определяются из уравнений

$$\binom{n}{k}^p=\sum_{r=0}^{k}C_{n,r}^{(p)}\binom{n-r}{r}\binom{n-2r}{k-r},\quad k=0,1,\ldots,\binom{n}{2}. \qquad (3)$$

Из (3), опираясь на свойства биномиальных коэффициентов, выводят рекуррентную формулу для $C_{n,r}^{(p)}$, с помощью которой находится их явное выражение. В частности, при $p=2$ и $p=3$

$$C_{n,r}^{(2)}=\binom{n}{r},\quad C_{n,r}^{(3)}=\binom{n+r}{r}. \qquad (4)$$

Полагая в (2) $p=3$, $\alpha=1$, $\beta=-1$, заменяя n на $2n$ и используя (4), приходят к формуле Диксона.

Доказывается еще формула

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\Big/\binom{2n}{r}=(2n+1)\Big/(n+1).$$

А. Г. Школьник

3910. Геометрический метод суммирования арифметических рядов. Арутюнян Г. А., Уч. зап. Ереванск. гос. русск. пед. ин-та, 1957, **9**, 259—285

Приводятся диаграммы, позволяющие находить суммы некоторых конечных числовых рядов, в том числе и двойных. Суммируются ряды

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\ldots(k+p)\ (\text{для } p=1,2,3,4),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^p\ (p=2,3,4,5),\quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^p\ (p=1,2,3,4),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}k^p\ (p=1,2,3)\quad \text{и}$$

некоторые другие. Идея суммирования заключается в изображении членов ряда фигурами (прямоугольник и последовательность шестиугольников (гномонов), каждый из которых охватывает предыдущий), расположенными так, что в совокупности они образуют прямоугольник. В некоторых случаях возможно изображение членов ряда концентрическими кольцами.

Примечание референта. В статье имеются погрешности с точки зрения русского языка.

А. Г. Школьник

3911. Теоремы об интегрировании степенных рядов. Кеннеди (Integrability theorems for power series. Kennedy P. B.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 24, 316—320 (англ.)

Рассматривается степенной ряд

$$f(x)=\sum_0^{\infty}c_nx^n$$

и следующие утверждения:

$(1-x)^{-1}f(x)\in L[0,1]$, $\sum c_n\log n$ сходится, $S_n\log n\to\alpha$ (α — конечно). Изучается вопрос об их взаимной связи.

В. В. Немыцкий

3912. Об одном способе получения асимптотических разложений. Альянчич. (O jednom postupku za dobijanje asimptotskih razvitaka. Aljančih S.) Билтен друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, **5**, 22—29, (серб.; рез. нем.)

Способ получения асимптотических разложений, примененный Карамата к тригонометрическим рядам (Karamata J., Publs Inst. math. Acad. serbesci., 1952, **4**, 69—88) и автором к рядам полиномов Лежандра (РЖМат, 1959, 514), переносится на ряды ультрасферических полиномов. Доказаны теоремы: 1. Пусть последовательность $\{a_\nu\}$ тотально монотонна (т. е. $\Delta^n a_\nu\geqslant 0$ для всех n и ν) и для каждого $\nu=0,1,2,\ldots$ имеет место асимптотическое разложение

$$b_\nu(x)=\sum_{\mu=0}^{m}p_\mu(\nu)/q_\mu(x)+o(1/q_m(x)),\quad x\to\infty,$$

по общей шкале $\{q_\mu(x)\}$ (т. е. $q_\mu(x)>0$, $q_\mu(x)/q_{\mu+1}(x)\to 0$, $x\to\infty$), причем $p_\mu(\nu)$ ($\mu=0,\ldots,m$) — полиномы от ν степени не выше s. Если для некоторого целого $\kappa\geqslant s$ имеем

$$q_m(x)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\nu^{\lambda-1}\left|\Delta^{k+1}b_{\nu-k-1}(x)\right|\to 0,\ x\to\infty, \qquad (1)$$

то для $0<\alpha<\pi$ существует предел

$$\lim_{r\to 1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu(x)P_\nu^\lambda(\cos\alpha)r^\nu=G(\alpha,x)$$

и имеет место асимптотическое разложение

$$G(\alpha,x) = \sum_{\mu=0}^{m} \Pi_\mu(\alpha)/q_\mu(x) + o(1/q_m(x)),\ x\to\infty,$$

где

$$\Pi_\mu(\alpha) = \lim_{r\to 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\mu(\nu) P_\nu^\lambda(\cos\alpha) r^\nu \quad (\mu = 0,1,\ldots,m).$$

2. В теореме 1 можно условие (1) заменить следующим: для некоторого целого $k > s$

$$\Delta^k b_\nu(x) \geqslant \Delta^k b_{\nu+1}(x) \geqslant 0, \qquad \nu \geqslant \nu_0, \quad x \geqslant x_0.$$

А. Х. Турецкий

3913 К. Сходимость некоторых рядов (с 200 решенных примеров). **Вѐлозу** (Convergencia e soma das séries (com 200 exercicios resolvidos). Veloso Paulo Dias. Rio de Janeiro, Organiz. Simoes, 1957, 211 p., il., 120,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 6, 303 (порт.)

3914 К. Ряды Фурье и интеграл Фурье. Лекция для студ. заочн. втузов. Зверев А. В. Всес. заочн. политехн. ин-т. М., 1958. 48 стр.

3915 Д. Теоремы о среднем значении в теории двойных рядов. Реймерс Э. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1958

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3916. Замечания о полиномах Бесселя. Карлиц (A note on the Bessel polynomials. Carlitz L.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 2, 151—162 (англ.)

Рассматриваются полиномы Бесселя

$$y_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(n+r)!}{(n-r)!\,r!}\left(\frac{x}{2}\right)^r \qquad (1)$$

и изучаются их свойства. В дополнение к известным соотношениям (дифференциальное уравнение, рекуррентная формула и др.) автор получает еще несколько новых формул и свойств полиномов (1). Библ. 14 назв.

Б. А. Рымаренко

3917. О неравенстве Турана для ультрасферических функций. Венкатачалингар, Лакшмана-Рао (On Turán's inequality for ultraspherical polynomials. Venkatachaliengar K., Lakshmana Rao S. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1075—1087 (англ.)

В ряде работ последних лет исследовались различные обобщения неравенства Турана, которое он получил для полиномов Лежандра

$$\Delta_n(x) \equiv [P_n(x)]^2 - P_{n+1}(x)\,P_{n-1}(x) \geqslant 0,$$

где $n \geqslant 1$, а $|x| \leqslant 1$.

Данная статья также может быть отнесена к таким работам, так как она посвящена определению знака первой и второй производных функции

$$\Delta_n^{(\lambda)}(x) \equiv [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 - P_{n+1}^{(\lambda)}(x) P_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

где $P_n^{(\lambda)}(x)$ — ультрасферические полиномы.

Для решения поставленной задачи авторы статьи представляют сначала производную от функции $\Delta_n^{(\lambda)}(x)$ по x в виде вронскиана, а потом разлагают ее в ряд, из которого следует, что знак первой производной от $\Delta_n^{(\lambda)}(x)$ определяется знаком $(\lambda-1)x$.

Далее авторы показывают, что вторая производная от $\Delta_n^{(\lambda)}(x)$ положительна, если $\lambda > 1$, и отрицательна, если $1/2 \leqslant \lambda < 1$.

В заключение приводится вывод интегрального представления функции $\Delta_n(x)$ через полиномы Лежандра.

П. И. Кузнецов

3918. Замечание о константе Эйлера. Симс (A note on Euler's constant. Sims Wilbur T.), Proc. Montana Acad. Sci., 1956, **16**, 57—58 (англ.)

Показывается, что

$$\gamma = \lim_{h\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right\} = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\left(1 + \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}\right)dx;$$

т. е. константа Эйлера γ выражается через определенный интеграл.

В. К. Захаров

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3919. Преобразование Лапласа и обобщенные полиномы Лагерра. Руни (Laplace transforms and generalized Laguerre polynomials. Rooney P. G.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 2, 177—182 (англ.)

Доказываются теоремы:

1. Необходимым и достаточным условием того, что бы функция $f(s)$, аналитическая при $\mathrm{Re}\, s > 0$, была преобразованием Лапласа функции вида $t^{1/2\nu} F(t)$ с $F \in L_2(0,\infty)$ и $\nu > -1$, является выполнение неравенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(\nu+n+1)}|q_n|^2 < \infty,$$

где

$$q_n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n+\nu}{n-r}\frac{1}{r!} f^{(r)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

В этом случае

$$F(t) = \underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, t^{1/2\nu} e^{-1/2t} \sum_{n=0}^{r} \frac{n!}{\Gamma(\nu+n+1)} q_n L_n^\nu(t),$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(\nu+n+1)}|q_n|^2 = \int_0^\infty |F(t)|^2\,dt.$$

2. Если

$$F \in L_2(0,\infty),\ \nu > -1,\ G(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty k_\nu(xy)\,F(y)\frac{dy}{y},$$

где

$$k_\nu(x) = \int_0^x J_\nu(2\sqrt{y})\,dy$$

и

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^{1/2\nu}\, G(t)\,dt,$$

то

$$F(t) = \underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, t^{1/2\nu} e^{-1/2t} \sum_{n=0}^{r} q_n \frac{n!}{\Gamma(\nu+n+1)} L_n^{(\nu)}(t),$$

где

$$q_n = (-1)^n 2^{\nu+1} \sum_{r=0}^{n}\binom{n+\nu}{n-r}\frac{4^r}{r!}\, g^{(r)}(2)$$

Л. Я. Цлаф

3920. Теорема подстановки для преобразования Лапласа и ее обобщение для преобразований с симметричным ядром. Бушман (A substitution theorem for the Laplace transformation and its generalization to transformations with symmetric kernel. Buschman R. G.), Pacif J. Math., 1957, 7, № 4, 1529—1533 (англ.)

Пусть, как обычно, $F(t) \doteqdot f(s)$ — символическая запись преобразования Лапласа

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt.$$

Доказывается, что если функции k, g, Φ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то имеет место следующее операционное соответствие:

$$k(t)\, F[g(t)] \doteqdot \int_0^\infty \Phi(s,u)\, f(u)\, du. \qquad (1)$$

Затем выводится аналогичное операционное соответствие для интегральных преобразований вида

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\, F(t)\, dt,$$

где $K(s,t)$ — симметричное ядро. Приводится несколько формул типа (1) для ядер $K(s,t)$ вида $(s+t)^{-1}$, $J_\nu(s,t)\,(s,t)^{1/2}$ и др. А. П. Прудников

3921. Некоторые свойства обобщенного преобразования Лапласа, включающего G-функцию Мейера. Нараин (Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G-function. Narain Roop), Math. Z., 1957, 68, № 3, 272—281 (англ.)

Рассматривается обобщенное преобразование Лапласа в форме Варма (Varma R. S., Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1951, **A 20**, 209—216)

$$\varphi(s) = s \int_0^\infty (st)^{m-1/2} e^{-1/2 st} W_{k,m}(st)\, f(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $W_{k,m}(x)$ — функция Уиттекера.

Обозначим преобразование (1) для функции $f(t)$ при помощи формулы

$$\varphi(s) = \varphi(s : k, m) = W[f(t); k, m],$$

а для функции $t^\sigma h(t)$ через выражение

$$\varphi(s : \lambda,\ \mu : \sigma) = W[t^\sigma h(t); \lambda, \mu].$$

Доказывается четыре теоремы относительно преобразования (1), из которых приводим первую:

Если

$$W[t^\sigma h(t);\ \lambda, \mu] = \varphi(s : \lambda, \mu : \sigma)$$

и

$$W[g(t);\ k, m] = s^\rho h(1/s),$$

то

$$\int_0^\infty g(t)\, G^{4,0}_{2,4}\left(st \,\middle|\, \begin{matrix} 1/2 - k + m,\ \nu - \lambda \\ 2m,\ \nu + \mu - 1/2,\ \nu - \mu - 1/2 \end{matrix}\right) dt =$$

$$= s^{\nu-\mu-1/2}\, \varphi(s : \lambda,\ \mu : \nu - \mu - \rho - 1/2), \qquad (2)$$

при условиях, что $\mathrm{Re}(s) > 0$, интеграл в (2) абсолютно сходится и обобщенное преобразование Лапласа от $|g(t)|$ и $|t^{\nu-\mu-\rho-1/2} h(t)|$ существует.

Здесь $G^{l,n}_{p,q}\left(\frac{\beta}{t} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right)$ — функция Мейера (РЖМат, 1955, 3285 К).

Полученные теоремы применяются автором для вычисления некоторых несобственных интегралов.

П. И. Кузнецов

3922. Об определении фазы интеграла Фурье. I. Акутович (On the determination of the phase of a Fourier integral. I. Akutowicz Edwin J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **83**, № 1, 179—192 (англ.)

Если $\varphi(t)$ — комплекснозначная функция, определенная на $(-\infty, \infty)$, а $\hat{\varphi}(x)$ — ее преобразование Фурье, то имеет место теорема: Пусть $G(a)$ — класс всех функций φ, удовлетворяющих следующим условиям:

α) $\varphi \in L^1 \cap L^2$, где L^1 и L^2 — обычные лебеговы функциональные пространства на $(-\infty, \infty)$,

β) $\varphi(t)$ обращается в нуль почти всюду для $t < 0$,

γ) $\hat{\varphi}(x) \neq 0$, $-\infty < x < \infty$,

δ) $a(x)$ — фиксированная функция такая, что $|\hat{\varphi}(x)| = a(x)$, $-\infty < x < \infty$. Тогда если φ_1 и φ_2 принадлежат классу $C(a)$, то имеет место соотношение вида

$$e^{ic_1 + ib_1 x} B_1(x)\, \hat{\varphi}_1(x) = e^{ic_2 + ib_2 x} B_2(x)\, \hat{\varphi}_2(x),$$

где c_1, c_2, b_1, b_2 — действительные числа, $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$, $B_1(x)$ и $B_2(x)$ суть пределы некоторых произведений Бляшке в верхней полуплоскости при $y \to 0+$, $B_1(x)$ и $B_2(x)$ — голоморфные функции, модуль которых равен единице.

В заключение приведены два примера, которые иллюстрируют указанную теорему. П. И. Кузнецов

3923. О свертках функций ограниченной вариации. Студнев Ю. П., Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та, 1958, № 2, 17

3924. Добавление к моей статье «О преобразованиях Вебера». Гриффит (Addendum to my paper «On Weber transforms». Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1957, **91**, № 4, 189 (англ.)

Даются добавления к статье автора (РЖМат, 1957, 7993).

3925. Обобщенные преобразования Меллина. I. Фын Кан (Generalized Mellin transforms. I. Fung Kang), Чжунго кэсюэ, Scientia sinica, 1958, 7, № 6, 582—605 (англ.)

Переведено из Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, (1957, 7, № 2, 242—267). Опираясь на теорию, развитую в известной работе И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (РЖМат, 1955, 3291), автор распространяет классическое преобразование Меллина на совокупность распределений в смысле Л. Шварца.

Для $(0, \infty)$ вводится в рассмотрение класс P основных функций $F(x)$ и обобщенные функции $F[x]$, а также пространство Q и обобщенные функции в нем, определяющиеся соответственно аналогично классу K в случае всей оси $(-\infty, \infty)$ и пространству Z' И. М. Гельфанда — Г. Е. Шилова.

Отмечается, что отображение $\psi(s) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{-s} dx$, где $\varphi \in P$, является изоморфизмом пространства обобщенных функций в P на пространство обобщенных функций в Q и, будучи, таким образом, определенным для этих обобщенных функций, так же как и обратное отображение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \psi(s)\, x^{s-1}\, ds,$$

совпадает с классическим преобразованием Меллина.

В терминах преобразования Меллина устанавливаются критерии для принадлежности обобщенных функций, определенных в P, к некоторым специальным классам распределений.

Рассматриваются также мультипликаторные свертки на изучаемых классах обобщенных функций и некоторые связанные с ними свойства указанных преобразований. А. Ф. Тиман

3926 К. Введение в теорию и приложения преобразования Лапласа. Дёч (Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaft. Doetsch Gustav. Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verl., 1958, 301 S., ill.) (нем.)

Книга призвана, с одной стороны, строго и с полными доказательствами излагать необходимый минимум теоретических положений, и, с другой стороны, на достаточно типичных примерах иллюстрировать прикладные возможности теории. Она рассчитана на математиков, не являющихся специалистами в данной области, и на студентов физических и инженерных специальностей. Содержание книги в основном элементарно, теоретическая сторона предмета занимает, учитывая задачи книги, непропорционально большое место. В 28 параграфах (без разбивки на главы) излагаются следующие вопросы. § 1. Введение интеграла Лапласа с физической и математической точек зрения. § 2. Некоторые примеры интегралов Лапласа и уточнение понятий интеграла. § 3. Полуплоскость сходимости. § 4. Интеграл Лапласа как преобразование. § 5. Задача обращения преобразования Лапласа. § 6. Преобразование Лапласа как аналитическая функция. § 7. Отображение линейной замены переменного. § 8. Отображение интегрирования. § 9. Отображение дифференцирования. § 10. Отображение свертки. § 11. Приложения теоремы о свертке: интегральные соотношения. § 12. Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и начальными условиями (уравнение первого порядка, разложение рациональной функции на простейшие дроби, уравнения высших порядков, задачи со специальными начальными и краевыми условиями). § 13. Решение дифференциального уравнения для специальных видов правой части (возмущающая функция и импеданц, единичный толчок на входе, переходные — устанавливающиеся — процессы, синусоидальные функции на входе, поведение частоты, импульсные функции на входе). § 14. Системы дифференциальных уравнений. § 15. Разностное уравнение с начальными условиями. § 16. Поведение преобразования Лапласа на бесконечности. § 17. Комплексная формула обращения для абсолютно сходящегося преобразования Лапласа. § 18. Деформация пути интегрирования в комплексной формуле обращения. § 19. Вычисление комплексного интеграла обращения при помощи теории вычетов. § 20. Комплексная формула обращения для неабсолютно сходящегося преобразования Лапласа. § 21. Условия представимости в виде преобразования Лапласа. § 22. Определение начальной функции через разложение в ряд отображения. § 23. Равенство Парсеваля и отображение произведения. § 24. Асимптотическое поведение отображения на бесконечности (понятие асимптотического разложения, его получение для преобразования Лапласа). § 25. Асимптотическое поведение начальной функции на бесконечности (случай, когда отображение однозначно в окрестности особенностей, случай, когда в окрестности особенности с наибольшей вещественной частью отображение неоднозначно). § 26. Обыкновенные дифференциальные уравнения с полиномиальными коэффициентами (дифференциальное уравнение бесселевых функций, общее линейное однородное уравнение с линейными коэффициентами). § 27. Дифференциальные уравнения с частными производными (уравнение теплопроводности или диффузии: случаи бесконечной и конечной длины, асимптотическое разложение решения, телеграфное уравнение и асимптотическое разложение его решения.) § 28. Интегральные уравнения (линейное интегральное уравнение второго рода типа свертки, линейное интегральное уравнение первого рода типа свертки). В § 27 прикладная сторона вопроса развивается достаточно далеко, в остальных параграфах она только намечается. Из прикладных вопросов отметим еще рассмотрение в § 14 крутильных колебаний маховиков, насаженных на упругий вал. Книга прекрасно оформлена и снабжена предметным указателем. В. И. Левин

3927 К. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. С прилож. табл., сост. Р. Гершелем. Дёч Г. Перев. с нем. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 207 стр., илл., 5 р. 60 к.

Книга возникла в связи с проведенным в 1954 г. в Эссене семинаром по математической теории регулирования и предназначена для инженеров, применяющих в своей практике преобразование Лапласа. Специфика теории регулирования находит свое отражение в главах, посвященных разностным уравнениям (с непрерывным и дискретным аргументами), интегральным уравнениям и дифференциальным уравнениям с частными производными. Книга не содержит доказательств теоретических положений; однако выводы некоторых практически важных формул приводятся довольно подробно. Для читателя, не подготовленного к чтению математической литературы, на полях расставлены знаки предостережения, заимствованные из правил регулирования движения, которые должны обращать внимание читателя на содержащиеся в формулировках правил оговорки и тонкости. Конкретные физические примеры в книге не рассматриваются и вообще изложение достаточно сухое; исключением является только первый параграф книги, где разъясняется физический смысл преобразования Лапласа (связь с преобразованием Фурье), и последний параграф (§ 27), посвященный общим соображениям об устойчивости в связи с исследованием асимптотического поведения решения.

Текстовая часть книги, занимающая примерно 2/3 ее объема, состоит из 8 глав: 1. Определение и общие свойства преобразования Лапласа; 2. Правила выполнения операций при преобразовании Лапласа; 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения; 4. Разностные уравнения; 5. Уравнения в частных производных; 6. Интегральные уравнения и интегральные соотношения; 7. Вычисление оригинала по изображению; 8. Асимптотическое поведение функции и исследование устойчивости. Приложенные к тексту „Таблицы для преобразования Лапласа" состоят из кратких предварительных замечаний и двух частей: I. Операции и II. Соответствия. Таблица операций содержит 41 формулу, таблица соответствий (классифицированная по разделам: 1. Дробно-рациональные функции, 2. Некоторые иррациональные и трансцендентные функции, 3. Оригиналы, по-разному определенные в отдельных интервалах, 4. Решения дифференциальных уравнений) содержит в общей сложности 281 формулу. В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3928. Интегральное представление причинностных коммутаторов. Дайсон (Integral representations of causal commutators. Dyson Freeman J.), Phys. Rev., 1958, **110**, № 6, 1460—1464 (англ.)

Работа, относящаяся к квантовой физике, основывается на следующем предложении. Пусть дано четырехмерное пространство со скалярным произведением

$$xy = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3.$$

Класс C содержит все функции $f(g)$, трансформации Фурье которых $\tilde{f}(x)$ обращаются в нуль при $x^2 < 0$. На-

ходится представление для функции из C, обращающейся в нуль в некоторой области R пространства q (также четырехмерного). С этой целью пространства x и q расширяются до шестимерных, причем оказывается, что каждая функция $f(q)$, трансформация Фурье которой $\tilde{f}(x)$, $x^2<0$, имеет единственное расширение, которое является решением шестимерного волнового уравнения.

Л. Я. Цлаф

3929. Применение метода стационарной фазы в теории диффракции оптических изображений. Шако (Application de la méthode de la phase stationnaire dans la théorie de la diffraction des images optiques. Chako Nicholas), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 5, 580—582 (франц.)

3930. Об операторе сдвига и его применении к статике балок. Дробот С., Микусинский Я., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 73—92

В первой части работы дается следующее определение оператора сдвига: пусть $\{H_\lambda(t)\}$ — функция, равная нулю на отрезке $0\leqslant t<\lambda$ и равная единице при $\lambda\leqslant t<\infty$ (функция скачка); оператором сдвига называется оператор $h^\lambda = s\{H_\lambda(t)\}$, где s — оператор дифференцирования (РЖМат, 1957, 2475).

Далее доказывается теорема: Если $\{f(t)\}$ — произвольная (локально суммируемая) функция, то

$$h^\lambda\{f(t)\} = \begin{cases} 0 \text{ при } 0\leqslant t<\lambda, \\ f(t-\lambda) \text{ при } 0\leqslant\lambda<t. \end{cases}$$

Дается несколько примеров, исследуется аппроксимация оператора сдвига посредством функции, а также рассматриваются различные интерпретации оператора сдвига.

Вторая часть работы содержит применения к статике балок. Здесь показывается, что сосредоточенную в точке λ балки силу P можно представить оператором Ph^λ, сосредоточенный момент μ — оператором $\mu s h^\lambda$ и т. п. Приводится операторная форма записи изгибающего момента, условий равновесия и уравнения упругой линии.

Решается несколько примеров на вычисление реакций опор для статически неопределимых случаев.

Я. С. Уфлянд

3931. Вывод самых выгодных парциальных давлений для k-ступенчатой компрессии. Бошек (Odvození nejvýhodnějšího poměru dělících tlaků pro k-stupňovou kompresi. Bošek Bruno), Apl. mat., 1957, **2**, № 1, 47—57 (чешск.; рез. русск., нем.)

Компрессная работа L k-ступенчатой компрессии равна

$$L = a\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right], \qquad (1)$$

где a, n — постоянные, зависящие от физических свойств газа, P_1 — давление всасывания, P_{k+1} — противодавление k-й ступени, P_i $(i=2, \ldots, k)$ — парциальные давления отдельных ступеней. Задача состоит в том, чтобы при фиксированных a, n, P_1, P_{k+1} найти значения $\bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k$ так, чтобы работа L достигла минимального значения в области F, определенной неравенствами $P_1\leqslant P_2\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant P_k\leqslant P_{k+1}$.

Поставленная таким образом задача решается обычным способом. Находится точка $(\bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k)$, в которой достигается локальный минимум. Чтобы доказать, что в точке $(\bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k)$ функция $L(P_1, \ldots, P_k)$ достигает наименьшего значения, автор вычисляет значения всех экстремумов в точках границы области F. Это можно было бы сделать более просто, но автор избрал более длинный путь, отметив, что исследование экстремумов в точках границы само по себе имеет техническое значение.

Статья написана сжато и ясно. В некоторых местах опечатки делают текст менее понятным. Теоретическая ценность статьи повышается тем, что в ней доказано соотношение (1), которое уже в течение целого ряда лет применялось в технике.

Z. Vorel

3932. Дробь Золотарева и ее применение для расчета фильтров по характеристическим параметрам. Уфельман А. Ф., Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1958, вып. 158, 387—408

Указан ряд известных свойств дробей Золотарева, т. е. рациональных функций, являющихся решением так называемой третьей задачи Е. И. Золотарева и получаемых первым главным преобразованием эллиптических функций.

Для известных фильтров с чебышевской характеристикой собственного затухания даны подробные формулы для расчета характеристической постоянной передачи и точные и приближенные выражения для минимума собственного затухания в полосе запирания.

Э. Я. Гринберг

3933. Решение переходных проблем с помощью операционного исчисления. Часть 1. Говард (Solving transient problems by the operational calculus. Simplified treatment for electrical circuits. Part 1. Howard P. R.), Electr. Times, 1958, **134**, № 3481, 157—160 (англ.)

3934. Осесимметричная электростатическая задача для проводника, имеющего форму полубесконечной трубы с тонкими стенками. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Ж. техн. физ., 1958, **28**, № 4, 792—800

Ставится задача о распределении потенциала вблизи проводника, имеющего форму тонкостенного полубесконечного цилиндра (трубы), внесенного в произвольное аксиально-симметричное внешнее поле. Искомый потенциал представляется в виде

$$u = u_0 + v,$$

где u_0 — потенциал первичного поля, v — потенциал зарядов, индуцированных на поверхности проводника.

Определение потенциала $v = v(r, z)$ приводится к нахождению гармонической функции по граничному условию

$$v|_s = -u_0|_s = f(z).$$

Предварительное решение получается для частного случая $f(z) = e^{-iaz}$

$$v_a = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda a)}e^{-i\lambda z}\,d\lambda,\quad r\leqslant a;$$

$$v_a = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\frac{K_0(|\lambda| r)}{K_0(|\lambda| a)}e^{-i\lambda z}\,d\lambda,\quad r\geqslant a.$$

Неизвестная функция $A(\lambda)$ определяется из парных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)K(\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda = 0,\quad z<0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{A(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\lambda-\alpha}\right\}e^{-i\lambda z}d\lambda = 0,\quad z>0, \qquad (1)$$

где $K(w) = \{I_0(wa)K_0(|w|a)\}^{-1}$ представлено в виде произведения

$$K(w) = K_+(w)K_-(w).$$

K_+ и K_- — регулярные функции, не имеющие нулей в плоскости с разрезом вдоль отрицательной (для K_+) и положительной (для K_-) мнимой оси.

Это разложение решения уравнений (1) приводит к формуле

$$A(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{K_-(\alpha)}{K_-(\lambda)(\lambda-\alpha)}.$$

В качестве примера определяется поле точечного заряда q, помещенного на оси проводящей полубесконечной трубы. М. К. Номоконов

См. также: 3464, 3626—3634, 3658, 3661

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

3935. О единственном продолжении линейных функционалов в линейных пространствах. Агаев Г. Н., Гасанов К. Г., Худавердиев К. И., Якубов С. Я., Азәрбҹан ССР Элмләр Акад. хәбәрләри. Физ.-техн. вә кимя элмләри сер. Изв. АН АзербССР. Сер. физ-техн. и хим. н., 1958, № 3, 3—11 (рез. азерб.)

Пусть $p(x)$ — полуаддитивный положительно однородный функционал ($p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, $p(t, x) = tp(x)$ при $t > 0$), определенный на вещественном линейном пространстве E, а $f(x)$ — вещественный аддитивный и однородный функционал, определенный на подпространстве E_0 пространства E и удовлетворяющий условию:

$$f(x) \leqslant p(x) \text{ на } E_0. \qquad (1)$$

Мазуром (Mazur S. Studia math, 1933, 4) обнаружены важные свойства пределов:

$$\Phi_\pm(x) = \lim_{h\to\pm 0}\frac{p(x_0+hx)-p(x_0)}{h},$$

при всех $x \in E$ и фиксированном $x_0 \in E$.

Авторами доказываются:

1) Для единственности продолжения $f(x)$ с E_0 на все E (до линейного функционала) с сохранением неравенства (1) необходимо выполнение равенства $\Phi_-(x) = \Phi_+(x)$ для всякого ненулевого $x_0 \in E$.

2) Если в (1) достигается равенство при некотором $x^* \in E_0$, то для единственности продолжения $f(x)$ с E_0 на все E (до линейного функционала) с сохранением (1) достаточно выполнение равенства $\Phi_-(x) = \Phi_+(x)$ для всякого ненулевого $x_0 \in E$.

Аналогичные утверждения доказываются также для случая комплексных $f(x)$, E и симметрично выпуклого $p(x)$.

Утверждения 1) и 2) обобщают часть результатов заметки референта (Докл. АН АзербССР, 1950, 6, № 10). М. Л. Расулов

3936. Производные функций со значениями в линейных топологических пространствах. Эдуардс (Derivatives of vector-valued functions. Edwards R. E.), Mathematika, 1958, 5, № 9, 58—61 (англ.)

Пусть E — линейное топологическое локально выпуклое пространство. E называется квазиполным, если всякое ограниченное замкнутое подмножество в нем полно. Говорят, что функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, со значениями в локально выпуклом пространстве E, локально удовлетворяет условию Липшица, если для всякой непрерывной полунормы p в E и всякого компакта K на вещественной оси найдется число $m \geqslant 0$ такое, что

$$p(f(t') - f(t'')) \leqslant m|t' - t''|, \quad t', t'' \in K.$$

Если $f(t)$ — обычная скалярная функция, то под p понимается модуль. Производной $f(t)$ называется предел в смысле топологии E выражения

$$\frac{1}{h}\left[f(t+h) - f(t)\right]$$

при $h \to 0$.

Теорема. Пусть $f(t)$ — функция, заданная на вещественной оси со значениями в квазиполном отделимом локально выпуклом пространстве E. Если каждая скалярная компонента $f_x(t)$ ($f_x = (f, x)$; $x \in E'$; E' — сопряженное к E) имеет производную порядка p ($p \geqslant 0$), локально удовлетворяющую условию Липшица, то $f(t)$ имеет производные порядка p в E, также локально удовлетворяющие условию Липшица.

Доказательство проводится индукцией по p и основывается на следующей простой лемме:

Выражение $(a-b)^{-1}[\{g(t+a)-g(t)\}/a - \{g(t+b)-g(t)\}/b]$ остается ограниченным для $0 < |a| < 1$, $0 < |b| < 1$, $a \neq b$, $t \in K$, где K — некоторый компакт, а $g(t)$ имеет производную, локально удовлетворяющую условию Липшица; здесь $g(t)$ — скалярная функция.

Отмечается, что в теореме исходная топология в E может быть заменена любой другой топологией, сохраняющей прежнее сопряженное пространство E' (т. е. сохраняющей ту же топологию Макки (G. W. Mackey) (РЖМат, 1956, 3163).

В заключение проводится сравнение теоремы автора и сходного результата Л. Шварца (Schwartz L., Ann. Inst. Fourier, 1950, 2, 17 — 18) для случая, когда E есть пространство всех непрерывных функций на некотором компакте.

Примечание референта. При доказательстве автор неоднократно использует сильную ограниченность слабо ограниченных множеств, ссылаясь при этом на теорему Банаха-Штейнгауза. На самом деле последняя теорема в полном объеме здесь не нужна, так как указанный факт устанавливается непосредственно; сделанных же автором предположений относительно топологии E недостаточно для выполнения условий этой теоремы (РЖМат, 1956, 3163). А. М. Вершик

3937. О вполне непрерывности сопряженного оператора. Райков Д. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 446—449

Пусть X и Y — локально выпуклые пространства. Линейное отображение X в Y называется вполне непрерывным (вполне ограниченным, ограниченным), если в X существует окрестность нуля, образ которой в Y имеет бикомпактное замыкание (вполне ограничен, ограничен).

Локально выпуклое пространство называется пространством типа (M_0), если в нем каждое ограниченное множество вполне ограниченно. Локально выпуклое пространство называется пространством типа (N), если в нем каждое вполне ограниченное множество A усиленно вполне ограниченно, т. е. для каждого A найдется ограниченное B такое, что при любом $\varepsilon > 0$ множество A покрывается конечным числом сдвигов множества εB.

Доказаны две теоремы, обобщающие теорему Шаудера о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному в пространствах Банаха: Отображение φ', сопряженное к ограниченному (и, тем более — к вполне непрерывному) отображению φ пространст,

ва X типа (M_0) в любое локально выпуклое пространство Y, вполне непрерывно. Отображение φ', сопряженное к вполне ограниченному (и, тем более, — к вполне непрерывному) отображению φ любого локально выпуклого порстранства X в пространство Y типа (N) вполне непрерывно. Обратные теоремы также верны.

Исследован объем класса пространств типа (N).

М. И. Кадец

3938. Разложение положительно определенных ядер по обобщенным собственным функциям. Дифференцируемость спектральной функции гипоэллиптического оператора. Морен (Entwicklung positiv definiter Kerne nach Eigendistributionen. Differenzierbarkeit der Spektralfunktion eines hypoelliptischen Operators. Maurin K.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 3, 149—155, XII (нем.; рез. русск.)

Пусть Ω_n — n-мерное дифференцируемое многообразие и $S = C_0^\infty(\Omega_n)$ — линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Пусть (u,v) — эрмитова положительно определенная билинейная форма на $S \times S$, непрерывная в топологии Шварца $D^m(\Omega_n)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$. По теореме Шварца (u,v) определяет единственную обобщенную функцию K порядка $m < \infty$, определенную на $\Omega_n \times \Omega_n$.

В работе доказана следующая теорема: Пусть $(\,,)$ — скалярное произведение на $C_0^\infty(\Omega_n)$ и K — соответствующее положительное определенное ядро: $(u,v) = \langle Ku, v\rangle$. Пусть L — симметрический относительно скалярного произведения $(\,,)$ оператор, обладающий самосопряженным расширением $A = A^* \supset L$. Тогда: а) Ядро K можно разложить по обобщенным собственным функциям

$$K(x,y) = \int_\Lambda \Theta(x,y;\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

где Λ — спектр оператора A и μ — положительная мера на Λ. б) Если L — гипоэллиптический оператор, т. е. если каждая обобщенная собственная функция является достаточно регулярной классической собственной функцией, то уравнения

$$L_x'\,\Theta(x,y;\lambda) = \overline{L'}_y\,\Theta(x,y;\lambda) = \lambda\,\Theta(x,y;\lambda)$$

выполняются в обычном смысле; здесь L' — сопряженный оператор

Частным случаем является теорема Березанского (РЖМат, 1957, 7065): K — непрерывное ядро и L — эллиптический дифференциальный оператор и теорема Гординга (РЖМат, 1957, 3153): $K(x,y) = \delta(x-y)$ (δ — функция Дирака), L — эллиптический дифференциальный оператор.

Б. М. Левитан

3939. Полурефлексивные локально выпуклые пространства. Кёте (Semireflexive locally convex spaces. Köthe G. M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 82 (англ.) См. также РЖМат, 1956, 2334.

3940. Норма вещественного линейного преобразования в пространстве Минковского. Тейлор (The norm of a real linear transformation in Minkowski space. Taylor Angus E.), Enseign. math., 1958, **4**, № 2, 101—107 (англ.)

Через $l^p(n)$ $(p \geqslant 1)$ обозначается пространство векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с нормой $\| x \| = \left(\sum_i |\xi_i|^p\right)^{1/p}$

Матрица (a_{jk}) $(j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n)$ определяет некоторое линейное преобразование A пространства $l^p(n)$ в пространство $l^q(m)$. Норма преобразования A обозначается через $\| A \|_r$, если пространство $l^p(n)$ предполагается вещественным, и через $\| A \|_c$, если пространство $l^p(n)$ предполагается комплексным.

Автор доказывает, что если числа a_{jk} $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ вещественны и $q \geqslant p \geqslant 1$, то $\| A \|_c = \| A \|_r$.

В заключение автор отмечает, что этот результат содержится в статье М. Рисса (Acta math., 1927, **49**, 465—497), однако там имеется лишь недостаточно ясный набросок доказательства.

А. С. Маркус

3941. Пространства Дирихле. I. Элементарный случай. Бёрлинг, Дени (Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire. Beurling A., Deny J.), Acta math., 1958, **99**, № 3-4, 203—224 (франц.)

Преобразование T комплексной плоскости называется сжатием, если оно не увеличивает расстояния между ее точками ; сжатие называется нормальным, если оно оставляет начало неподвижным.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, на котором существует положительная радонова мера ξ (всякое открытое непустое множество из X имеет в ξ строго положительную меру). Пусть $D = D(X,\xi)$ — полное гильбертово пространство комплекснозначных функций, определенных на X почти всюду в смысле меры ξ и суммируемых на каждом компакте из X. Это пространство называется пространством Дирихле, если выполнены следующие аксиомы: 1) для каждого компакта $K \subset X$ существует конечное число $A(K)$ такое, что для любого $u \in D$ справедливо неравенство

$$\int_K |u(x)|\, d\xi(x) \leqslant A(K)\, \| u \|;$$

2) $C \cap D$ плотно в C и в D, где C — пространство непрерывных в X комплекснозначных функций с компактными носителями; 3) если T — нормальное сжатие комплексной плоскости и $u \in D$, то $Tu \in D$ и $\| Tu \| \leqslant \| u \|$.

В реферируемой статье рассматривается случай, когда X состоит из конечного числа точек и мера множества, состоящего из одной точки, равна 1. Если X состоит из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то определенная на X функция $u(x)$ принимает n значений $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)$. Множество таких функций обозначается через $\mathfrak{E}$; это множество изоморфно n-мерному векторному пространству. Символом $\int u(x)dx$ обозначается сумма значений функции $u(x)$; если функция $A(x,y)$ определена на $X \times X$, то $\iint A(x,y)dxdy$ означает сумму всех чисел вида $A(x_i, x_j)$.

Каждой эрмитовой форме H можно привести в соответствие функцию $\Delta(x,y)$ такую, что

$$H(u) = \iint \Delta(x,y) u(x) \overline{u(y)}\, dxdy;$$

оператор $\Delta u = \int \Delta(x,y) u(y) dy$ называется лапласианом, присоединенным к форме H. Эрмитова форма H называется формой Дирихле, если $H(Tu) \leqslant H(u)$, каково бы ни было нормальное сжатие T. Устанавливаются некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы H была формой Дирихле; выясняется, в частности, что такая форма всегда неотрицательна. Нормой (полунормой) Дирихле называется квадратный корень из положительно определенной (произвольной) формы Дирихле. Пространство Дирихле наново определяется как пространство $\mathfrak{E}$, снабженное какой-либо нормой Дирихле.

Вводится ряд новых понятий, в терминах которых формулируются некоторые признаки, необходимые и достаточные для того, чтобы положительно определенная форма порождала пространство Дирихле. Приведем один такой признак. Пусть H — гильбертово пространство, полученное из $\mathfrak{E}$ введением некоторой нормы, и Δ — соответствующий присоединенный лапласиан. Элемент $u \in H$ называется чистым потенциалом, если $\Delta u \geqslant 0$. Пусть H таково, что все его чистые потенциалы вещественны. Говорят, что удовлетворен принцип выметания, если, ка-

ковы бы ни были чистый потенциал u и подмножество $E \subset X$, существует чистый потенциал u' такой, что: (а $\Delta u' = 0$ вне E; б) $u'(x) \leqslant u(x), x \in X$; в) $u'(x) = u(x), x \in E$. Функция $u'(x)$ называется выметенным потенциалом на E по отношению к $u(x)$. Говорят также, что удовлетворен принцип равновесия, если для любого $E \subset X$ существует вещественная функция u такая, что $u(x) = 1$, $\Delta u(x) \geqslant 0$ при $x \in E$ и $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$, $\Delta u(x) = 0$, если $x \notin E$. Доказывается что H есть пространство Дирихле тогда и только тогда, когда все чистые потенциалы вещественные неотрицательные и удовлетворены принцип выметания и принцип равновесия. Другой признак связан с введенным в статье понятием подмарковского оператора: так называется оператор A такой, что $Au \leqslant 1$, если $u \leqslant 1$. Устанавливается, что H есть пространство Дирихле тогда и только тогда, когда оператор $(I + \lambda\Delta)^{-1}$ существует и является подмарковским при любом $\lambda > 0$.

Пусть H—гильбертово пространство, полученное из $\mathfrak{C}$ введением нормы при помощи некоторой положительно определенной формы, и пусть Δ— соответствующий присоединенный лапласиан. Задачей Дирихле называется задача о построении функции $u(x)$ по данным $u(x) = f(x)$, $x \in E$ и $\Delta u(x) = 0$, $x \notin E$, где E—некоторое подмножество X. Задача Дирихле имеет единственным решением функцию наименьшей нормы, совпадающую с $f(x)$ на E. Это решение можно представить в виде

$$u(x) = \int P(x,y) f(y)\, dy.$$

Полагая $P(x,y) = 0$ при $y \notin E$, можно считать $P(x,y)$ определенным в $X \times X$. Доказывается, что если H есть пространство Дирихле, то $P(x,y) \geqslant 0$, $\int P(x,y)\, dy \leqslant 1$; если $u(x)$ — чистый потенциал, то $u'(x) = \int P(x,y)\, u(y)\, dy$ есть выметенный на E потенциал по отношению к потенциалу $u(x)$. С. Г. Михлин

3942. Интегрирование функций с векторными значениями. Сноу (On integration of vector-valued functions. Snow D. O.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 399—412 (англ.)

Новое определение интеграла от функции $x(\alpha)$, где α — вещественный аргумент, а значения $x(\alpha)$ принадлежат пространству Банаха.

Сначала определение Грэвса (Graves L. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1927, **29**, 163—177) обобщается на случай интегрирования по замкнутому множеству на вещественной оси. Пусть P — такое множество, лежащее в $[a, b]$, π — разбиение $[a, b]$ на части $\Delta\alpha_i = (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$. Тогда L называется (G)-интегралом функции $x(\alpha)$ по множеству P, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, так что для всех разбиений π с рангом, меньшим δ, будет

$$\| \sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)\, m(P \cap \Delta\alpha_i) - L \| < \varepsilon \quad (\xi_i \in P \cap \Delta\alpha_i).$$

Обозначение:

$$L = (G) \int_P x(\alpha)\, d\alpha.$$

Функция $x(\alpha)$ называется P_ε -измеримой на множестве E, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество P, так что $P \subset E$, $m(E \setminus P) < \varepsilon$ и $x(\alpha)$ (G)-интегрируема на P.

Основное определение: I называется обобщенным интегралом Грэвса ((G^*)-интегралом) функции $x(\alpha)$ по множеству E, если: 1) $x(\alpha)$ P_ε -измерима на E, 2) для каждого числа $\eta_1 > 0$ существует число $\varepsilon > 0$, так что для каждого замкнутого множества P, удовлетворяющего условиям, сформулированным в предыдущем абзаце, будет

$$\| (G) \int_P x(\alpha)\, d\alpha - I \| < \eta_1.$$

Устанавливается, что (G^*)-интеграл совпадает с интегралом Биркгофа (Birkhoff G., Trans. Amer. Math. Soc., 1935, **38**, 357—378) и, следовательно, шире интеграла Бохнера (Bochner S., Fundam. math., 1933, **20**, 262—276). М. К. Гавурин

3943. Безусловная сходимость в пространствах, сопряженных с банаховым пространством. Алексевич (On unconditional convergence in spaces conjugate to a Banach space. Alexiewicz A.), Bull. Soc. amis sci. et lettres Poznań, 1956—1957(1958), **B14**, 5—8 (англ.)

Пусть $X = \{x\}$ — банахово пространство, сопряженное с банаховым пространством $Z = \{z\}$; $\Xi = \{\xi\}$ — пространство, сопряженное с X, $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{x}\}$ — пространство, сопряженное с Ξ. И. М. Гельфанд (Матем. сб., 1938, **4**, 235—284) ввел следующие два определения безусловной сходимости ряда с членами из X: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называется безусловно сходящимся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(z)| < \infty$ (соответственно $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi(x_n)| < \infty$) для любого $z \in Z$ (соответственно $\xi \in \Xi$). В первом случае (соответственно во втором) сумма $x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(z)$ (соответственно $\mathfrak{x}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(x_n)$) определяет линейный функционал на Z (соответственно на Ξ), т. е. некоторый элемент из X (соответственно $\mathfrak{X}$). В реферируемой статье строится пример, показывающий, что хотя оба определения безусловной сходимости эквивалентны (как установлено И. М. Гельфандом), суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, полученные с помощью этих определений, могут быть отличны друг от друга; в частности, когда Z слабо полно, обе суммы, очевидно, совпадают. Показано, что аналогичное положение имеет место и в теории интегрирования функций вещественного аргумента, принимающих векторные значения (теории интегралов Гельфанда—Данфорда).

С. Н. Крачковский

3944. Несколько замечаний о сопряженных пространствах, содержащих подпространства, изоморфные пространству c_0. Бессага, Пелчинский (Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. Bessaga C., Pełczyński A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 4, 249—250, XIX, XX, (англ.; рез. русск.)

Пусть X — банахово пространство, X^* — его сопряженное.

Теорема. Следующие условия эквивалентны: 1) пространство X^* содержит подпространство, изоморфное c_0, 2) X^* содержит подпространство, изоморфное m, 3) пространство X содержит дополняющее подпространство, изоморфное l, 4) существует линейное отображение X на l. Обозначения пространств c_0, m, l — общепринятые. Формулировка эквивалентности первых двух условий имеется в более ранней работе одного из авторов (РЖМат, 1958, 7890).

Приводится ряд следствий из указанной теоремы. Например:

Следствие 1. Если пространство X не содержит дополняющего подпространства, изоморфного l, тем более, если каждое ограниченное множество в X условно

слабо компактно, то в X каждый слабо безусловно сходящийся ряд сходится безусловно.

Следствие 5. Если пространство X^* содержит подпространство, изоморфное c_0, то хотя пространства X^* и $X^* \times c_0$ не изоморфны, однако их первые сопряженные пространства изоморфны.

Доказательства не приводятся.

Примечание референта. В утверждении следствия 2 — опечатка. Должно быть X^* вместо X.

Л. В. Флоринская

3945. Об измеримости функции, которая встречается в одной статье Занена. Люксембург (On the measurability of a function which occurs in a paper by A. C. Zaanen. Luxemburg W. A. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 3, 259—265; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 259—265 (англ.)

Пусть (X, Λ, μ) — пространство с полной мерой (Халмош П., Теория меры, М., Изд-во ин. лит. 1953; РЖМат, 1954, 3653). На множестве всех неотрицательных измеримых на X функций $u = u(x)$ вводится „функция длины" $\lambda = \lambda(u)$ (РЖМат, 1954, 4489). Множество всех функций длины обозначается через $L(X, \Lambda, \mu)$. Функция длины λ называется абсолютно непрерывной, если она удовлетворяет условию: если $u_1(x) \geqslant u_2(x) \geqslant \ldots$, причем $\inf u_n(x) = 0$ и $\lambda(u_1) < \infty$, то $\inf \lambda(u_n) = 0$. Для комплексной измеримой на X функции $f(x)$ по определению полагается $\lambda(f) = \lambda(|f|)$.

Пусть $(X_1 \times X_2, \Lambda_1 \times \Lambda_2, \mu_1 \times \mu_2)$ — произведение пространств (X_1, Λ_1, μ_1) и (X_2, Λ_2, μ_2) с σ-конечными и полными мерами. Основным результатом статьи является следующая теорема: Если $f(x, y)$ — произвольная $\mu_1 \times \mu_2$-измеримая (комплексная) функция, определенная на произведении $X_1 \times X_2$ ($x \in X_1$, $y \in X_2$) и $\lambda \in L(X_2, \Lambda_2, \mu_2)$, то функция $t(x) = \lambda(f(x, y)) = \lambda(f_x(y))$ является μ_1-измеримой функцией от x.

Из этой теоремы вытекает измеримость рассмотренной Заненом (Zaanen A. C., Compositio math, 1952, **10**, f 1, 56—94; см. также Zaanen A. C. Linear analysis, Amsterpam, Groningen, New York, 1953, Ch. 13, § 4, РЖМат, 1957, 5736) функции $t(x) = \|T(x, y)\| = \|T_x(y)\|$, где $T(x, y)$ — ядро интегрального оператора, $\|\ \|$ — норма в произвольном пространстве Орлича.

Результат автора обобщает также теорему, доказанную Эллисом (РЖМат, 1959, 572), поскольку последний налагал на функцию длины λ дополнительные требования.

Приведем еще предложения, относящиеся к теории функции длины, которые используются при доказательстве основной теоремы. При этом предполагается, что (X, Λ, μ) — пространство с вполне σ-конечной мерой, и употребляются обозначения: $c_E(x)$ — характеристическая функция множества E, $E \in \Lambda$; λ^* — функция длины, сопряженная к λ (РЖМат, 1954, 4489). Все рассматриваемые множества и функции предполагаются μ-измеримыми.

1. Если $\lim f_n(x) = f(x)$ почти всюду, то

$$\lambda(f) \leqslant \lim\inf \lambda(f_n).$$

2. Если λ абсолютно непрерывна и $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$ на каждом множестве конечной меры, причем $\lambda(\sup |f_n(x)|) < \infty$, то $\lim \lambda(f - f_n) = 0$.

3. Каждому $\lambda \in L(X, \Lambda, \mu)$ соответствует разложение множества X на три попарно непересекающихся подмножества X^0, X^∞ и X', таких, что (I) $\lambda(c_{X^0}) = 0$; (II) если $E \subset X^\infty$, $\mu(E) > 0$, то $\lambda(c_E) = \infty$; (III) $\lambda(f) = \lambda(f c_{X' + X^\infty})$ для любой f, и если $\lambda(f) = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на $X' + X^\infty$; (IV) если $\lambda(f) < \infty$, то $f(x) = 0$ почти всюду на X^∞; (V) $X' = \lim X_n'$, где $X_1' \subset X_2' \subset \ldots$, $0 < \mu(X_n') < \infty$, причем $\lambda(c_{X_n'}) < \infty$ и $\lambda^*(c_{X_n'}) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Множества X^0, X^∞ и X' определяются однозначно с точностью до множеств меры нуль.

4. Если $\lambda \in L(X, \Lambda, \mu)$, то существует последовательность $\{\lambda_n\}$ абсолютно непрерывных функций длины таких, что $\lambda_1(f) \leqslant \lambda_2(f) \leqslant \ldots$ и $\lim \lambda_n(f) = \lambda(f)$ для всех f.

При доказательстве предложения 4 используется конструкция, введенная ранее (РЖМат, 1957, 614).

И. В. Шрагин

3946. Направленные множества и обобщенные пределы. Грабиэль (Conjuntos dirigidos y limites generalizados. Grabiel Federico), Rev. Soc. cubana cienc. fís. y mat., 1956, **3**, № 5, 139—148 (исп.)

Множество элементов $\{\vec{C}\}$ называется направленным, если для его элементов установлено соотношение следования $\langle$, которое удовлетворяет условиям:

I. Если c_1, c_2, c_3 — элементы множества $\{\vec{C}\}$ и $c_1 \langle c_2$, $c_2 \langle c_3$, то $c_1 \langle c_3$.

II. Если c_1 и c_2 — элементы $\{\vec{C}\}$, то всегда существует в $\{\vec{C}\}$, элемент c_m такой, что $c_1 \langle c_m$ и $c_2 \langle c_m$.

Дается понятие предела функции, заданной на направленном множестве $\{\vec{C}\}$, значения которой — элементы нормированного пространства. Устанавливается критерий сходимости Коши и ряд других предложений.

Э. Апарисио

3947. Об одном расширении линейных функционалов в некоторых пространствах числовых последовательностей и в пространстве непрерывных функций. Зуховицкий (Про одне розширення лінійних функціоналів в деяких просторах числових послідовностей та в просторі неперервних функцій. Зуховицький С. І.), Наук. зап. Луцький держ. пед ін-т, 1958, **6**, 3—19 (укр.)

Приводятся доказательства некоторых теорем, формулировки которых были опубликованы ранее (РЖМат, 1957, 1597, 7159).

Я. Б. Рутицкий

3948. Заметка о решении некоторых операторных уравнений. Албукерки (Nota sobre a resoluçao de algumas equaçoes operacionais. Albuquerque L. M. de), Rev. Fac. ciênc. Univ. Coimbra, 1957, **26**, 104—108 (порт.)

Пусть E — нормированное векторное пространство над телом Ω и $(E \to E)$ — нормированное кольцо линейных операторов, определенных в E. Доказывается, что если $A \in (E \to E)$, а $\mu \in \Omega$, причем $\|A\| < |\mu|$, то оператор $A + \mu I$ имеет обратный $(A + \mu I)^{-1}$ с нормой $\|(A + \mu I)^{-1}\| < \dfrac{1}{|\mu| - \|A\|}$.

Этот результат применяется для решения операторного уравнения

$$Ax + \mu Ix = y; \qquad (y \neq \theta),$$

решение его дается формулой

$$x = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{A}{\mu}\right)^k y.$$

Оценивается остаток ряда. Аналогично рассматриваются далее операторные уравнения

$$A^2x + \mu Ax = y \qquad (y \neq \theta)$$

и

$$A^2x + \mu Ax + \nu Ix = y.$$

В последнем случае предполагается существование A^{-1}.

Э. Апарисио

3949. Положительные функционалы на алгебрах. Ся До-шин, Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 233—235

Пусть A — коммутативная алгебра над полем действительных чисел с единичным элементом e, $\mathfrak{M}$ — пространство всех гомоморфизмов M алгебры A в поле действительных чисел, удовлетворяющих условию $e(M)=1$. В $\mathfrak{M}$ задана слабая топология с помощью семейства всех функций $x(M)$, $x\in A$. Элемент $x\in A$ называется неотрицательным, если для любого гомоморфизма $M\in\mathfrak{M}$ число $x(M)\geqslant 0$. Линейный функционал F на алгебре A называется положительным, если $F\not\equiv 0$ и $F(x)\geqslant 0$ для любого неотрицательного элемента $x\in A$.

Теорема. Пусть F — линейный функционал на алгебре со счетным числом образующих. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Функционал F положителен.

2. На множестве $\mathfrak{M}$ существует такая положительная мера $\mu(M)$, что $F(x)=\int_{\mathfrak{M}} x(M)d\mu(M)$.

3. Для каждого действительного положительного полинома $p(t_1,\ldots,t_n)$ четвертой степени и любых $x_1, x_2,\ldots, x_n\in A$ имеет место неравенство $F(p(x_1,\ldots,x_n))\geqslant 0$.

И. С. Иохвидов

3950. Кольцо $C(X, R)$ как подкольцо кольца всех действительнозначных функций. Перселл (The ring $C(X, R)$ considered as a subring of the ring of all real-valued functions. Pursell Lyle E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 820—821 (англ.)

Пусть R^X обозначает полуупорядоченное кольцо всех функций на X, принимающих действительные значения.

Теорема. Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства и при некотором изоморфизме R^X на R^Y подкольцо $C(X, R)$ отображается на $C(Y, R)$ (Обозначения см. реф. 3951). Тогда X гомеоморфно Y. Теорема остается в силе, если кольца $C(X, R)$ и $C(Y, R)$ заменить кольцами $C^*(X,R)$ и $C^*(Y, R)$.

З. Л. Лейбензон

3951. Замечание об изоморфизме $C(X,R)$ и $C^*(X, R)$. Перселл (A note on isomorphisms of $C(X, R)$ and $C^*(X, R)$. Pursell Lyle E.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 1, 47—48 (англ.)

Для топологического пространства X через $C(X, R)$ обозначим кольцо всех непрерывных, а через $C^*(X, R)$ — ограниченных непрерывных функций на X, имеющих действительные значения. Пусть для топологических пространств X и X' существует изоморфизм φ кольца $C(X,R)$ на $C(X',R)$.

Автор доказывает, что $\sup f=\sup f'$, $\inf f=\inf f'$, если $f'=\varphi(f)$, и что при изоморфизме φ кольцо $C^*(X', R)$ изоморфно соответствует кольцу $C^*(X, R)$.

Пусть пространства X и X' вполне регулярны и удовлетворяют первой аксиоме счетности. Так как из изоморфности колец $C^*(X, R)$ и $C^*(X',R)$ следует гомеоморфность пространств X и X', то автор тем самым доказал, что гомеоморфность пространств X и X' является следствием изоморфности колец $C(X, R)$ и $C(X',R)$. З. Л. Лейбензон

3952. Некоторые теоремы о двойственности. Прайс (Some duality theorems. Price J. J.), Illinois J. Math., 1957, **1**, № 3, 433—445 (англ.)

Счетное семейство F матричнозначных функций f_i, определенных на пространстве $S(f_i\colon S\to G_i$, где G_i — некоторая группа матриц над полем комплексных чисел), называется кронекеровской системой, если F замкнуто относительно операции комплексного сопряжения, а линейная оболочка F (где под сложением понимается прямая сумма матриц) замкнута относительно операции прямого произведения (т.е. для любых i, j найдется неособенная постоянная матрица A_{ij} такая, что $A_{ij}^{-1}(f_i\times f_j)A_{ij}$ есть прямая сумма некоторого числа элементов из F). Кронекеровская система считается неприводимой, если все совокупности G_i неприводимы.

В статье изучаются условия, при которых кронекеровская система функций является дуальным объектом (по Таннака) для некоторой компактной группы.

Основной результат: Пусть $\{R_1, R_2,\ldots\}=R$ — неприводимая кронекеровская система на пространстве S, в котором задана вполне аддитивная мера μ, и при этом: а) $R_i\colon S\to U_i$, где U_i — унитарная группа порядка n_i; б) совокупность всех коэффициентов $r^i_{\alpha\beta}(s)$ матриц $R_i(s)$ есть ортогональная система по отношению к μ.

Тогда существует такое отображение $\varphi\colon S\to\mathfrak{M}$ в дуальную группу $\mathfrak{M}$, что: 1) индуцированная мера совпадает с мерой Хара на группе $\mathfrak{M}$, и при этом множество всех $\varphi(S)$ оказывается плотным в $\mathfrak{M}$; 2) функции $R_i(s)$ продолжаются на все $\mathfrak{M}$ и образуют полную систему неэквивалентных неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{M}$; 3) φ взаимнооднозначно тогда и только тогда, когда функции из R разделяют точки S.

Доказательство полноты системы $\{r^i_{\alpha\beta}\}$ опирается на аппроксимационную теорему Стоуна — Вейерштрасса. Условие б) можно заменить требованием неэквивалентности R_i и R_j при $i\neq j$. Если опустить условие неприводимости, то из полноты $\{r^i_{\alpha\beta}\}$ следует, что все неприводимые представления группы $\mathfrak{M}$ содержатся в R как инвариантные компоненты.

Если кольцо $\sigma(R)$ — линейная оболочка всех $r^i_{\alpha\beta}$ — порождается конечным числом образующих, то дуальная группа конечномерна. Рассматривается также случай конечной кронекеровской системы (дуальная группа конечна).

Работа является по существу повторением результатов М. Г. Крейна (Докл. АН СССР, 1949, **69**, 725 — 728), однако у Крейна рассматриваются не системы функций, а абстрактно определенные „блок-алгебры".

Д. П. Желобенко

3953. Ограниченные функции и преобразования Фурье. Эдвардс (Bounded functions and Fourier transforms. Edwards R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 440—446 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть X — компактная абелева группа с дуальной группой Y и пусть S — подмножество группы Y. Для того чтобы каждая ограниченная функция на S совпадала с преобразованием Фурье некоторой меры Радона на X, достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: характеристическая функция каждого подмножества множества S равна на S преобразованию Фурье некоторой меры Радона на X.

Доказательство этой теоремы использует только элементарные свойства преобразования Фурье и поэтому легко переносится на некоторые другие преобразования, определенные на полугруппах. Б. М. Левитан

3954. Теорема суммируемости в счетных тороидальных группах. Маховалд (A summability theorem in countable toral groups. Mahowald Mark), Math. Ann., 1958, **135**, № 4, 354—359 (англ.)

Пусть G—счетная тороидальная группа. Пусть XC_i— разложение группы G в бесконечное прямое произведение, где C_i ($i=1, 2,\ldots$)—группа действительных чисел по mod 1.

Топология и мера в G есть произведение топологий и мер. Пусть $a=\{2\pi a_n\}$, где a_n — последовательность целых чисел, среди которых только конечное число отлично от нуля. Множество всех a с почленным сложением изоморфно группе характеров $\bar{G}$ группы G. Если $x=\{x_n\}\in G$ и $a(x)$ — характер группы G, то $a(x)=\exp[-2\pi i\sum a_n x_n]$.

В работе доказана следующая теорема: Если $f(x)$ ограничена и интегрируема на G и в точке x_0 непрерывна, то

$$\lim_{r\to 1}\sum_{a} r^{\sum|a_n|}\int_{G} f(x)\overline{a}(x_0-x)\,dx = f(x_0).$$

Б. М. Левитан

3955. ω-почти периодические функции на произвольных группах. Цудзи (ω-almost periodic functions on arbitrary groups. Tsuji Kazô), Bull. Kyushu Inst. Technol. (Math. Natur. Sci.), 1958, № 4, 7—14 (англ.)

Строится теория абстрактных ω-почти периодических функций, значения которых суть элементы локально выпуклого, полного, линейного, топологического пространства L.

Теория числовых ω-почти периодических функций принадлежит Маку (Maak W., J. reine und angew. Math., 1952, **190**, 34—48).

Определение I. Пусть $\mathfrak{N}$ — подмножество абстрактной группы $\mathfrak{G}$ и $\chi(x)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{N}$. Множество $\mathfrak{N}$ называется нуль-множеством, если

$$\inf_{a_1,\ldots,a_n\in\mathfrak{G}}\ \sup_{c,\,d\in\mathfrak{G}}\ n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\chi(ca_id)=0.$$

Определение II. Функция $f(x)$ называется ω-почти периодической функцией на группе $\mathfrak{G}$, если для произвольного $\varepsilon>0$ и произвольного конечного числа псевдонорм $p_1, \ldots, p_\sigma$ существует нуль-множество $\mathfrak{N}(p_1, \ldots, p_\sigma; \varepsilon)$ и конечное покрытие $\{\mathfrak{A}_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ группы $\mathfrak{G}$ со следующими свойствами:

(I) $\mathfrak{A}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$.

(II) Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и любых $c, d \in \mathfrak{G}$;

$$x, y\in\mathfrak{A}_i \text{ и } cxd,\ cyd\in\mathfrak{G}\to\mathfrak{N}$$

$$p_\nu\{f(cxd)-f(cyd)\}<\varepsilon,\ \nu=1,2,\ldots,\sigma.$$

Доказано, что для любой ω-почти периодической функции $f(x)$ существует единственное среднее значение $M\{f(x)\}\in L$. Этот результат получен из более общего результата об эргодичности так называемых ω-функций.

В конце работы рассмотрен тот случай, когда L есть пространство Гильберта или пространство всех линейных ограниченных операторов пространства Гильберта.

Б. М. Левитан

3956. Интегральные преобразования на некоторых функциональных пространствах. I. Серс (Integral transforms over certain function spaces. (I). Sears D. B.), Quart. J. Math., 1957, **8**, № 29, 68—80 (англ.)

Функции f, $F\in L^2(0,\infty)$ называются взаимными преобразованиями, если они удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^w F(t)\,dt=\int_0^\infty f(x)\,\chi(x,w)\,dx, \qquad (1)$$

$$\int_0^x f(y)\,dy=\int_0^\infty F(t)\,\rho(x,t)\,dt, \qquad (2)$$

в которых χ и ρ — данные функции, удовлетворяющие надлежащим условиям. Теоремы Бохнера и Чандрасекарана (Bochner S., Chandrasekharan K., Fourier Transforms, Princeton, 1949) дают полную характеристику унитарных преобразований „ядрами" χ и ρ. Однако в случае спектральной теоремы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной особой точкой мы встречаемся с линейным отображением пространства $L^2(0,\infty)$ в пространство $L^2(0,\infty;\rho)$ с мерой $\rho(\lambda)$.

Если даны два L^2-пространства, не обязательно совпадающие, то линейное отображение одного пространства на другое называется унитарным, если оно сохраняет скалярное произведение.

В работе дается характеристика унитарных отображений для случая абстрактных пространств с мерой. Более подробное описание результатов работы затруднительно, ввиду большого числа вспомогательных понятий и определений.

Б. М. Левитан

3957. Основные проблемы теории приближения функций. Албукерки (Problemas fundamentais da teoria de aproximaçao funcional. Albuquerque Luís G. M. de), Gaz. mat., 1957, **18**, № 68-69, 24—28 (порт.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1958, 3651). Приводится метод Шмидта ортогонализации векторов гильбертова пространства. Устанавливается, что в сепарабельном гильбертовом пространстве всякая ортонормальная система векторов конечна или счетна.

Изучается вопрос о существовании наилучшего приближения элементов линейного нормированного пространства с помощью конечных линейных комбинаций элементов подпространства.

Э. Апарисио

3958. О бесконечных системах теории волноводов. Розет Т. А., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 1, 136—142

Пусть в комплексном гильбертовом пространстве H задан ортонормированный базис $\{\Psi_n\}^\infty$; H_1 — подпространство и $\{\varphi_n\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в нем; $H_2 = H \ominus H_1$ ортогональное дополнение подпространства H_1 и $\{\eta_n\}_1$ — какой-нибудь базис в H_2. Рассматриваются системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(q_n+p_m)\overline{b}_{mn}x_n=\begin{cases}a_m, & m=1,\ldots,N\\ 0, & m=N+1,\ldots\end{cases}\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\overline{c}_{mn}x_n=0, \qquad m=1,2,\ldots\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(q_n+p_m)\overline{b}_{mn}x_n=\begin{cases}a_m, & m=1,\ldots,N\\ 0, & m=N+1,\ldots\end{cases}\\ &\sum_{n=1}^{\infty}q_n\overline{c}_{mn}x_n=0, \qquad m=1,2,\ldots\end{aligned}\right\}$$

Здесь x_n — искомая последовательность из l_2; $b_{mn}=(\varphi_m,\psi_n)$, $c_{mn}=(\gamma_m,\psi_n)$; p_n, q_n, a_m — заданные постоянные.

Используя результаты Шефке (Schäfke E. W., Math. Nachr., 1949, **3**, № 1, 40 — 58) и Н. К. Бари (Матем. сб., 1944, **14**, № 1-2, 51 — 108), автор находит некоторые достаточные условия существования и единственности решений указанных выше систем. В статье рассмотрен пример из теории волноводов.

М. С. Лившиц

3959. Ядерные функции и разложение по собственным функциям. Нелсон (Kernel functions and eigenfunction expansions. Nelson Edward), Duke Math. J., 1958, **25**, № 1, 15—27 (англ.)

В последнее время в ряде работ из общей спектральной теоремы для самосопряженных операторов получено разложение по конкретным собственным функциям (см., например, работу Гординга, РЖМат, 1958, 7732 или Гельфанда и Костюченко, РЖМат, 1956, 3924).

В работе дается еще один вариант вывода такого разложения, применимого к пространствам Гильберта с нормой, отличной от L^2-нормы (например, к пространствам функций $f(x)$ с нормой, содержащей различные производные $f(x)$).

Пусть S — самосопряженный оператор. Автор предполагает, что резольвента $(S-l)^{-1}$, $\operatorname{Im}(l)\neq 0$ порождается ядром $G(x, y; l)$, которое предполагается известным.

Ядро разложения единицы автор получает с помощью контурного интегрирования. Б. М. Левитан

3960. Гармонически-спектральная мера и спектральная теория общих операторов в гильбертовом пространстве. Фояш (La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des operateurs généraux d'un espace de Hilbert. Foias Ciprian), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 3, 263—282 (франц.)

Для линейного ограниченного оператора T в гильбертовом пространстве рассматриваются функции вида $u(T)$ и $f(T)$, где $u(\lambda)$ и $f(\lambda)$ — соответственно гармонические и аналитические функции, заданные на спектральном множестве S (в смысле Неймана; см. книгу Рисс Ф. и С.-Надь Б., РЖМат, 1955, 5144) оператора T. Подробно изучаются свойства отображения $u(\lambda) \to u(T)$. Вводится „гармонически-спектральная мера" оператора T, т. е. семейство операторов $\omega(T; \beta, S) = u_{\varphi_\beta}(T)$, заданное на борелевских множествах β, принадлежащих границе S, где $u_{\varphi_\beta}(\lambda)$ — гармоническая функция на S, совпадающая на границе S с характеристической функцией φ_β множества β.

Доказывается, что оператор T нормален и его спектр расположен на границе S в том и только в том случае, когда операторы $\omega(T; \beta, S)$ суть проекторы; кроме того, если β есть дуга и $\omega(T; \beta, S) = 0$, то T нормален.

В качестве основной теоремы о гармонически-спектральных мерах доказывается следующее предложение: Для того чтобы $\omega(T; \{\zeta\}, S) \neq 0$ (ζ — точка на границе), необходимо и достаточно, чтобы ζ было собственным значением оператора T; при этом $\omega(T; \{\zeta\}, S) = E_\zeta(T)$, где $E_\zeta(T)$ — проектор на собственное подпространство оператора T, соответствующее собственному значению ζ. При доказательстве необходимости автор опирается на возможность (здесь же устанавливаемую) построения последовательности функций, аналитических в S и непрерывных в замыкании $\bar{S}$, стремящихся к нулю равномерно на каждом компакте в $S - \{\zeta\}$ и таких, что их действительные части на границе S сходятся убывая к $\varphi_{\{\zeta\}}$, а мнимые части равномерно на S стремятся к нулю.

Строятся основы исчисления функций от оператора для функций, гармонических и аналитических в S и непрерывных в $\bar{S}$, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва на границе S, не являющихся собственными значениями оператора T.

В качестве приложения доказана одна теорема о сильно непрерывных полугруппах операторов сжатия (см. стр. 432 цитированной книги). Ю. Н. Валицкий

3961. Аппроксимативно конечные алгебры. Уайдом (Approximately finite algebras. Widom Harold), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 1, 170—178 (англ.)

В кольце операторов в гильбертовом пространстве рассматривается фактор M типа II_1 и совокупность V подмножеств M. Она называется нормальной, если для любой расширяющейся цепи $\{N_\alpha\}$, составленной из элементов V, $\vee N_\alpha \in V$ (символ $\vee N_\alpha$ обозначает кольцо, порожденное $\{N_\alpha\}$). Пусть $U(M)$ — наименьшая нормальная совокупность, содержащая все подфакторы типа I из M. Фактор M называется аппроксимативно конечным (A, I), если $M \in U(M)$. Для сепарабельного гильбертова пространства это определение совпадает с определением, данным для этого случая Меррем и Нейманом.

Фактор M называется аппроксимативно конечным (A, II), если для заданных $A_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$, и $\varepsilon > 0$ найдется в M подфактор N типа I, содержащий B_i, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$[[A_i - B_i]] = \mathrm{Tr}\,[(A_i - B_i)^*(A_i - B_i)]^{1/2} < \varepsilon,$$

где $\mathrm{Tr}\,(A^*A)$ — относительный след оператора A.

Доказывается, что аппроксимативная конечность (A,I) и (A, II) эквивалентны.

Фактор M называется аппроксимативно конечным (B), если $M = \vee P_\lambda$, где P_λ —попарно коммутирующие подфакторы типа I из M.

Показывается, что из аппроксимативной конечности (B) следует аппроксимативная конечность(A). Пусть $\chi(\aleph)$— наименьшее кардинальное число $\aleph$ такое, что существует подмножество M мощности $\aleph$, всюду плотное в M в смысле метрики [[ ]]. Доказывается:

1. Если M и M_1 аппроксимативно конечны (B) и $\chi(M_1) = \chi(M)$, то M и M_1 изоморфны.

2. Для любого $\aleph$ существует фактор M, аппроксимативно конечный (B) и такой, что $\chi(M) = \aleph$.

3. Каждый фактор типа II_1 содержит максимальный подфактор, аппроксимативно конечный (A).

В последнем параграфе статьи определение аппроксимативной конечности и полученные результаты обобщаются на абстрактные AW^*-алгебры со следом (РЖМат, 1956, 594). В. И. Соболев

3962. Изоморфизм AW^*-алгебр. Янь Ди (Isomorphism of AW-algebras. Yen Ti), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 345—349 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть M и N — две AW^*-алгебры, не имеющие компонент типа I_n; пусть ρ — алгебраический изоморфизм унитарной группы $M_u \subset M$ в унитарную группу $N_u \subset N$; тогда ρ индуцирует сохраняющий ортогональность изоморфизм θ совокупности проекций $M_P \subset M$ в совокупность проекций $N_P \subset N$.

В. И. Соболев

3963. Обзор теории представлений групп. Сингер (Report on group representations. Singer I. M.), Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, 1955, № 387, 11—26 (англ.)

Обзорная статья, посвященная современному состоянию теории представлений групп; автор следует докладу Макки (G. W. Макки).

Основные задачи: связь структуры группы с ее представлениями, нахождение минимальных представлений, из которых можно сконструировать любое; обобщение классических теорем Стоуна, Планшереля, преобразований Фурье и Лапласа на группы, более общие, чем абелевы и компактные; разложение прямого произведения представлений на неприводимые.

Рассмотрен вопрос о разложении представления в континуальную сумму неприводимых — обобщение разложения для компактной группы, где неприводимые представления конечномерны и сумма дискретна, и абелевой с непрерывной суммой одномерных представлений.

Другое важное разложение — на факторы; для фактор-представлений вводятся понятия квазиэквивалентности и относительной размерности; в соответствии с областью изменения относительной размерности проводится классификация факторов.

Перечислены работы по нахождению всех неприводимых представлений некоторых классов групп: результаты И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка для классических групп Ли и работы Хариш-Чандра. По теории индуцированных представлений излагаются результаты Макки и Маутнера; далее рассматриваются формула Планшереля и некоторые другие вопросы. Статья содержит обширную библиографию. Г. П. Муравьева

3964. Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли. II. Диксмье (Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II. Dixmier

Jacques), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 3, 325—388 (франц.)

В работе построена теория унитарных представлений нильпотентных групп Ли.

Пусть Γ — нильпотентная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Алгебра $\mathfrak{g}$ рассматривается над произвольным полем K характеристики 0. Через $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ обозначается ассоциативная оболочка алгебры $\mathfrak{g}$, через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ — ее центр.

Доказывается, что поле отношений, порожденное центром $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, есть трансцендентное расширение поля K конечной степени и что эта степень n_1 совпадает с числом независимых параметров, от которых зависит неприводимое представление. При этом, если размерность $\mathfrak{g}$ равна n, то $n - n_1 = 2p \geqslant 0$ — четное число. Число p автор называет дефектом коммутативности алгебры $\mathfrak{g}$. Оказывается, что равенство $p = 0$ необходимо и достаточно для коммутативности алгебры $\mathfrak{g}$.

Каждому неприводимому унитарному представлению соответствует гомоморфизм χ центра $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ в поле комплексных чисел (характер). Пусть $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Через $\Lambda_c(\mathfrak{g})$ обозначается множество характеров, обладающих тем свойством, что $\chi(c) \neq 0$.

Первая основная теорема, доказанная в настоящей работе, заключается в следующем: Существует такой элемент $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ $c \neq 0$, что каждый характер $\chi \in \Lambda_c$ отвечает одному и только одному (с точностью до эквивалентности) унитарному представлению группы Γ. Элемент c, обладающий таким свойством, автор называет классифицирующим.

Следующая теорема в значительной степени вскрывает структуру представлений нильпотентных групп: Пусть p — дефект коммутативности алгебры $\mathfrak{g}$, $L_2(R_p)$ — пространство функций, с суммируемым квадратом от p переменных, $\mathfrak{H} \subset L_2(R_p)$ — подпространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций. Пусть далее $\mathfrak{A}$ — алгебра всех дифференциальных операторов на $\mathfrak{H}$ с полиномиальными коэффициентами. Существует такой классифицирующий элемент $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, что: 1) для каждого $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$ соответствующее ему представление U_χ может быть реализовано в $L_2(R_p)$; 2) множество бесконечно дифференцируемых относительно U_χ элементов совпадает с $\mathfrak{H}$; 3) алгебра операторов $U_\chi(c)$, где c пробегает $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, совпадает с $\mathfrak{A}$.

Описанные представления образуют достаточный запас для теоремы Планшереля. Именно: Пусть q — степень трансцендентности поля отношений, порожденного $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, так что (как было сказано выше), неприводимое унитарное представление зависит от q вещественных параметров: $U_\chi(g) = U_{\lambda_1,\ldots,\lambda_q}(g)$. Пусть далее $f(g)$ — суммируемая и суммируемая с квадратом функция. Тогда $U_\chi(f) = \int U_\chi(g) f(g)\, dg$ (интеграл по инвариантной мере на Γ) есть оператор Гильберта-Шмидта и в q-мерном евклидовом пространстве существует такая рациональная функция $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$, что

$$\int |f(g)|^2 dg = \int_D \operatorname{sp} U_\chi(f) U_\chi^*(f) F(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)\, d_{\lambda_1} \ldots d_{\lambda_q},$$

где интеграл в правой части берется по некоторой области D, открытой в смысле топологии Зарисского.

(См. также реф. 3965. Ф. А. Березин

3965. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. Диксмье (On unitary representations of nilpotent Lie groups. Dixmier Jacques), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 11, 985—986 (англ.)

Краткое изложение результатов, опубликованных подробно в другой работе (реф. 3964). Ф. А. Березин

3966. Полугруппы линейных операторов и применение к теории аппроксимации. Бутцер (Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie. Butzer P. L.), J. reine und angew. Math., 1957, 197, № 1-2, 112—120 (нем.)

Пусть $\{T_t\}$ $(t \geqslant 0)$ — множество линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X и удовлетворяющих требованиям

$$T_0 = I, \quad \|T_t\| \leqslant M < +\infty, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to s} \|T_t x - T_s x\| = 0, \quad s \geqslant 0, \quad x \in X.$$

Сегмент $[0, 1]$ делится на n равных частей и каждой точке деления ν/n $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ сопоставляется действительная функция $\varphi_{\nu,n}(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Ставится задача о равномерной относительно t аппроксимации

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = 0 \tag{2}$$

для любого фиксированного $x \in X$.

Теорема 2. 1. Для того, чтобы множество операторов $\{T_t\}$, удовлетворяющее условиям (1), при каждом фиксированном $x \in X$ допускало аппроксимацию (2), равномерную относительно t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, необходимо и достаточно, чтобы для системы $\{\varphi_{\nu,n}\}$ при любом $\delta > 0$ и равномерно относительно t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ имели место равенства

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{|\nu/n - t| \leqslant \delta} \varphi_{\nu,n}(t) = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{|\nu/n - t| > \delta} \varphi_{\nu,n}(t) = 0.$$

Этим условиям эквивалентны следующие три условия (все три должны выполняться равномерно относительно t):

$$1) \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t) = 1, \quad 2) \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right) \varphi_{\nu,n}(t) = t,$$

$$3) \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \varphi_{\nu,n}(t) = t^2.$$

Из этой теоремы при $\varphi_{\nu,n}(t) = p_{\nu,n}(t) = \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu}$ получается, в частности, соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = 0,$$

содержащее доказательство аппроксимационной теоремы Вейерштрасса с помощью полиномов С. Бернштейна

Теорема 3. 1. Если семейство операторов $\{T_t\}$ удовлетворяет условию (1) и $T_t x$ как функция от t имеет в сегменте $[0, 1]$ модуль непрерывности:

$$\mu(\delta; x) = \sup_{\substack{|t-s| \leqslant \delta \\ 0 \leqslant t, s \leqslant 1}} \|T_t x - T_s x\|, \quad x \in X,$$

то для любого $x \in X$

$$\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| \leqslant {}^3/_2\, \mu({}^1/\sqrt{n}; x).$$

Отсюда, в частности, для $T_t x$, удовлетворяющей для любого $x \in X$ условию Липшица

$$\|T_t x - T_s x\| \leqslant C(x)\, |t - s|^\gamma, \; 0 < \gamma \leqslant 1, \; 0 < t, \; s < 1$$

справедлива оценка

$$\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,\,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = O\left(n^{-\nu/2}\right).$$

Теорема 3. 2. Если семейство удовлетворяет условию (1) и существует сильная производная $T'_t x$ (по t) в точке t сегмента $[0,1]$, то для любого $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,\,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = 0.$$

Порядок аппроксимации нельзя улучшить даже в случае существования второй производной (теорема 3, 4).

Теорема 4. 1. Если существует абстрактный интеграл функции $T_t x$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в смысле Римана-Грейвса, то для любого $x \in X$

$$\left\| \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,\,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x\,dt - \int_0^1 T_t x\,dt \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 4. 2. Если $\{T_t\}$ — сильно непрерывное семейство операторов с модулем непрерывности $\mu(\delta; x)$ в сегменте $[0,1]$, то для любого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\left\| \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,\,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x\,dt - \int_0^1 T_t x\,dt \right\| \leqslant \mu\left(1/(n+1); x\right).$$

Утверждается, что многие из приведенных результатов могут быть с операторов вида $\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,\,n}(t)\, T_{\nu/n}$ перенесены (с соответствующими изменениями) на операторы

$$e^{tA_{1/n}} x = \left\{ e^{-tn} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(th)^{\nu}}{\nu!}\, T_{\nu/n} \right\} x,\ 0 \leqslant t < +\infty,$$

где $A_h = {}^1/_h (T_h - I)$, $h > 0$, $x \in X$, а семейство операторов $\{T_t\}$, помимо условия (1), удовлетворяет условию $T_{s+t} = T_s T_t$, $s, t \geqslant 0$ (полугруппа). (3)

В качестве примеров приводятся две теоремы:

Теорема 5 1. Если семейство операторов $\{T_t\}$ удовлетворяет условиям (1) и (3), а $T_t x$ при любом $x \in X$ удовлетворяет условию Липшица $\| T_t x - T_s x \| \leqslant C(x)\, |t - s|^{\gamma}$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $0 \leqslant t, s \leqslant \beta$, то

$$\| T_t x - e^{tA_{1/n}} x \| \leqslant M n^{-\gamma/2}$$

для $0 \leqslant t \leqslant \beta$, причем $M = M(C, \beta)$.

Теорема 5. 2. Если семейство операторов $\{T_t\}$ удовлетворяет условиям (1) и (3), а также условию

$$\left\| T_t x - T_s x \right\| \leqslant C(x)\, \frac{|t - s|^{\gamma}}{(t+s)^{\gamma/2}},\ 0 < \gamma \leqslant 1,\ 0 < t, s < \infty,$$

то для $0 < t < +\infty$ имеет место оценка

$$\| T_t x - e^{tA_{1/n}} x \| \leqslant C(x)\, n^{-\gamma/2}.$$

И. С. Иохвидов

3967. О теории аналитических функционалов (Over de theorie der analytische functionelen), Rapp. Math. centrum, 1955, № 007, 1—13 (гол.)

Излагаются некоторые факты из теории аналитических функционалов Фантаппие. Рассмотрены главным образом линейные аналитические функционалы. Статья не содержит новых сведений (см., например, статью Пеллегрино в книге Леви (Lévy P., Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951). В. П. Хавин

3968. Теория возмущений для собственных чисел и точек ветвления. Шрёдер (Störungsrechnung bei Eigenwert- und Verzweigungsaufgaben. Schröder Johann), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 5, 436—468 (нем.)

В пространстве Банаха $\mathfrak{S}$ рассматривается задача

$$A_0 \varphi - \lambda \varphi = B(\lambda, \varphi), \tag{1}$$

$$l\varphi = 1. \tag{2}$$

Здесь l — линейный функционал (так что (2) есть условие нормировки), A_0 — линейный оператор с областью определения $\mathfrak{A}$, для которого известны простое собственное число $\lambda = \mu_0$ и собственный элемент $\varphi = \psi_0$. Ищется решение (λ, φ), близкое к (μ_0, ψ_0).

Предполагается, что $B(\lambda, \varphi)$ имеет вид

$$B(\lambda, \varphi) = C(\lambda, \varphi, A_0\varphi, A_1\varphi, \ldots, A_p\varphi),$$

причем A_i — линейные операторы с областью определения $\mathfrak{A}$, удовлетворяющие неравенствам вида

$$\| A_i \varphi \| \leqslant Q_i(\| \varphi \|, \| A_0 \varphi \|).$$

Каждой паре $u = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix}$, где λ — комплексное и $\varphi \in \mathfrak{A}$, сопоставляется вектор в $p+3$-мерном пространстве

$$\nu[u] = (|\lambda|, \| \varphi \|, \| A_0 \varphi \|, \ldots, \| A_p \varphi \|).$$

Вводится пространство $\mathfrak{R}$ пар u, которое нормируется при помощи равенства $\| u \| = \| \nu[u] \|$. Уравнение (2) выделяет в $\mathfrak{R}$ многообразие $\mathfrak{D}$. Уравнение (1) и соответствующее невозмущенное уравнение $A_0\varphi - \lambda\varphi = 0$ интерпретируются как уравнение $G(u) = 0$ и $G_0(u) = 0$, где G и G_0 — функции из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{S}$.

Для решения задачи (1) рекомендуется вариант метода Ньютона — итеративный процесс, описываемый формулой

$$u_{n+1} = u_n - [G_0(x_n)]^{-1} G u_n;$$

где $u_n = \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ и $x_n = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \varphi_n \end{pmatrix}$. Исследование сходимости метода и получение оценок осуществляется при помощи изучения мажорантного уравнения в $p+3$-мерном пространстве. Техника оценок тщательно разработана для ряда важных случаев. Приводятся примеры.

М. К. Гавурин

3969. Полуупорядоченные локально-выпуклые векторные пространства. Шефер (Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. Schaefer Helmut), Math. Ann., 1958, **135**, № 2, 115—141 (нем.)

Изучается связь между топологией и полуупорядоченностью линейных пространств. В первых параграфах рассматриваются линейные (над полем вещественных чисел) локально выпуклые пространства E, полуупорядоченные путем выделения конуса положительных элементов в E. Рассматриваются случаи нормальных конусов и BZ-конусов, которые были определены и изучены в банаховых пространствах М. Г. Крейном (Докл. АН СССР, 1940, 28, 13—17) и Бонсаллом (РЖМат, 1956, 7451) соответственно. Изучаются геометрические свойства таких конусов и устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы любое непрерывное линейное преобразование на E представлялось разностью двух неотрицательных, на нормальном конусе K в E, непрерывных линейных преобразований. Пространством, сопряженным (дуальным) к E, называется совокупность F линейных непрерывных функционалов, определенных на E. Множество функционалов из F, положительных на конусе K в E, представляет собой конус в F и называется сопряженным конусом к конусу K.

Доказывается, что конусом, сопряженным к нормальному конусу K в E, будет BZ-конус в F, и наоборот. Далее рассматривается линейное полуупорядоченное пространство E с конусом K. Элемент $a \in K$ называется порядковой единицей, если для любого $b \in E$ найдется число $\lambda > 0$ такое, что $b \leqslant \lambda a$ (здесь $\leqslant$ — символ порядка в E). Доказывается, что в любом линейном полуупорядоченном пространстве E с порядковой единицей a при помощи выпуклого функционала $p(x) = \inf\{\lambda : -\lambda a \leqslant x \leqslant \lambda a\}$ определяется локально выпуклая топология, в которой положительный конус K нормален. В заключение доказывается, что для того чтобы локально выпуклое полуупорядоченное пространство E было алгебраически и топологически изоморфно пространству непрерывных на сегменте $[0,1]$ функций (с сохранением порядка: положительным элементам в E соответствуют функции с неотрицательными значениями), необходимо и достаточно, чтобы положительный конус K в E был нормален.

Д. Ф. Харазов

3970. Монотонная полнота нормированных полуупорядоченных линейных пространств. Ямамуро (Monotone completeness of normed semi-ordered linear spaces. Yamamuro Sadayuki), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1715—1725 (англ.)

Рассматриваются KB-линеалы R, являющиеся K^--пространствами. Автор называет их нормированными полуупорядоченными линейными пространствами. Норма в KB-линеале называется монотонно полной, если для любой монотонно возрастающей последовательности $\{x_n\}$ положительных элементов такой, что $\sup \| x_n \| < +\infty$, существует $\sup x_n$. Норма называется непрерывной, если для любой последовательности $x_n \downarrow 0$ $\lim \| x_n \| = 0$. Как известно, KB-линеал с монотонно полной и непрерывной нормой есть KB-пространство. Л. В. Канторович еще в 1937 г. доказал, что KB- пространство полно по норме. В 1953 г. Амемией было доказано, что уже монотонная полнота нормы в KB-линеале влечет (b)-полноту (РЖМат, 1955, 1375).

Реферируемая работа состоит из двух частей. В первой части доказаны 2 теоремы. В одной из них показано, что норма в полном нормированном полуупорядоченном линейном пространстве R монотонно полна тогда и только тогда, когда R K-ограничено (или когда R K^2-ограничено). K^--пространство называется K-ограниченным, если для любой последовательности $0 \leqslant x_n \uparrow +\infty$ найдется последовательность вещественных чисел $\varepsilon_n \downarrow 0$ такая, что множество $\{\varepsilon_n x_n\}$ неограниченное; K^--пространство называется K^2-ограниченным, если для любого счетного семейства последовательностей $0 \leqslant x_n^k \uparrow_{k \to \infty} +\infty (k = 1,2\ldots)$ найдется диагональная неограниченная последовательность $\{x_n^{(k_n)}\}$. Эти понятия были введены Л. В. Канторовичем (Матем. сб., 1937, 44, 121—168). В общем случае K^2-ограниченность сильнее K-ограниченности. Известно, что в KB-пространстве любое (b)-замкнутое подмножество монотонно полно. Во второй теореме первой части автором доказано, что если в KB-линеале R любое (b)-замкнутое нормальное множество N монотонно полно, то R — KB-пространство (и, тем самым, и N — KB-пространство)

Во второй части работы автором исследуется монотонная полнота так называемых пространств Накано. Пространством Накано является K-пространство R с функционалом m, удовлетворяющим следующим условиям:

1) $0 \leqslant m(x) \leqslant +\infty$ $(x \in R)$;

2) для любого $x \in R$ найдется $\xi > 0$ такое, что $m(\xi x) < +\infty$;

3) если $m(\xi x) = 0$ для любого $\xi > 0$, то $x = 0$;

4) если $|x| \leqslant |y|$, то и $m(x) \leqslant m(y)$;

5) $m\left(\frac{\xi + \tau_i}{2} x\right) \leqslant \frac{1}{2}[m(\xi x) + m(\tau_i x)]$ (в статье в этом месте опечатка);

6) если $|x| \wedge |y| = 0$, то $m(x + y) = m(x) + m(y)$;

7) если $x_\gamma \uparrow_{\gamma \in \Gamma} x$ (т. е. x_γ сходится монотонно к x по некоторому направленному множеству), то $m(x) = \sup_{\gamma \in \Gamma} m(x_\gamma)$. Эти пространства под названием модулярных полуупорядоченных линейных пространств были введены и исследованы Накано (Nakano H., Modulared semi-ordered linear spases, Tokyo, 1950). Автор изучает соотношения между некоторыми свойствами в рассматриваемых им пространствах Накано. Почти все эти свойства в пространстве Орлича (а оно будет пространством Накано) эквивалентны хорошо известному условию (Δ_2): $m(2x) \leqslant k \cdot m(x)$ при одном и том же $k > 0$ для любого x. В частности, автором обобщаются некоторые результаты Е. П. Калугиной (РЖМат, 1955, 4535).

Примечание референта. На стр. 1715, 18 строка сверху, опечатка. Надо читать: Nakano [5; Theorem 30. 17].

А. И. Векслер

3971. T-множества и абстрактные ( )-пространства. Хейдер (T-sets and abstract (L)-spaces. Heider L. J.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1611—1618 (англ.)

Рассматривается полуупорядоченное банахово пространство BL, которое является линейной структурой в смысле этого полуупорядочения и в котором множество P элементов $a \geqslant 0$ замкнуто. На множество P накладывается, кроме того, одно из следующих последовательно усиливающихся условий:

(I) Если a, $b \in P$, то $\| a + b \| = \| a \| + \| b \|$.

(II) Если a, $b \in P$, то $\| a + b \| = \| a \| + \| b \|$ и P — максимальное подмножество в BL относительно этого свойства.

(III) Если a, $b \in P$, то $\| a + b \| = \| a \| + \| b \|$ и если $a \wedge b = 0$, то $\| a - b \| = \| a + b \|$. BL называется абстрактным (L)-пространством I типа, если множество P удовлетворяет условию (I) и не удовлетворяет условию (II), — II типа, если P удовлетворяет условию (II) и не удовлетворяет условию (III), и — III типа, если P удовлетворяет условию (III).

T-сетью банахова пространства B называется подмножество P этого пространства, максимальное относительно следующего свойства: для каждого конечного множества элементов $b_1, \ldots, b_n$ из P

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \right\| = \sum_{i=1}^{n} \| b_i \|,$$

Доказывается следующая теорема: Банахово пространство B допускает полуупорядочение, относительно которого оно становится абстрактным (L)-пространством II или III типа, тогда и только тогда, когда оно содержит такую T-сеть P, что для каждого $a \in B$ существуют $a^+, a^- \in P$ со следующими свойствами: 1) $a = a^+ - a^-$, 2) если $a = b - c$, b, $c \in P$, то $\| b - a^+ \| = \| b \| - \| a^+ \|$; при этом указанное полуупорядочение совпадает с каноническим полуупорядочением, индуцированным P в B. Чтобы B становилось абстрактным (L)-пространством III типа, необходимо и достаточно выполнение дополнительного условия: $\| a \| = \| a^+ \| + \| a^- \|$ для всех $a \in B$.

Далее исследуется роль T-сетей в абстрактных (L)-пространствах III типа и делаются некоторые замечания о T-сетях в абстрактных (L)-пространствах I типа.

А. С. Маркус

3972. О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец. Вулих Б. З., Уч. зап.

Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 3—15

Дополняются результаты, полученные автором в ранее опубликованных работах (РЖМат, 1954, 1720, 2618) и референтом (РЖМат, 1956, 6474).

Сначала доказывается, что любой внутренне нормальный архимедов (b)-полный K-линеал с заданной системой попарно дизъюнктных положительных элементов $\{e_\alpha\}$ может быть единственным образом превращен в обобщенное полуупорядоченное кольцо, в котором элементы e_α являются частичными единицами умножения (единицами умножения в компонентах, порождаемых e_α). У референта была установлена лишь возможность такого превращения, но оставался в общем случае открытым вопрос об его единственности (K-линеал X называется внутренне нормальным, если при его реализации в виде непрерывных функций на некотором бикомпакте Q образ его X' нормально содержится в множестве всех непрерывных функций на бикомпакте Q; (b)-полнота означает полноту относительно равномерной сходимости функций).

Далее показывается, что свойство внутренней нормальности не является необходимым для возможности превращения в обобщенное полуупорядоченное кольцо K-линеала без единицы. Приводится пример не внутренне нормального (b)-полного K-пространства, являющегося обобщенным полуупорядоченным кольцом, в котором частичные единицы умножения совпадают с единичными элементами фундаментальной системы. Таким примером является множество всех трансфинитных последовательностей вещественных чисел $x = \{\xi_\alpha\}$, для которых существует такое число 2-го класса α_0 и такое вещественное число λ (оба — зависящие от x), что $\xi_\alpha = \lambda \cdot p$, если $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $\alpha = \beta(\alpha) + p$, где $\beta(\alpha)$ — ближайшее к α, не превосходящее его число 2-го рода. Координаты ξ_α при $\alpha < \alpha_0$ могут быть совершенно произвольными. За единичные элементы принимаются координатные орты.

Далее дается определение внутренней нормальности, не опирающееся на реализацию, и доказывается равносильность абстрактного определения и определения с помощью реализации в виде непрерывных функций на некотором бикомпакте Q. Пусть K-линеал X-архимедов, (b)-полный, $\{e_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — его фундаментальная система единичных элементов, $x \in X$, $x \geqslant 0$, а n — натуральное число. Если существует соединение $S_\alpha(x \wedge ne_\alpha)$, то автор называет этот элемент срезкой элемента x посредством числа n. Последовательность элементов $x_n \geqslant 0$ ($x_n \in X$) называется определяющей, если

$$x_n = S_\alpha(x_m \wedge ne_\alpha) \qquad \text{при } m \geqslant n$$

(срезка элементов x_m числом n равна x_n). Для того чтобы K-линеал X был внутренне нормален, необходимо и достаточно, чтобы: 1) для каждого $x \in X$, $x \geqslant 0$ при любом натуральном n существовала срезка; 2) для любой ограниченной определяющей последовательности элементов $x_n \in X$ существовала ее верхняя грань $x = \sup x_n$.

Г. И. Домрачева

3973. Обратные пределы пространств с мерой. Чокси (Inverse limits of measure spaces. Choksi J. R.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 31, 321—342 (англ.)

Семейство множеств $\{X_\lambda\}$, где λ принадлежит направленному множеству индексов Λ, называется обратным семейством, если для любых двух индексов λ, μ, $\lambda \leqslant \mu$ определено отображение $f_{\lambda\mu}: X_\mu$ на X_λ, такое, что $f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} f_{\mu\nu}$, где $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$, а $f_{\lambda\lambda}$ есть тождественное отображение. Множество X_∞ всех систем $\{x_\lambda : x_\lambda \in X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ таких, что для $\lambda < \mu$, $f_{\lambda\mu}(x_\mu) = x_\lambda$, называется обратным пределом семейства $\{X_\lambda\}$. Естественное отображение X_∞ на X_λ обозначается через $f_{\lambda\infty}$.

Семейство $\{(X_\lambda, M_\lambda, m_\lambda)\}$ пространств с мерой называется обратным семейством пространств с мерой, если $\{X_\lambda\}$ — обратное семейство, и $f_{\lambda\mu}$ — гомоморфизм (X_μ, M_μ, m_μ) на $(X_\lambda, M_\lambda, m_\lambda)$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \leqslant \mu$, т. е. для $\lambda < \mu$, $f_{\lambda\mu}^{-1}(M_\lambda) \subseteq M_\mu$ и для $E \in M_\lambda$, $m_\lambda(E) = m_\mu(f_{\lambda\mu}^{-1}(E))$. Пусть $\{(X_\lambda, M_\lambda, m_\lambda)\}$ — обратное семейство пространств с мерой. Для всякого M_λ класс множеств $M_\lambda^* = f_{\lambda\infty}^{-1}(M_\lambda)$ есть σ-кольцо подмножеств X_∞. Положим для $E_\lambda^* \in M_\lambda^*$, $(E_\lambda^* = f_{\lambda\infty}^{-1}(E_\lambda))$, $m_\lambda^*(E_\lambda^*) = m_\lambda(E_\lambda)$. Пусть $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^*$. Тогда M — кольцо множеств, и $m(E) = m_\lambda^*(E)$ для $E \in M_\lambda^*$ — конечно-аддитивная функция множеств на M. Если m имеет σ-аддитивное продолжение на $S(M)$, где $S(M)$ есть σ-кольцо, порожденное кольцом M, то пространство с мерой $(X_\infty, S(M), m)$ называется обратным пределом семейства $\{(X_\lambda, M_\lambda, m_\lambda)\}$.

Такое определение предела пространств с мерой введено Бохнером (РЖМат, 1957, 2526). Им же доказано в некоторых предположениях существование предела, если $(X_\lambda, M_\lambda, m_\lambda)$ — топологические пространства с мерой.

В реферируемой работе устанавливаются некоторые топологические и метрические свойства этого предела. Далее устанавливается существование предела для „компактных“ (Марчевский (Marczewski E.), РЖМат 1954, 4772) и „квазикомпактных“ (Рылл-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.), РЖМат 1954, 4773) мер, а также существование предела для семейства пространств с мерой с регулярными условными мерами (Ionescu Tulcea C. T., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis, mat. e natur. 1949, (8)**7**, 208—211) и семейства алгебр с мерой.

Л. М. Абрамов

3974. О сепарабельности топологических групп. Гёц А., Fundam. math., 1955, **42**, № 1, 55—56

Вполне аддитивная мера $\mu(X)$, определенная на некотором теле $\boldsymbol{X}$ подмножеств множества X, называется сепарабельной, если существует такой счетный класс $\mathbf{M}$ измеримых множеств, что для всякого множества $X \in \boldsymbol{X}$ конечной меры и всякого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется в $\mathbf{M}$ множество M, удовлетворяющее условию $\mu(X \div M) < \varepsilon$. $X \div M$ обозначает симметрическую разность множеств X и M, т. е. $(X - M) \cup (M - X)$.

Доказывается теорема. Для того чтобы локально компактная топологическая группа G была сепарабельной, необходимо и достаточно, чтобы ее мера Хара была сепарабельной.

А. С. Дынин

3975. О теоремах возвращения в эргодической теории. Цуруми (On the recurrence theorems in ergodic theory. Tsurumi Shigeru), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 4, 208—211 (англ.)

Пусть (X, F, μ) — пространство с мерой такое, что F есть σ-алгебра и $\mu X < \infty$. Пусть $T: X \to X$ — такое (не обязательно взаимно однозначное) отображение, что из $E \in F$ следует $T^{-1}E \in F$ и $\mu(T^{-1}E) = \mu E$. Известно, что если $E \in F$, то для почти каждой точки $x \in E$ существует натуральное n такое, что $T^n x \in E$. Наименьшее из таких n обозначается через $r(x)$; для $x \notin E$, по определению, $r(x) = 0$. Множество $\bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}E$ обозначается через $\widetilde{E}$. Доказывается, что $r(x)$ есть интегрируемая функция, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} r(T^j x) = \begin{cases} 1 & \text{для почти всех } x \in \widetilde{E}, \\ 0 & \text{для почти всех } x \notin \widetilde{E} \end{cases}$$

и что

$$\int_E r(x)\,\mu(dx) = \mu(\widetilde{E}).$$

Последняя формула несколько уточняет одну теорему Каца (Kac M., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **63**, 1002—1010). В. А. Рохлин

3976. Теория оператора рассеяния. Яух (Theory of the scattering operator. Jauch J. M.), Helv. phys. acta, 1958, **31**, № 2, 127—158 (англ.)

Статья посвящена математическому обоснованию теории оператора рассеяния для некоторого класса квантово-механических систем. Предназначая свою работу главным образом для физиков, автор в вводной части кратко излагает основные понятия теории гильбертовых пространств и спектральной теории самосопряженных операторов. Далее дается определение „рассеивающей системы" для упругого рассеяния двух частиц.

Пусть H_0 — гамильтониан системы свободных частиц, а H — гамильтониан с учетом взаимодействия. Рассмотрим унитарные операторы $U_t = e^{-iH_0t}$, $V_t = e^{-iHt}$. Система называется рассеивающей, если выполняются условия:

1) существуют пределы $\lim\limits_{t\to\mp\infty} V_t^* U_t f = f_\pm$ для всех элементов f гильбертова пространства $\mathfrak{H}$;

2) многообразие R_+ всех элементов f_+ совпадает с многообразием R_- всех элементов f_- ($R_- = R_+ = R$).

Рассеивающая система называется простой, если инвариантное подпространство N, отвечающее непрерывному спектру оператора H, удовлетворяет условию $N \subset R$.

„Волновые операторы" $\Omega_\pm$ определяются равенствами $\Omega_\pm = \lim\limits_{t\to\mp\infty} V_t^* U_t$, а оператор рассеяния определяется равенством $S = \Omega_-^* \Omega_+$. Автор не занимается выяснением условий, которым должен удовлетворять потенциал взаимодействия для того, чтобы система была рассеивающей. В работе имеется, однако, ссылка на статью Кука (РЖМат, 1958, 7854), посвященную этому вопросу. Устанавливается также ряд свойств операторов $\Omega_\pm$, S и выясняется их физический смысл. Статья заканчивается рассмотрением эффективных сечений и их связи с матрицей рассеяния. М. С. Лившиц

3977. Соотношение между спином и статистикой. Людерс, Цумино (Connection between spin and statistics. Lüders Gerhart, Zumino Bruno), Phys. Rev., 1958, **110**, № 6, 1450—1453 (англ.)

Обобщение доказательства теоремы Паули на случай взаимодействующих полей. Для операторов одинаковых полей, являющихся либо эрмитовыми, либо неэрмитовыми, но допускающими градиентное преобразование первого рода:

$$\varphi(x) \to \varphi(x)\,e^{i\alpha};\ \varphi^*(x) \to \varphi^*(x)e^{-i\alpha}, \qquad (1)$$

получены обычные соотношения коммутации, доказательство которых не зависит от доказательства *TCP*-теоремы.

В основу рассмотрения положены постулаты: I. Теория должна быть инвариантна относительно собственной группы Лоренца, включающей 4-мерные трансляции и не содержащей временные и пространственные отражения. II. Два оператора одного и того же поля в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, либо коммутируют, либо антикоммутируют. III. Вакуум есть состояние системы с наименьшей энергией. IV. Метрика гильбертова пространства, в котором определены операторы полей, является положительно определенной. V. Вакуум не аннигилируется оператором поля тождественно.

Рассмотрены эрмитовы и неэрмитовы поля со спином 0 и 1/2. Отмеченные формальные трудности, возникающие при применении постулатов I—V для установления коммутационных свойств операторов электромагнитного поля, когда IV не имеет места, в работе не рассматриваются. Е. И. Филиппович

3978. Спиновые функционалы. Ахарони (Spin functionals. Aharoni J.), Nature, 1958, **181**, № 4620, 1385—1386 (англ.)

Автор предлагает для описания системы частиц со спином 1/2 в рамках теории вторичного квантования пользоваться представлением вектора состояния в виде функции $\varphi(a, b)$ от компонент спинора (a, b), преобразующейся по унитарному представлению группы Лоренца: $\varphi(a, b) \to \varphi(\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \delta b)$. Функция $\varphi(a, b)$ интерпретируется как амплитуда вероятности того, что a частиц имеют проекцию спина, равную — 1/2 и b частиц — проекцию 1/2. Аналогично, для частиц со спином 1 вводится функция $\varphi(a, b, c)$, где переменные a, b, c преобразуются по трехмерному представлению группы Лоренца.

Д. П. Желобенко

3979. Теорема Тейлора для операторов переноса. Сак (Taylor's theorem for shift operators. Sack R. A.), Philos. Mag., 1958, **3**, № 29, 497—503 (англ.)

Как известно, разложение Тейлора вида

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!}\frac{dF}{dx} + \ldots = \exp\left(h\,\frac{d}{dx}\right)F(x) \qquad (1)$$

основано на коммутативном законе умножения и не может быть непосредственно использовано для разложения $F(A + \lambda B)$, где A и B — некоммутирующие операторы, λ — комплексное число.

Разложение типа Тейлора было получено Кермаком и Мак-Кри в том случае, если A и B представимы в виде функций от операторов p и q с коммутатором

$$[q, p] = qp - pq = 1. \qquad (2)$$

(Kermack W. O., McCrea W. H., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1931, **2**, 220). Если $A = q$, $B = f(p)$, упомянутое разложение имеет вид

$$F[q + \lambda f(p)] = \exp(\lambda H)\,F(q), \qquad (3)$$

где H — некоторый дифференциальный оператор.

Формула (3) может быть получена из теоремы Дирака

$$qf(p) - f(p)\,q = \frac{df}{dp}. \qquad (4)$$

В реферируемой статье разложение Кермака и Мак-Кри применяется в частном случае операторов A и B с коммутатором

$$[A, B] = AB - BA = aB, \qquad (5)$$

где a — комплексное число (в этом случае B называется оператором переноса (shift operator) относительно A). Для таких операторов разложение Тейлора имеет вид

$$F(A + \lambda B) = \exp[(\lambda B/a)\,\Delta_a]\,F(A), \qquad (6)$$

где

$$\Delta_a F(A) = F(A + a) - F(a). \qquad (7)$$

В частном случае $F(A) = \exp(kA)$ формула (6) принимает вид

$$\exp[k(A + \lambda B)] = e^{kA}\exp[(\lambda B/a)\,(1 - e^{-ka})]. \qquad (8)$$

В работе справедливость формул (6) и (8) устанавливается лишь для операторов вида $A = q$; $B = f(p) = \exp(ap)$, для которых закон коммутации (5) следует из теоремы Дирака (4).

Заметим, что при $a \to 0$ формулы (6) и (8) превращаются в обычное разложение Тейлора (1) для коммутирующих операторов A и B.

Полученный результат далее применяется для вычисления матричных элементов гауссова потенциала $\exp(-Kq^2)$ в представлении, в котором диагонален гамильтониан гармонического осциллятора $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.

Применяя формулу (8), автор получает

$$\exp(-Kq^2) =$$

$$= \exp(-ka^*a)\exp(-Ka^{*2})\exp(-Ka^2)\exp(-kaa^*), \quad (9)$$

где $a = \frac{1}{2}(q + ip)$; $a^* = \frac{1}{2}(q - ip)$; $k = \ln(1 + K)$.

Используя выражения для матричных элементов каждого из сомножителей в (9), автор получает матричные элементы $\exp(-Kq^2)$.

Изложенный метод вычисления матричных элементов применяется далее к двумерному гауссову потенциалу

$$V = \exp[-K(q_x^2 + q_y^2)].$$

Разложения типа Тейлора в случае произвольных некоммутирующих операторов A и B получены Фейнманом с помощью более общего метода (Feynman R. P., Phys. Rev., 1951, **84**, 108). См. также: Фейнман Р., Операторное исчисление, имеющее приложение в квантовой электродинамике. Проблемы современной физики, 1955, № 3, 37. Л. С. Дашниц, А. И. Ершкович

См. также: 3609, 3618, 3654, 3693, 3694, 3869, 3925, 3991, 4234

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

3980. Некоторые аспекты вероятности и индукции. Беннетт (Some aspects of probability and induction (I). Bennett Jonathan), Brit. J. Philos. Sci., 1956, **7**, № 27, 220—230 (англ.)

3981. Вспомогательная рандомизация. Райтон (Auxiliary randomisation. Wrighton R. F.), Acta genet. et statist. med., 1954, **5**, № 1, 39—63 (англ.; рез. франц., нем.)

При изучении биологических явлений понятие вероятности имеет смысл, если построение искусственных случайных последовательностей производится только одним способом — растасовкой. Последовательность, полученная растасовкой, не является вполне случайной; однако, подвергая растасовке эту последовательность неоднократное число раз, можно получить производные последовательности, которые все более и более приближаются к идеалу совершенной случайности. Теснота приближения определяется численно. По резюме автора.

3982. Распределения вероятностей, связанные с различными попаданиями в мишени. Спротт (Probability distributions associated with distinct hits on targets. Sprott D A), Bull. Math. Biophys., 1957, **19**, № 3, 163—170 (англ.)

Строятся некоторые распределения вероятностей, связанные с различными попаданиями в мишени при двух различных схемах обстрела. Предполагается, что любой выстрел имеет вероятность p (не обязательно равную 1) попадания в мишень, в которую он направлен. В изложении используются хорошо известные выражения для вероятности одновременного наступления точно t из N возможных событий. Некоторые из выведенных в статье формул включают как частные случаи вероятности, полученные независимо и более сложным образом Рашевским (РЖМат, 1958, 1066) и Рапопортом (Rapoport A., Bull. Math. Biophys., 1951, **13**, 133—138). Резюме автора

3983. О дискретных многомерных функциях вероятностей гипергеометрического типа. Стейн (On discrete multivariate probability functions of hypergeometric type. Steyn H. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 5, 588—595; Indagationes math, 1955, **17**, № 5, 588—595 (англ.)

Автор обсуждает некоторые свойства многомерных распределений вероятностей, порожденных гипергеометрическим рядом

$$F(a;\ b_1, b_2, \ldots, b_k;\ c;\ t_1, t_2, \ldots, t_k) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a + x - 1)^{!x}}{(c + x - 1)^{!x}} \times$$

$$\times \sum_{\sum x_j = x} \prod_{i=1}^{k} (b_i + x_i - 1)^{!x_i} \frac{t_i^{x_i}}{x_i!}, \quad (1)$$

где $r^{!x} = r(r-1)\ldots(r-x+1)$.

1) F удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям в частных производных

$$(1 - t_i)\sum_{j=1}^{k} t_j \frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j} + [c - (a + b_i + 1)t_i]\frac{\partial F}{\partial t_i} -$$

$$- b_i \sum_{j \neq i} t_i \frac{\partial F}{\partial t_j} = ab_i F \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

2) Распределение любых $k - r$ величин при постоянных значениях k других является снова распределением гипергеометрического типа, так что частное распределение гипергеометрического типа является гипергеометрическим.

3) Если параметры $a, b_1, b_2, \ldots, b_k, c$ являются бесконечно большими величинами одинакового порядка, то распределение вероятностей $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, порожденное (1), стремится к многомерному нормальному распределению.

Результаты применяются к вопросам выбора из мультиномиального, факториального, отрицательно мультиномиального и отрицательного факториального распределений. E. Csáki

3984. Неожиданные результаты исчисления вероятностей. Бухнер (Überraschende Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Buchner P.), Elem. Math., 1958, **13**, № 4, 75—78 (нем.)

Популярно излагаются (без доказательств) известные, кажущиеся на первый взгляд парадоксальными, следствия из теорем Р. Леви и В. Феллера относительно времени пребывания игрока в выигрыше и времени возвращения к равновесию при игре в „орел или решка" (Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1952, гл. XII). Д. М. Чибисов

3985. Замечание об отыскании плотности распределения функции от случайных величин с помощью импульсной функции. Спонслер (A note on the impulse—function determination of functional probability—density functions. Sponsler George C.), Inform. and Control, 1958, **1**, № 2, 170—176 (англ.)

Используя δ-функцию в неточной трактовке этого понятия, автор подробно доказывает некоторые элементарные факты теории вероятностей.

Р. Л. Добрушин, Б. С. Цыбаков

3986. **Заметка о многомерном обобщении некоторых теорем, касающихся одномерного нормального распределения. Басу** (A note on the multivariate extension of some theorems related to the univariate normal distribution. Basu D.), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 3, 221—224 (англ.)

Методическая заметка. Новой является лишь теорема: Пусть $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_p)$ — p-мерный случайный вектор с конечной корреляционной матрицей Λ; $\mathbf{x}_j=(x_{1j},\ldots,x_{pj})$, $j=1, 2,\ldots,$ — независимые наблюдения над ним; $X=\|x_{ij}\|$ — матрица наблюдений, A — постоянная матрица такая, что XAX^T есть несмещенная оценка для Λ. Пусть $s=(s_1,\ldots,s_p)$, где $s_i=\Sigma_j x_{ij}$. Тогда, если $E(XAX^T\mid s)=\Lambda$, то x — нормальный p-мерный вектор.

Примечание референта. Многомерное обобщение теоремы Скитовича-Дормуа дано В. П. Скитовичем (РЖМат, 1955, 2312). Ю. В. Линник

3987. **О безгранично делимых случайных векторах. Дуосс, Тейкер** (On infinitely divisible random vectors. Dwass Meyer, Teicher Henry), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 461—470 (англ.)

Исследуются многомерные случайные векторы с безгранично делимыми законами распределения, характеристические функции которых выражаются по формуле

$$\varphi(t_1,\ldots,t_m)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}\gamma_j t_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\sigma_{ij}t_i t_j+\right.$$

$$\left.+\int_{R^m}\left(e^{i\Sigma t_j u_j}-1-\frac{t\Sigma t_j u_j}{1+\Sigma u_j^2}\right)\frac{1+\Sigma u_j^2}{\Sigma u_j^2}\,dG(u_1,\ldots,u_m)\right\}.$$

Полагая $\mu_G(B)=\int_B dG(u_1,\ldots,u_m)$, где B—подмножество m-мерного евклидова пространства R^m, автор дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы случайный вектор $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ с характеристической функцией φ приведенного вида, в которой все $\gamma_j=0$, $\sigma_{ij}=0$ можно было выразить в форме AY, где A — матрица $m\times k$ с ненулевыми строками и Y—k-мерный случайный вектор, компоненты которого независимы: мера μ_G должна аннулироваться везде, за исключением k лучей, проходящих через начало. Если это не так, то как указано в теореме 2, распределение вектора $\mathbf{x}$ можно только аппроксимировать последовательностью $A_m Y_m$.

В конце статьи указывается связь полученных результатов с теорией вероятностных процессов с независимыми приращениями. F. Zitek

3988. **Устойчивые распределения Коши и «явная формула» Меллина. Винтнер** (Cauchy's stable distributions and an «explicit formula» of Mellin. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 4, 819—861 (англ.)

Рассматриваются симметричные устойчивые законы с характеристической функцией (х. ф.) $e^{-|t|^\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 2$. Делается ряд замечаний о связи между их преобразованиями Лапласа, Меллина и Стилтьеса. Типичная формула: при $0<\alpha<1$,

$$\beta=2\alpha,\quad e^{-t^\alpha}=\int_0^\infty e^{-ts}f_\alpha(s)\,ds\quad(t<0)$$

и

$$F_\beta(t)=\int_0^\infty e^{-s^\beta}\cos ts\,ds$$

имеем $F_\beta(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{t^2}{4s^2}\right)f_\alpha(s)\,ds$;

$$F_\beta(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty E\left(\cdot\frac{t}{s},\ x\right)I\exp\left(-\lambda+i\mu\right)x^\alpha\,dx,$$

где $E(t,\ x)=I\int_0^\infty\exp\left(ixs-\frac{t^2}{s^2}\right)ds$. В приложении доказываются некоторые несложные теоремы о симметрических L-распределениях: такие распределения унимодальны и абсолютно непрерывны при $x>0$. Исследуется условие их дифференцируемости.

Примечание референта. Аналогичные формулы для устойчивых законов выведены В. М. Золотаревым (РЖМат, 1957, 678). Ю. В. Линник

3989. **Об интегрировании некоторых простых или сложных характеристических функций. Розенштиль** (Sur l'intégration de certaines fonctions caractéristiques simples ou composées. Rosenstiehl Pierre), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 15, 2213—2215 (франц.)

Когда функция распределения $F(x)$ случайной положительной величины X такова, что $\int_0^\infty x^{-n}dF(x)<\infty$, то математическое ожидание величины $1/X^n$, где n—целое, существует и может быть вычислено без знания ее функции распределения. Если характеристическая функция X есть $\varphi(t)$, то математическое ожидание $1/X^n$ получается интегрированием n раз функции $m(t)=\varphi(-it)$. Эти выводы применяются для вычисления математического ожидания $1/X^n$, если плотность случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}}x^\alpha e^{-x/\beta},\quad(x>0,\quad\alpha>-1,\quad\beta>0).$$

Вышеприведенная процедура распространяется также на многомерные случайные величины. Б. М. Клосс

3990. **К оценке математических ожиданий. Рихтер** (Zur Abschätzung von Erwartungswerter. Richter H.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 266 (нем.)

Приводятся теоремы, связанные с задачей отыскания точной верхней границы математического ожидания данной функции $f(x)$ в классе одномерных распределений, сосредоточенных на некотором борелевском множестве A оси x, для которых существуют и фиксированы математические ожидания λ_ν n функций $l_\nu(x)$ и существует Ef. О. В. Шалаевский

3991. **О единственности среднего в смысле Досса для случайных элементов из некоторых банаховых пространств. Наср** (Sur l'unicité de la moyenne de Doss des variables aléatoires situées dans quelques espaces de Banach. Nasr Saad K.), Colloq. math., 1957, **5**, № 1, 85—94 (франц.)

Элемент a из метрического пространства D называется средним в смысле Досса случайного элемента x из D, если при всех $\lambda\in D$, $\rho(a,\ \lambda)\leqslant E\rho(a,\ x)$ (Doss S., Bull sci. math., 1949, **73**, 48—72).

В предположении $E\|x\|<\infty$ устанавливается существование и единственность среднего в смысле Досса для случайного элемента x из пространства C всех непрерывных функций на [0,1], пространства c всех сходящихся последовательностей, пространства l всех абсолютно сходящихся последовательностей. При дополнительных предположениях доказывается также существование и единственность среднего Досса для случайного элемента из пространства L всех измеримых функцио на [0,1]. М. И. Ядренко

3992. О покрытии окружности случайно расположенными дугами. Дворецкий (On covering a circle by randomly placed arcs. Dvoretzky Aryeh), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 4, 199—203 (англ.)

Пусть C — окружность длины 1 и a_i $(i=1,2,\ldots)$ — последовательность неотрицательных чисел, $a_i<1$; A_i $(i=1,2,\ldots)$ — дуги длины a_i на C, причем предполагается, что центры этих дуг равномерно и независимо распределены на C.

Легко видеть, что для того чтобы дуги A_i покрывали почти всю (по мере Лебега) C с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_1^\infty a_i=\infty$.

Теорема 1. Если a_i $(i=1,2,\ldots)$ — монотонно невозрастающая последовательность и $\overline{\lim}_{i\to\infty}\left(ia_i-2\log\frac{1}{a_i}\right)>-\infty$, то вероятность того, что вся C покрыта бесконечное число раз, равна 1.

Теорема 2. Существует последовательность a_i $(i=1,2,\ldots)$, $\sum_1^\infty a_i=\infty$, для которой вероятность окружности C быть покрытой бесконечное число раз равна 0. Эти результаты применяются в теории сходимости степенных рядов. M. Rosenblatt-Roth

3993. Оценки для глобальной центральной предельной теоремы. Агнью (Estimates for global central limit theorems. Agnew Ralph Palmer), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 1, 26—42 (англ.)

Глобальной формой центральной предельной теоремы автор называет утверждение $C_n^{(p)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_n(x)-\Phi(x)\right|^p dx\to 0$, где $F_n(x)$ — функция распределения нормированной суммы случайных величин, $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения, $p>1/2$ — некоторое постоянное. Оценивание интегралов $C_n^{(p)}$ производятся при помощи оценки

$$F(x)\leqslant\frac{1}{1+x^2},\ x\leqslant 0,$$

и

$$F(x)\geqslant 1-\frac{1}{1+x^2},\ x\geqslant 0, \qquad (1)$$

справедливой для функций распределения $F(x)$, удовлетворяющей условиям $\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)=0$ и $\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)=1$. Неравенство (1) приводит к оценке $\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)-\Phi(x)|\,dx\leqslant\pi-(2/\pi)^{1/2}$. Далее выводятся оценки: а) $C_n^{(2)}=(6\sqrt{\pi n})^{-1}+O(n^{-2})$, б) $C_n^{(2)}=3(1280\sqrt{\pi n^2})^{-1}+O(n^{-3})$. В случае а) $F_n(x)$ — функция распределения суммы n независимых и одинаково распределенных величин ξ_k, принимающих значения ± 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. В случае б) каждое слагаемое ξ_k равномерно распределено на интервале $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, причем специально изучаются малые значения n. Вычисления осуществляются при помощи формулы Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)-\Phi(x)]^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\varphi(t)-\exp(-t^2/2)}{t}\right)^2dt,$$

где $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)\,dF(x)$. Н. А. Сапогов

3994. Усиленный закон больших чисел для выборки из равномерно распределенной случайной величины. Постников А. Г., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 3, 433—438

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ — последовательность независимых выборочных значений случайной величины равномерно распределенной на [0,1]; тогда с вероятностью 1 эта последовательность чисел образует вполне равномерно распределенную последовательность (РЖМат, 1956, 3727). Это свойство выборки из равномерно распределенной случайной величины, по мнению автора, может служить обоснованием статистического способа вычисления интегралов произвольной кратности. А. А. Бобров

3995. Несколько предельных теорем для неоднородных процессов Маркова. Фукс (Some limit theorems for nonhomogeneous Markoff processes. Fuchs A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **86**, № 2, 511 (англ.)

Пусть $x(t)$ — марковский процесс. Если процесс однороден, то из известного условия (D) Деблина следует существование стационарного распределения вероятностей. При этом распределение $x(t)$ равномерно стремится к стационарному распределению, когда $t\to\infty$, каково бы ни было начальное распределение (распределение $x(0)$). Автор обобщает условие Деблина на неоднородный случай. Предполагая, что для данного неоднородного процесса существует стационарное распределение, он доказывает, что при выполнении условия (D^1) (аналогичного условию (D) Деблина) распределение $x(t)$ сходится к стационарному, если начальное распределение $\Phi(0,E)$ удовлетворяет условию $\Phi(0,E)\ll H\Lambda(E)$, где $\Phi(t,E)=P\{x(t)\in E\}$, H — положительная константа, не зависящая от E (борелевское множество в R^1). В конце статьи даются приложения этой теоремы к исследованию функций $\lambda(x(t))$, где $\lambda(\cdot)$ измерима по Борелю и ограничена на действительной оси. Т. А. Сарымсаков

3996. Закон больших чисел для двойных последовательностей случайных величин. Барра (Lois des grands nombres pour des suites doubles de variables aléatoires. Barra Jean-René), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 21, 2999—3000 (франц.)

Пусть $X_1,\ldots,X_n,\ldots;\ Y_1,\ldots,Y_m,\ldots$ — две независимых одна от другой последовательности независимых случайных величин, причем все X_i имеют функцию распределения $F(x)$, все Y_j — $I(y)$. Рассматривается вопрос об условиях сходимости величины

$$S_m^n=\frac{1}{nm}\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant m}}H(X_i,Y_j)$$

к своему математическому ожиданию при одновременном возрастании индексов n и m, где $H(x,y)$ — функция, измеримая относительно $F(x)$ и $I(y)$. Обозначая функцию распределения величины $Z=H(X_i,Y_j)$ через $\Phi(z)$, можно сформулировать основные результаты работы следующим образом:

1. Если $n[1-\Phi(n)+\Phi(-n)]\to 0$ $(n\to\infty)$, то $S_m^n-a_{nm}\to 0$ по вероятности, когда n и m одновременно неограниченно возрастают, где $a_{nm}=\int_{-nm}^{nm}zd\Phi(z)$.

2. Если существует математическое ожидание $E(Z)$, то почти наверное $S_m^m\to E(Z)$ $(m\to\infty)$.

3. Если существует $E(|Z|^{3/2})$, то почти наверное $S_m^n\to E(Z)$ $(n,m\to\infty)$.

Формулируется также условие сходимости функции рас-

пределения величины S_m^n к нормальному закону. Некоторые формулировки не точны, имеются опечатки.

А. А. Бобров

3997. Преобразование координат и броуновское движение. Бертотти (Trasformazioni di coordinate e movimento browniano. Bertotti Bruno), Boll. Unione mat. ital., 1958, **14**, № 2, 217—223 (итал.; рез. англ.)

Изучается поведение величин, участвующих в марковском процессе на дифференцируемом многообразии, при изменении системы координат. Такие процессы можно характеризовать инвариантным образом при помощи моментов координатных приращений. Результаты применяются в теории броуновского движения. Резюме автора

3998. Проблемы, связанные со случайным входом. Колс (Problems of random inputs. Coales J. F.), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 5, 184—189 (англ.)

Работа является окончанием статьи автора (РЖМат, 1958, 10382). Содержится обзор математических методов, применяемых при анализе систем автоматического регулирования в случае, когда входной процесс является случайным.

Разбираются понятия: переходная функция прибора; функция корреляции между входным и выходным процессами; самонастраивающаяся оптимальная система. Рассматриваются системы контроля с ограниченной выходной мощностью. Библ. 15 назв. Б. С. Цыбаков

3999. О сходимости последовательности стохастических процессов. Кимм (On the convergence of sequences of stochastic processes. Kimme Ernest G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, № 1, 208—229 (англ.)

Результаты Донскера (Donsker M. D., Memoirs of the Amer. Math. Soc., 1951, № 6, 1—12) обобщаются на случай сходимости распределений сумм последовательности серий бесконечно малых независимых случайных величин к произвольным безгранично делимым распределениям. Последовательности серий независимых случайных величин $\{x_{nk}, k = 1, 2, 2, \ldots, k_n, n \geqslant 1\}$, удовлетворяющих условию $\lim_{n\to\infty} \max_{1<k<k_n} P\{|x_{nk}| > \varepsilon\} = 0$, ставится в соответствие последовательность случайных процессов $\{x_n(t)\}$, где $x_n(t) = S_{nkn(t)}$, $S_{nk} = \sum_{j=1}^{k} x_{nj}$, $k_n(t) = [t k_n]$. Пусть $\varphi_n(t_1, \ldots, t_m, \mu_1, \ldots, \mu_m)$, $n \geqslant 1$, $\varphi(t_1, \ldots, t_m, \mu_1, \ldots, \mu_m)$—характеристические функции последовательностей случайных величин $\{x_n(t_j), j = 1, \ldots, m\}$, $\{x(t_j), j = 1, \ldots, m\}$. Определение: последовательность случайных процессов $\{x_n(t), n \geqslant 1\}$ сходится равномерно по распределению (uniformly in distribution) к процессу $\{x(t)\}$, если для любого целого m и $M > 0$ имеем $\varphi_n(t_1, \ldots, t_m, \mu_1, \ldots, \mu_m) \to \varphi(t_1, \ldots, t_m, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ равномерно по всем значениям t_j и μ_j, удовлетворяющим условиям $|\mu_j| \leqslant M (j = 1 \ldots m)$. Теорема 5 дает весьма простые необходимые и достаточные условия равномерной сходимости по распределению к процессу с независимыми приращениями без фиксированных точек разрыва. Далее предполагается, что $\{x_n(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, — последовательность сепарабельных случайных процессов с независимыми приращениями, равномерно сходящихся по распределению к сепарабельному случайному процессу $\{x(t)\}$ без фиксированных точек разрыва.

Доказывается, что для любого N $\lim_{n\to\infty} P\left\{\alpha_j \leqslant x_n(t) \leqslant \beta_j, \frac{j-1}{N} < t \leqslant \frac{j}{N}, 1 \leqslant j \leqslant N\right\} = P\left\{\alpha_j \leqslant x(t) \leqslant \beta_j, \frac{j-1}{N} < t < \frac{j}{N}, 1 \leqslant j \leqslant N\right\}$, если только последовательность чисел α_j, β_j ($\alpha_j < \beta_j$, $j = 1, \ldots, N$) является точками непрерывности вероятности в правой части равенства. Теорема 9 утверждает, что последовательность случайных величин $F[x_n(t)]$ слабо сходится к величине $F[x(t)]$ для всякого функционала $F[\cdot]$, определенного на пространстве D действительных функций, равномерно непрерывного в равномерной топологии на D и такого, что если последовательность $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset D$ ограниченно сходится к функции $f \in D$, исключая, быть может, счетное подмножество $(0,1)$, то $\lim_{n\to\infty} F[f_n] = F[f]$.

Определение пространства D в работе не уточнено, но, по-видимому, под D можно понимать пространство всех действительных функций на $(0,1)$, имеющих не более счетного множества точек разрыва. В более общем виде проблема слабой сходимости функционалов от выборочных функций случайных процессов рассматривалась Прохоровым (РЖМат, 1957, 8789) и Скороходом (РЖМат, 1957, 666, 8050). И. И. Гихман

4000. Некоторые свойства вероятностных процессов, локально непрерывных по вероятности. Адхикари (Quelques propriétés des processus stochastiques localement continus en probabilité. Adhikari Bishwanath Prosad), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 8, 1000—1002 (франц.)

Пусть T — вещественный интервал и $\{x_t, t \in T\}$ — вероятностный процесс, заданный на пространстве с мерой (Ω, B_T, μ). Пусть для $S \subset T$ символ B_S обозначает наименьшее борелевское поле такое, что все x_t, $t \in S$, измеримы относительно него. Если f — функция, измеримая относительно B_T, то, как известно (Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы. М., 1956, стр. 543), существует счетная последовательность $S \subset T$ такая, что f измерима относительно B_S. Здесь S зависит от f. В статье утверждается, что если процесс $\{x_t, t \in T\}$ локально непрерывен по вероятности μ, то для любой счетной S, всюду плотной в T, найдется измеримая относительно B_S функция f', совпадающая с f почти всюду по μ.

Пусть μ_1, μ_2 — две меры на (Ω, B_T), $\mu_1 \ll \mu_2$. Пусть $f_j^{(t_1, \ldots, t_\mu)}$ обозначает плотность распределения вероятностей совокупности случайных величин $x_{t_1}, \ldots, x_{t_\mu}$ при мере μ_j, $j = 1, 2$. Если процесс x_t локально непрерывен по μ_2, то почти всюду по μ_2

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{f_1^{(t_1, \ldots, t_\mu)}}{f_2^{(t_1, \ldots, t_\mu)}},$$

где t_j выбираются из любой счетной последовательности S, всюду плотной в T.

В статье приведен еще один результат, который касается классов мер на (Ω, B_T), и одно условие абсолютной непрерывности мер. Доказательств нет. F. Zitek.

4001. О стохастических процессах, связанных с некоторыми физическими регистрирующими приборами. Такач (On stochastic processes connected with certain physical recording apparatuses. Takács L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 3-4, 363—380 (англ.; рез. русск.)

Пусть имеется случайная последовательность моментов $t_i > 0$ такая, что $t_{n+1} - t_n = \xi_n$ $(n = 0, 1, \ldots; t_0 = 0)$ — одинаково распределенные независимые случайные величины с общей функцией распределения $G(x)$ $(G(0) < 1)$. Предполагается, что в моменты наступления событий возникает некоторый сигнал со случайной амплитудой $\chi > 0$, который через время $u > 0$ после момента наступления события становится равным $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$ ($\alpha > 0$ — постоянная). Пусть χ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — амплитуды соответствующих сигналов, причем χ_i — независимые одинаково распределенные величины с общей функцией распределения $H(x)$, и пусть $\tau_t(t) = \sum_{0<t_n<t} f(t - t_n, \chi_n)$.

Изучается вероятность $P(\eta(t) \leqslant x) = F(t, x)$ при $t \to \infty$. Доказывается, что процесс $\eta(t)$ является марковским только в том случае, если последовательность моментов $\{t_n\}$ — пуассоновский процесс Если $\eta(t_n - 0) = \eta_n$, $P(\eta_{1n} \leqslant x) = F_n(x)$, то последовательность $\{\eta_n\}$ есть марковская цепь.

Теорема 1. Если $E\chi_n = \zeta < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то последовательность $\{F_n\}$ сходится к некоторому распределению $F(x)$ независимо от F_1 при $n \to \infty$. $F(x)$ является единственным решением интегрального уравнения $F(x) = \int_0^\infty K(x, y)dF(y)$, где $K(x, y) = \int_0^\infty H(xe^{au} - y)\,dG(u)$.

Теорема 2. Если $E\chi_n = \zeta < \infty$, $E\xi_n = \theta < \infty$ и $G(x)$ не является решетчатым распределением, то существует $F^*(x) = \lim_{t\to\infty} F(t, x) = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty K(xe^{au})(1 - G(u))du$, причем $K(x) = \int_0^\infty F(x - y)aH(y)$. Результаты применяются к проблемам счетчика Гейгера — Мюллера и электронного множителя. Даются полные доказательства, в которых употребляются предыдущие результаты автора (РЖМат, 1956, 3219).

Примечание референта. Стационарная последовательность случайных моментов $t_i (i = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\xi_n = t_{n+1} - t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ есть независимые случайные величины, была изучена Пальмом (Palm C., Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr, Ericsson Technics, 1943, 44, 1 — 189) и Хинчиным (РЖМат, 1957, 5032); последний назвал ее „потоком с ограниченным последействием". M. Rosenblatt-Roth

4002. Метод обращения свертки (композиции) гистографических функций. Турнари (Pratique de l'inversion du produit de composition de fonctions histographiées. Tournalie Max), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 16, 1301—1303 (франц.)

Кратко сообщается о методе решения интегрального уравнения вида

$$r'(x) = s(x) + \int_{-\infty}^{\infty} a(x-y)f(y)dy,$$

где $r'(x)$, $a(x)$ — данные функции, $s(x)$ — реализация случайной функции, $f(x)$ — неизвестная функция.

Метод основан на приведении интегрального уравнения к матричному уравнению специального вида с бесконечным числом элементов. Матричное уравнение решается с помощью преобразования Фурье.

В. П. Швальб

4003. Свойства случайных функций. Палмер (Properties of random functions. Palmer D. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 672—686 (англ.)

Автор разбирает зависимость между максимумами, минимумами и нулями двух случайных функций, корреляция и автокорреляция которых известны. Рассматриваются распределение интервалов между последовательными нулями и максимумами и распределение длин интервалов, отсекаемых горизонтальной прямой. Результаты приложимы к изучению затухания длинноволновых радиосигналов. По резюме автора

4004. О стохастическом процессе случайного шума. Кавата (On the stochastic process of random noise. Kawata Tatsuo), Kodai Math. Semin Repts, 1955, 7, № 2, 33—42 (англ.)

В случайные моменты времени t_i $(i = 0, 1 \ldots)$, распределенные по закону Пуассона с параметром c, появляются события с случайной интенсивностью U_i и с последействием, определяемым величиною $U_i\,\Phi(t)$, где U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ независимы друг от друга, $\Phi(t)$ — неотрицательная действительная функция на $(-\infty, +\infty)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\,dt = a < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(t)\,dt = b < +\infty. \quad (1)$$

Пусть $y(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — стохастический процесс, траектории которого параллельны оси t и в моменты наступления i-го случайного события совершают скачок величины U_i.

Пусть $E(U_i) = \alpha$, $E(U^2_i) = \beta < +\infty$, $Y(t) = y(t) - ct$, $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t - \Delta)\,dY(\Delta)$. Пусть $g(n)$ — характеристическая функция U_i. Доказывается, что если $\Phi(t)$ имеет производную

$$\Phi'(t) \in L_1(-\infty, +\infty);$$
$$\Phi'(t) \in L_2(-\infty, +\infty). \quad (2)$$

и

$$\frac{\Phi(t + h) - x(t)}{h} \quad (3)$$

сходится в среднем квадратическом к $\Phi'(t)$, тогда, если $X'(t)$ является пределом в среднем квадратическом отношения $\frac{X(t + h) - X(h)}{h}$, то характеристическая функция случайного вектора $\{X(t), X'(t)\}$ есть

$$\exp\Big[c\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{g\left(\Phi(s)u + \Phi'(s)v\right) - 1 - ia\left(\Phi(s)u + \Phi'(s)v\right)\Big\}ds\Big].$$

Доказывается, что если $\Phi(t)$ монотонна при $|t| > t_0 > 0$ и $\lim_{|t|\to\infty}\Phi(t) = 0$; $|\Phi(t)| \leqslant A_L|t|^{-L}$ для всякого L, при больших $|t|$; $\Phi(t)$ удовлетворяет условию Липшица с параметром $p > 0$; U_i ограничено, $0 \leqslant U_i \leqslant B$; то $X(t)$ непрерывна с вероятностью 1.

Пусть $\Phi(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ и $\Phi(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$,

$$\int_{|u|>x} |\Phi(u)|^2\,du = O(x^{-s})$$

при $x \to \infty$ и пусть $\varphi(u)$ — преобразование Фурье $\Phi(t)$, так что

$$\varphi(u) \in L_1(-\infty, +\infty).$$
$$\varphi(u) = O(e^{-\theta(|u|)}) \quad (4)$$

при $|u| \to \infty$, где $\theta(v)$ является неубывающей функцией при больших v, для которой

$$\int_1^{+\infty}\frac{\theta(v)}{v^2}\,dv = +\infty \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\theta(v)}\,dv < +\infty.$$

Тогда $X(t)$ с вероятностью 1 не обращается тождественно в нуль в каком-либо интервале. Если вместо (4) предполагается

$$\varphi(u) = O(e^{-\lambda|u|}) \quad (\lambda > 0), \quad (5)$$

то $X(t)$ с вероятностью 1 будет аналитической в некоторой полосе, содержащей действительную ось.

Пусть условия (1), (2), (3), (5) выполняются и пусть

$$D(x, y) = P(X(t) \leqslant x, X'(t) \leqslant y),$$

$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,dD(x, y)$ существует.

Тогда, если $J = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{W(\varepsilon) - W(\varepsilon)}{2\varepsilon}$ существует, то среднее число нулей функций $X(t)$ в интервале (a, b) равно

$(b-a)J$. Доказательство получается с помощью результатов Каца (Kac M., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49)
M. Rosenblatt-Roth

4005. Свойства регулярности случайных преобразований. Шпачек (Die Regularitätseigenschaften zufälliger Transformationen. Špaček Antonin), Ber. Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik. Berlin, 1954, Berlin, 1956, 109—111 (нем.)

Формулируется одна общая теорема, из которой следует, что если множество F случайных отображений множества X во множество Y обладает определенным свойством регулярности (T) на некотором классе счетных подмножеств X, то при выполнении условий теоремы этим же свойством обладают почти все отображения из F. Из общей теоремы, в частности, следуют необходимые и достаточные условия для того, чтобы почти все отображения метрического пространства X в Y были равномерно непрерывны (удовлетворяли условию Липшица). Доказательства не приводятся. И. И. Гихман

4006. О периодических случайных функциях. Салес-Вальес (Sobre las funciones aleatorias periodicas. Sales Vallés Francisco de A.), Collect. math., 1957, **9**, № 2, 105—141 (исп.)

Под периодической случайной функцией $X(t)$ с периодом ω фактически понимается случайная функция от t с математическим ожиданием 0 в каждый момент t, совместный закон распределения которой в моменты $t_1, \ldots, t_n$ есть периодическая функция с периодом ω от каждого из аргументов $t_1, \ldots, t_n$. Другие даваемые автором определения периодичности не годятся, так как теоремы 1° и 2° (в приведенной в работе формулировке) неверны вследствие допущенных при их доказательствах элементарных ошибок. Дается необходимое и достаточное условие периодичности центрированной случайной функции $X(t)$ в терминах ковариации $E(X(t)X(t'))$, состоящее в периодичности последней по t и t', а также отмечается, что это равносильно тому, что случайные функции $X(t)$ и $X(t+\omega)$ почти наверное совпадают. Доказываются некоторые элементарные свойства таких функций $X(t)$.

Далее рассматривается линейное пространство с гильбертовой метрикой, точками которого являются пределы линейных комбинаций случайных величин, получающихся из $X(t)$ при всевозможных фиксированных t, где за скалярное произведение точек принимается математическое ожидание произведения отвечающих им случайных величин. Траекторией точки $z = \lim \sum c_n X(t_n)$ называется линия, описываемая в этом пространстве точкой $z(h) = \lim \sum c_n X(t_n + h)$ при изменении h. Для периодической $X(t)$ все траектории будут замкнутыми кривыми. Периодическая случайная функция $X(t)$ называется выпуклой, если любое конечное число случайных величин, получающихся из нее при фиксировании различных (по модулю периода) значений t, будут линейно независимы как точки указанного пространства. Показывается, что для нормированной выпуклой периодической случайной функции $X(t)$ существует единственная нормированная траектория, сводящаяся в одну точку, а именно $\frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(t)\,dt$, называемой временной средней этой случайной функции, и отмечается, что эргодическая гипотеза будет состоять здесь в требовании $\int_0^\omega X(t)\,dt = 0$, т. е. функция $\int_0^t X(t)\,dt$ будет тогда периодической с периодом ω. Рассматриваются также стационарные периодические случайные функции и их разложения в тригонометрический ряд. С помощью построения „касательных" стационарных случайных функций находятся формулы для радиусов кривизны траекторий периодических случайных функций. Кроме периодических, рассматриваются также квазипериодические случайные функции, представляющие собой суммы периодической случайной функции и независимой от нее чисто стохастически меняющейся случайной переменной. Отметим, что в работе, кроме указанных выше, имеется еще много других неточностей.
М. Ф. Бокштейн

4007. Асимптотические свойства кривой броуновского движения в пространстве N измерений. Леви (Propriétés asymptotiques de la courbe du mouvement brownien à N dimensions. Lévy Paul), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 11, 689—690 (франц.)

Пусть Γ — кривая в N-мерном евклидовом пространстве E_N, являющаяся геометрическим местом точек $X(t)$, координаты которых суть N независимых наблюдений над функцией броуновского движения, Γ_t — дуга этой кривой, соответствующая сегменту $[0, t]$ оси t, $L_p(t)$ — максимальная длина p-звенной полигональной линии, вписанной в Γ_t так, что ее вершины следуют по возрастанию t.

При $t \to l$ ($l = 0$ или $l = \infty$) к $L_p(t)$ применим закон повторного логарифма, т. е.

$$P\left\{\lim_{t\to l} \sup \frac{L^2_p(t)}{2t \log|\log t|} = 1\right\} = 1.$$

Для конечной дуги C некоторой непрерывной кривой и гомотетической дуги γ_t относительно Γ_t, т. е. геометрического места точек $x_t(\tau) = X(\tau)/\lambda(t)$ ($t \in [0, t]$) при равенстве длин C и γ_t с вероятностью 1 существует последовательность t_p из t, стремящаяся к l и такая, что $\gamma_{t_p} \to C$. При C спрямляемой длины 1 почти наверное

$$K = \lim_{p\to\infty} \sup \frac{\lambda(t_p)}{\sqrt{2t_p \log|\log t_p|}} \leqslant 1$$

и почти наверное можно выбрать t_p так, что $\gamma_{t_p} \to C$ и $K \to 1$. Меры наименьших выпуклых площадей, содержащих Γ_t, подчиняются закону повторного логарифма при $N = 2$. Методы изучения мер могут быть перенесены на случай $N > 2$. Даны модификации результатов для дискретного параметра t, принимающего целочисленные значения. В. А. Михайлов

4008. Непрерывные стохастические процессы и стохастические уравнения. Маруяма (Continuous Markov processes and stochastic equations. Marnyama Gisiro), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, **4**, № 1, 48—90 (англ.)

В работе сопоставляются два известных метода изучения марковских процессов с непрерывным параметром: метод дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений для функции перехода $P\{y(t) \leqslant y \mid y(s) = x\}$ и метод стохастических уравнений, выражающих непосредственным образом свойства траектории процесса $y(t)$.
M. Rosenblatt-Roth

4009. Состоятельность и адэкватность модели Пуассона—Маркова для плотности флуктуаций. Патил (The consistency and adequacy of the Poisson—Markoff model for density fluctuations. Patil V. T.), Biometrika, 1957, **44**, № 1-2, 43—56 (англ.)

Рассмотрим случайное блуждание частиц в пространстве, разделенном на конечное число областей. Частицы движутся независимо друг от друга. Если N_{tk} есть число частиц в области k в момент t, то через $\overline{N}_t$ обозначим вектор с этими компонентами. Постулируются такие условия, которые превращают процесс $\{\overline{N}_t\}$ в марковский; при этом распределение $\overline{N}_t$ в единичный момент соответствует распределению для k независимых пуассоновских величин. Такой процесс называется также прс-

цессом эмиграции-иммиграции. Подобный процесс используется как приближенная модель для определения числа независимо движущихся частиц, находящихся в особых областях пространства, например, для изучения сперматозоидов. Постулирование модели, верное для всех способов разбиения пространства, оказывается несовместимо с любым типом стохастического движения, приводящего к $\{\bar{N}_t\}$. Предположение о бесконечной малости переходных вероятностей, правда, обеспечивает состоятельность модели. Чтобы изучить соответствие такой модели с данными подсчета сперматозоидов, применяется асимптотическое χ^2-свойство подходящего критерия, основанного на последовательных корреляциях. Делается указание на значимое отклонение статистических данных от построенной модели, особенно в мультирегиональном случае.

Б. М. Клосс

4010. Некоторые новые результаты в теории марковских цепей. Чжун (Some new developments in Markov chains. Chung K. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **81**, № 1, 195—210 (англ.)

Рассматривается стационарная марковская цепь $x(t)$, $t \geqslant 0$, с начальным распределением p_i и переходными вероятностями p_{ij}, $t \geqslant 0$, $i, j = 1,2,\ldots$ и $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = p_{ij}(0)$. Пусть $q_i = p'_{ii}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t}$. Пусть $q_i > 0$, $P\{x(0) = i\} = 1$, $\lambda_i = \lambda_i(\omega)$ — „первое время пребывания“ в состоянии i, т. е. длина первого t-интервала, в котором $x(t,\omega) = i$. Пусть $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\omega) = \inf_{(\omega)\lambda_i < t; x(t,\omega) = j} t$. Доказывается, что λ_i и $\alpha_{ij} - \lambda_i$ независимы. При $0 < q_i < \infty$ доказываются утверждения: I. $P\{x(t) = j \mid \lambda_i = s\}$ является непрерывной функцией $r_{ij}(t-s)$ для $0 < s < t < \infty$ такой, что $p_{ij}(t) = \int_0^t q_i e^{-q_i(t-s)} r_{ij}(s)\,ds + \delta_{ij} e^{-q_i t}$, $\sum_s r_{ij}(s) = 1$, $r_{ij}(s+t) = \sum_k r_{ik}(s)\, p_{kj}(t)$ для всех $s > 0$, $t > 0$.

II. Распределение G_{ij} величины $\alpha_{ij} - \lambda_i$ является непрерывной функцией в $[0, \infty)$ такой, что $r_{ij}(0) = G_{ij}(0) = \frac{(1-\delta_{ij})\, q_{ij}}{q_i}$, где $q_{ij} = p'_{ij}(+0)$, причем $F_{ij}(+\infty) = G_{ij}(+\infty)$. Распределение F_{ij} величины α_{ij} обладает непрерывной производной $F'_{ij}(t) = q_{ji}[G_{ij}(t) - F_{ij}(t)]$ в $[0, +\infty)$.

III. $p_{ij}(t)$ обладает непрерывной производной в $[0, \infty)$, $p'_{ij}(t) = q_i[r_{ij}(t) - p_{ij}(t)]$, такой, что $\sum_j p'_{ij}(t) = 0$,

$$p'_{ij}(t+s) = \sum_k p'_{ik}(t)\, p_{kj}(s), \qquad (1)$$

$\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = 0$. Вторая производная существует почти всюду в виде конечного числа. Указываются разные связи между $p_{ij}(\cdot)$, $r_{ij}(\cdot)$, $F_{ij}(\cdot)$, $G_{ij}(\cdot)$. Определяется „послевыходной процесс“ (post-exit process), присоединенный к марковской цепи $x(t)$ со стабильным состоянием i (т. е. $q_i \neq 0$):

$$y(t) = y(t,\omega) = x(\lambda_i(\omega) + t; \omega), \quad t > 0.$$

Если $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l$ и j_k $(k = 1,2,\ldots,l)$ — любые состояния, то

$$P\{y(t_\nu) = j_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l\} = r_{ij_1}(t_1) \prod_{\nu=1}^{l=1} p_{j_\nu j_{\nu+1}}(t_{\nu+1} - t_\nu).$$

Изучается также „довходной процесс“ („pre-entrance process“).

Если $P\{x(0) = i\} = 1$, $q_j \neq 0$, пусть $\tau_j^{(n)}(\omega)$ — n-й вход в состояние j и $\lambda_j^{(n)}$ — n-е время пребывания в состоянии j, причем $P\{\tau_j^{(1)} \leqslant t\} = F_{ij}(t)$, $P\{\tau_j^{(n+1)} - \tau_j^{(n)} \leqslant t\} = F_{jj}(t)$. Имеем

$$\sum P\left\{\tau_j^{(n)} \leqslant s\right\} = \delta_{ij}\varepsilon(s) + \sum_{n=0}^{\infty} F_{ij}(s) * F_{jj}^{n*}(s) = U_{ij}(s),$$

где F^{n*} — n-я свертка F с самим собой, и $F_{jj}^{0*}(s)$ — единичное распределение $\varepsilon(s)$; $U_{ij}(s)$ — математическое ожидание числа входов в состояние j за время s (Doob J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 422—438).

Доказывается, что если $q_i < \infty$, $q_j < \infty$, то $u_{ij} = \left[U_{ij}(s) - \delta_{ij}\varepsilon(s)\right]' = \int_0^s F'_{ij}(s-v)\, d\left[\sum_{n=0}^{\infty} F_{jj}^{n*}(v)\right]$ непрерывна для всех $s > 0$, причем $p_{ij}(t) = \int_0^t e^{-q_i(t-s)} u_{ij}(s)\,ds + \delta_{ij} e^{-q_j t}$, $p'_{ij}(t) = u_{ij}(t) - q_j p_{ij}(t)$.

Если $q_k < \infty$ для всех k, то $\sum_k p_{ik}(t)\, u_{kj}(s) = u_{ij}(t+s)$,

$$p'_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t)\, p'_{kj}(s). \qquad (2)$$

Уравнения (1), (2) представляют обобщения известных уравнений Колмогорова. M. Rosenblatt-Roth

4011. О стохастических матрицах, связанных с некоторыми процессами очередей. Фостер (On the stochastic matrices associated with certain queuing processes. Foster F. G.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 355—360 (англ.)

Рассматривается неприводимая марковская цепь со счетным числом возможных состояний; пусть $[p_{ij}]$ $(i, j = 0,1,\ldots)$ — ее стохастическая матрица. Доказывается, что цепь будет эргодической, если 1) существует ненулевое решение системы $\sum_{i=0}^{\infty} x_i\, p_{ij} = x_j$ $(j = 0,1,\ldots)$ такое, что $\sum_i |x_i| < \infty$, или 2) существует неотрицательное решение системы неравенств $\sum_{j=\infty}^{\infty} p_{ij} y_j \leqslant y_i - 1$ $(i \neq 0)$ такое, что $\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j} y_j < \infty$.

Дается новое доказательство известного факта о том, что цепь транзитивна, если и только если существует ограниченное непостоянное решение системы $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j = y_i$ (Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1953).

Доказывается, что цепь будет возвратной, если существует решение системы неравенств $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \leqslant y_i$, для которого $y_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Эти результаты применяются к задачам скученности. M. Rosenblatt-Roth

4012. О переходных вероятностных функциях марковского процесса. Маруяма (On the transition probability functions of the Markov process. Maruyama Gisirō), Natur. Sci. Rept. Ochanomizu Univ., 1954, **5**, № 1; 10—20 (англ.)

Изучается связь между стохастическим уравнением Ито (Itō K., Proc. Japan. Acad., 1946, **22**) и дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа, определяющими марковские процессы.

Пусть $m(t,x)$, $\sigma(t,x)$ $(-\infty < x < \infty$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ непрерывны по t, x, причем $|m(t,x) - m(t,x')| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,x')| \leqslant c\,|x - x'|$, где c не зависит от t, x. Пусть некоторый марковский процесс $z(t)$ определяется из уравнения Ито

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} m(\tau, z)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau, z)\, dB(\tau), \qquad (1)$$

где $B(t)$ — нормированный винеровский процесс $(B(t_0) = 0$, $E(\Delta B(t))^2 = \Delta t)$. С помощью преобразования $y(t) = \Phi(t, z(t))$, $\Phi(t,z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sigma(\tau,\zeta)}$, уравнение (1) приводится к виду

$$y(t) = y_0 + \int_0^t a(\tau, y)\, d\tau + x(t), \qquad (2)$$

где $x(t)$ — другой нормированный винеровский процесс;

$$a(t, y) = -\frac{\varphi'_t(t, y)}{\sigma(t, \varphi(t, y))} + \frac{m(t, \varphi(t, y))}{\sigma(t, \varphi(t, y))} - \sigma'_\varphi(t, \varphi(t, y));$$

$z = \varphi(t, y)$ — функция, обратная к $y = \Phi(t, z)$.

Пусть функция $a(t, x)$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ непрерывна, $|a(t, x) - a(t, x')| \leqslant c|x - x'|$ и $F(s, x; t, y)$ — переходные функции процесса, определенного из (2). Доказывается, что

$$F(s, y_0; t, x) = \int_{-\infty}^{x} A(s, y_0; t, y)\, B(s, y_0; t, y)\, dy,$$

где $$A = E\{L(y(\cdot)) \mid y(t) = y\},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2(t-s)}\right],$$

$$L(y(\cdot)) = \exp\left[\int_s^t a(\tau, y)\, dy(\tau) - \frac{1}{2}\int_s^t (\tau, y)\, d\tau\right].$$

Пусть $a(t, x)$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ непрерывна по t и x, дважды непрерывно дифференцируема по x, имеет ограниченную первую производную по x и $a_{xx}''(t, x) = O(|x|^k)$ для некоторого $k > 0$. Тогда переходная функция $F(s, x; t, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, один раз по t и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) F(s, x; t, y) = 0.$$

M. Rosenblatt-Roth

4013. Предельные законы для цепей Маркова с конечным числом состояний. Ильяшенко А. А., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 1, 23 (рез. франц.)

Рассматривается однородная цепь Маркова с конечным числом состояний $E_1, E_2, \ldots, E_s$ и матрицей вероятностей перехода

$$P_n^{(s)} = \left\| a_{ij}(n) \right\|_{i,j=1}^{s},$$

зависящей от параметра n.

Вводится случайная величина ξ_n, равная числу попаданий в состояние E_1 за первые n шагов, при условии, что E_1 является начальным состоянием.

Как известно,

$$P\left\{\xi_n \geqslant k+1\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant n-1\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad (1)$$

где x_i — число шагов между $i-1$-ми и i-м возвращениями в E_1.

Автор вычисляет характеристическую функцию случайной величины x_i и, используя преобразование Лапласа-Стилтьеса для функции распределения $\alpha_n\xi_n$ и тождество (1), дает необходимые и достаточные условия для сходимости соответствующим образом центрированных и нормированных величин ξ_n к нормальному закону.

В заключение даются достаточные условия для сходимости к распределениям, отличным от нормального.

Т. А. Сарымсаков

4014. О неоднородных цепях Маркова. Сарымсаков Т. А., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 465—467

Рассматриваются неоднородные цепи Маркова, заданные на последовательности измеримых пространств (X_n, F_n) и управляемые вероятностями перехода на n-м шаге $P_n(x, E)$.

Обозначим через $P_{m, m+n}$ композицию мер $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_{m+n}$. Говорят, что цепь Маркова равномерно подчиняется эргодическому принципу, если для любого m равномерно по $x(\in X_m)$, $y(\in X_m)$ и $A(\in F_{m+n})$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} [P_{m, m+n}(x, A) - P_{m, m+n}(y, A)] = 0.$$

Доказывается теорема: Для того чтобы цепь Маркова равномерно подчинялась эргодическому принципу, необходимо и достаточно, чтобы существовали возрастающая последовательность целых чисел $\{n_i\}$ $(i \geqslant 0, n_0 = 0)$, и последовательность неотрицательных чисел λ_{n_i}, для которых

$$\sup |P_{n_{k-1}+1, n_k}(x, A) - P_{n_{k-1}+1, n_k}(y, A)| < 1 - \lambda_{n_k}$$

(верхняя грань берется по всем $x \in X_{n_{k-1}+1}$, $y \in X_{n_{k-1}+1}$, $A \in F_{n_k}$) и одновременно $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n_k} = \infty$.

Случай конечного числа состояний рассматривается отдельно.

Через $\mathfrak{N}^{(s)}$ обозначается совокупность стохастических матриц $P = (p_{ij})$, $i, j \leqslant s$, не представимых в виде

$$P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix},$$

где L_1, L_2, R — подматрицы (квадратные или прямоугольные), число столбцов матрицы R не больше числа ее строк и, кроме того, матрица R является T-матрицей. T-матрицей называется стохастическая матрица (q_{ij}), для которой существует разбиение всех строк на непустые части A и $\bar{A}$ и разбиение столбцов на непустые части B и $\bar{B}$ такие, что если $q_{ij} > 0$, то $i \in A$, $j \in B$ или $i \in \bar{A}$, $j \in \bar{B}$.

Наименьший положительный элемент матрицы P из $\mathfrak{N}^{(s)}$ называется коэффициентом эргодичности матрицы P.

Доказывается теорема: Для того чтобы цепь Маркова с конечным числом состояний, регулируемая последовательностью матриц $P_n(\in \mathfrak{N}^{(s)})$ с коэффициентами эргодичности λ_n, равномерно подчинялась эргодическому принципу, достаточно, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k$ расходился, где $\bar{\lambda}_k = \lambda_{(k-1)s-k+2}\, \lambda_{(k-1)s-k+s} \cdots \lambda_{k(s-1)}$, $k \geqslant 1$.

Доказательства не приводятся. М. Г. Шур

4015. К проблеме идентификации для функций на конечных марковских цепях. Блекуэлл, Копманс (On the identifiability problem for functions of finite Markov chains. Blackwell David, Koopmans Lambert), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 4, 1011—1015 (англ.)

Пусть $\{X_n\}$ — стационарная марковская цепь с конечным числом состояний (для простоты $1, 2, \ldots, N$), определяемая матрицей вероятностей перехода $M = \| m_{ij} \|$, которая предполагается неприводимой и непериодической и $Y_n = \Phi(X_n)$. Две матрицы M_1 и и M_2 называются эквивалентными (по отношению к Φ), если они определяют одно и тоже совместное распределение $Y_1, Y_2, \ldots Y_n, \ldots$ Конечное множество функций $f_1, f_2, \ldots f_k$, определенных на множестве всех неприводимых непериодических марковских матриц порядка N, называется полным множеством инвариантов, если M_1 и M_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $f_i(M_1) = f_i(M_2)$ для $i = 1, 2, \ldots, k$.

Задача состоит в нахождении минимального полного множества инвариантов. При некоторых дополнительных ограничениях задача решается для двух простых случаев: 1) N произвольно, Φ принимает два значения, 0 и 1, причем $\Phi(1) = 0$, $\Phi(i) = 1$ для $i = 2, \ldots, N$; 2) $N = 4$, $\Phi(1) = \Phi(2) = 0$, $\Phi(3) = \Phi(4) = 1$.

В заключение доказывается теорема, относящаяся к случаю произвольных N и Φ, состоящая в том, что при любых Φ, совместное распределение $Y_1, Y_2, \ldots$

$\ldots Y_n, \ldots$ определяется совместным распределением $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j$, причем $j < 2N^2 + 1$.

Е. А. Баваров, Ю. И. Максимов

4016. О различных обобщениях закона Пуассона на конечные однородные цепи Маркова. Михок (Über verschiedene Ausdehnungen des Poissonschen Gesetzes auf endliche Konstante Markoffsche Ketten. Mihoc George), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954. Berlin, 1956, 43—49 (нем.)

Рассматривается последовательность испытаний, связанных в однородную цепь Маркова с вероятностями переходов, зависящими от параметра τ. Предполагается, что при $\tau \to 0$ переходы от одной группы исходов испытаний к дополнительной группе становятся невозможными, причем $p_{ij}(\tau) \sim c\tau$, $c \neq 0$ $(i = h+1, \ldots, m, j = 1, \ldots, h)$. В случае $n\tau = a$, где n—число испытаний, $n \to \infty$, a=const, указывается обобщенное предельное распределение Пуассона для числа исходов с номером j.

Во втором разделе работы показывается, что в аналогичной ситуации предельное распределение для числа серий в последовательности испытаний, связанных в цепь Маркова, также может быть обобщенным пуассоновым.

И. И. Гихман

4017. Измерение величины информации. Мак-Карти (Measures of the value of information. McCarthy John), Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1956, **42**, № 9, 654—655 (англ.)

Пусть мы имеем совокупность событий A_i с вероятностями p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Автор показывает, что любая выпуклая функция от p_i $(1, 2, \ldots, n)$ может служить мерой величины информации и две такие функции эквивалентны в известном смысле, если они отличаются между собою на линейную функцию от p_i.

Автор приводит следующую схему, рассматривая вопрос о финансовых расчетах между предсказателем и его клиентом:

1) предсказатель сообщает клиенту вероятности событий q_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, где $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$;

2) если возникает событие A_i, то клиент выплачивает предсказателю сумму, равную $f_i(q_1, \ldots, q_n) = f_i(q)$.

Предполагается, что ни предсказатель, ни клиент не могут повлиять на предсказанное событие, хотя предсказатель может выполнить ряд экспериментов для обоснования своего предсказания, а клиент действует, руководствуясь информацией, полученной от предсказателя.

Автор доказывает следующую теорему для математического ожидания оплаты предсказателя: Оплата предсказателя будет безобидной только и если только $f_i(q) = \dfrac{\partial}{\partial q_i} f(q)$, где $f(q)$ — выпуклая однородная функция 1-й степени от q_i. Математическое ожидание оплаты предсказателя равно

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(p) = f(p).$$

Функция $f(q)$, удовлетворяющая условиям теоремы, называется функцией выплаты

Предполагается, что клиент на основе информации предсказателя выбирает доступное ему j-е мероприятие, приносящее ему доход при осуществлении события A_i в размере a_{ij}. В этом случае математическое ожидание платы клиента есть $g(p) = \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$, если j выбрано оптимально. Автор приводит следующую теорему для математического ожидания платы клиента: Теорема 2. Любая функция $g(p)$, определенная для $p_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, является выпуклой и однородной функцией первой степени и может быть записана в форме $g(p) = \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$.

Предположим, что предсказатель располагает априорными вероятностями r_i событий A_i $(i = 1, \ldots n)$ и он может произвести m экспериментов стоимостью $c_1, \ldots c_m$ и что условная вероятность осуществления события A_i в k-м испытании h-го эксперимента равна s_{khi}. Очевидно, что эксперимент, выбранный предсказателем, будет зависеть от r, c, s и функции выплаты.

Две функции выплаты называются эквивалентными, если для любых значений r, c, s предсказатель должен выбрать один и тот же опыт. Автор приводит теорему. Теорема 3. Две функции выплаты $f(q)$ и $f^*(q)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$f(q) = f^*(q) + \sum a_i q_i.$$

А. Г. Корман

4018. Оптимальная система распознавания букв, использующая решающие функции. Чжоу (An optimum character recognition system using decision functions. Chow C. K.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 4, 247—254 (англ.)

Теория решающих функций Вальда применяется к задаче отождествления сигналов, полученных на выходе автоматического устройства при считывании букв, с одной из букв данного алфавита. Предусмотрена возможность пропуска буквы, если нет достаточных оснований для отождествления полученного сигнала ни с одной из букв алфавита. При отождествлении возможны ошибки из-за неидентичности различных печатных изображений одной и той же буквы и наличия помех в электрической цепи устройства.

На выходе устройства сигнал, соответствующий отдельной букве, представляется s-мерным вектором $\mathbf{v} = (v_1 \ldots v_s)$. (Компоненты вектора являются значениями напряжения сигнала на выходе в некоторые моменты времени). Из-за наличия помех и искажений можно считать, что компоненты вектора $\mathbf{v}$ являются случайными величинами. Условные распределения вектора $\mathbf{v}$ при условии, что на вход подана некоторая буква, и априорные вероятности появления букв на входе считаются заданными. По принятому вектору $\mathbf{v}$ следует решить, какая из букв была передана, или же сделать пропуск. Каждому правильному и неправильному решению приписывается некоторый вес, учитывающий значимость такого решения. С помощью результатов Вальда находится оптимальная (байесовская) решающая функция, которая минимизирует средний риск, соответствующий выбранным весам. При некотором выборе весов получается система, в которой байесовская решающая функция дает минимум вероятности неправильного решения при фиксированной вероятности пропуска. На двух примерах показано применение полученных выражений.

Примечание референта. Аналогичная задача рассматривалась Мидлтоном и Ван-Митером (РЖФиз, 1956, 35259).

В. Писаренко

4019. Математическая теория информации. Перес (Matematická teorie informace. Perez Albert), Aplikace mat., 1958, **2**, № 3, 81—105 (чешск.; рез. русск., франц.); **3**, № 1, 1—21 (чешск.)

Обзорная статья, в которой автор разъясняет основы общей теории информации для случая произвольного алфавита, используя при этом оригинальные результаты, полученные им и его сотрудниками и которые были уже опубликованы в сборнике Transactions of the First Prague Conference on Informations theory Statistical Decision Functions and Random processes, Praha, 1957.

F. Zitiek

4020. Замечание об определении количества информации. Цзян Цзэ-пей, Теория вероятностей и ее применения, 1958, **3**, № 1, 99—103 (рез. англ.)

Пусть ξ и η — действительные случайные величины; P_ξ, P_η — вероятностные меры, определенные на некото-

рой σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств действительной прямой G, а $P_{\xi\eta}$ — вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$.

Информацией называется

$$J_1(\xi,\eta)=\sup_{\{S_i\}}\sum_{i=1}^{n}P_{\xi\eta}(S_i)\log\frac{P_{\xi\eta}(S_i)}{P_\xi P_\eta(S_i)},\qquad(1)$$

где $\{S_i\}$ образуют разбиение пространства $G\times G$ на непересекающиеся слагаемые $S_i\in\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$. Пусть $J_2(\xi,\eta)$ и $J_3(\xi,\eta)$ — величины, получающиеся, если рассмотреть в (1) лишь разбиения с элементами $S_i=B\times B'$ ($B\in\mathfrak{B}$, $B'\in\mathfrak{B}$), т. е. разбиения на обобщенные прямоугольники и соответственно лишь разбиения на обычные прямоугольники. Доказывается, что эти три определения информации дают одно и то же число $J(\xi,\eta)$. Если $J(\xi,\eta)<\infty$, то существует обобщенная производная

$$\alpha(x,y)=\frac{dP_{\xi,\eta}}{dP_\xi\,dP_\eta},$$

Если $\alpha(x,y)$ существует, то

$$J(\xi,\eta)=\int\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)\,P_\xi(dx)P_\eta(dy).$$

Все эти факты были использованы в статье Гельфанда и Яглома (РЖМат, 1958, 3936), однако данное там доказательство содержало пробелы. Близкие к рассмотренным в реферируемой статье вопросы изученыаналогичным методом в недавней работе Переса (Trans. of the Prague Conference on Information Theory. Statistical Decision Function, Random processes Praha, 1957, стр. 183—209). Р. Л. Добрушин

4021. Применение рандомизации при исследовании неизвестных функций. Хук (Use of randomization in the investigation of unknown functions. Hooke Robert), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 281, 176—186 (англ.)

Автор рассматривает проблему определения среднего значения функций в заданной области, наблюдаемых в случайно выбранных точках этой области, и проблему наилучшего приближения в среднем таких функций.

Пусть функция $f(x)$ определена в $(n+1)$ равноотстоящих точках $x_0=a$, $x_1,\ldots,x_n=b$ и при этом получены значения $y_0, y_1,\ldots,y_n$ функции. Применяя к интегралу

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

одну из формул параболического интерполирования, получим

$$\hat{I}=(b-a)\sum_{i=0}^{n}k_iy_i,$$

где k_i — коэффициенты Ньютона-Котеса, удовлетворяющие равенству

$$\sum_{i=0}^{k}k_i=1\ .$$

Полагая $y_i=Y_i+\varepsilon_i$, где $Y_i=f(x_i)$, а ε_i — случайная ошибка наблюдения, получаем выражение для суммарной ошибки

$\hat{I}-I=S+R$, где $S=-I+(b-a)\sum_{i=0}^{n}k_iY_i$ — систематическая ошибка, а $R=(b-a)\sum_{i=0}^{n}k_i\varepsilon_i$ — случайная ошибка. В предположении, что ε_i — независимые ошибки с общей дисперсией σ^2, дисперсия R определяется равенством

$$D(R)=(b-a)^2\sigma^2\sum_{i=0}^{n}k_i^2.$$

Очевидно, при $\Sigma k_i=1$, $D(R)$ имеет наименьшее значение при равных k_i, т. е. при приближенном вычислении интеграла по формуле прямоугольников, наименее благоприятной для величины систематической ошибки S. Автор обращает внимание, что выбор степени параболического интерполирования при вычислении интеграла должен быть произведен с учетом величин R и S, чтобы минимизировать суммарную ошибку.

Далее автор рассматривает вопрос, как наилучшим образом произвести наблюдение функции, чтобы получить минимум суммарной ошибки при определении среднего значения функции на (a, b). Интервал делится на p неперекрывающиеся субинтервалы B_i („блоки" или „слои", по терминологии автора) длины Δ_i, так что

$$\Delta=\sum_{i=1}^{p}\Delta_i=b-a.$$

Внутри каждого блока производится случайная выборка q точек x_{i1}, $x_{i2},\ldots x_{iq}$.

В каждой точке производится r наблюдений.

Таким образом, имеем pqr наблюдений y_{ijk} ($i=1,\ldots,p$; $j=1,\ldots,q$; $k=1,\ldots,r$) величины неизвестной функции $f(x)$ в точках x_{ijk}.

Автор приходит к выводу, что при необходимости иметь N наблюдений, следует при определении среднего значения функции для минимизации суммарной ошибки брать наименьшие значения для q и r ($q=2$, $r=2$, а p определяется равенством $N=pqr$). А. Г. Корман

4022. Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей (Москва сен.-март 1957—58 г.). Теория вероятностей и ее применения, 1958, **3**, № 2, 212—216

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4023. Решение статистических задач при помощи простых чисел. Саблие (Résolution des problèmes de statistique à l'aide des nombres premiers. Sabliet Samuel), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 7, 1006—1008 (франц.)

Обсуждается способ, предложенный автором в статье под тем же заглавием (РЖМат, 1958, 10097).

А. К. Митропольский

4024. Проблема выбора случайных чисел. Вуд (A problem in selecting random numbers. Wood S.), Operat. Res. Quart., 1956, **7**, № 4, 107—110 (англ.)

Обсуждаются конструктивные принципы быстродействующей системы выбора случайных чисел. Критикуется существующий способ проведения тиражей лотереи и т. п.— использование системы корешков в барабане. Предлагаемая машина „Ernie" свободна от пристрастия в выборе, она не требует вмешательства оператора от начала розыгрыша до печатания списков. Ю. Г. Епишин

4025. О распределении рангов и о некоторых ранговых статистиках. Дуосс (On the distribution of ranks and of certain rank order statistics. Dwass Meyer), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 424—431 (англ.)

Пусть $x_1, x_2,\ldots,x_m$ и $x_{m+1},\ldots,x_N$ — две независимые выборки из двух совокупностей с и. ф. р. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Ранг R_i определяется как число значений x_j ($j=1,2,\ldots,N$), не превосходящих x_i. Автор находит выражение для генератрисы моментов некоторого числа рангов. На основе этого получены асимптотические и. ф. р. для фиксированного числа рангов. В частности, автор показывает, что, если $\frac{m}{N}\to\rho$, $n\to\infty$ (включая $\rho=0$ и $\rho=1$), R_1/N асимптотически распределено как случайная величина $\rho F_1(X)+(1-\rho)F_2(X)$, где X — случайная величина с и. ф. р. $F_1(x)$.

Исследованы также предельные распределения статистики вида $\sum_{i=1}^{m}f_N(R_i/N)$, где функция $f_N(i/N)$ определена для $i=1,2,\ldots,N$.

Автор показывает, что имевшиеся предположения о том, что $\sum_{i=1}^{m}f_N(R_i/N)$ не может иметь других собст-

венных предельных законов распределения, кроме нормального, ошибочны. Б. В. Финкельштейн

4026. Новый метод в теории упорядоченных выборок. Реньи (Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben. Rényi Alfred), Bericht über die Mathematiker-Tagung in Berlin vom 14. bis 18. Januar 1953. Berlin, 1953, 203—212 (нем.)

Излагается новый метод в теории упорядоченных выборок, с помощью которого очень просто можно получить уже известные и новые результаты. Пусть ζ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые, одинаково распределенные по показательному закону случайные величины

$$P(\zeta_k < x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (k = 1, 2, \ldots n;\ x \geqslant 0)$$ и

$$\zeta_k^* = O_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

— k-я по величине из ζ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $\zeta_k^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta_i}{n-i+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем $\delta_{k+1} = (n-k) \times (\zeta_{k+1}^* - \zeta_k^*)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ \zeta_0^* = 0)$ — независимые одинаково распределенные по показательному закону со средним значением $\frac{1}{\lambda}$ случайные величины; другими словами, ζ_k^* образуют марковскую цепь с независимыми приращениями.

Пусть $P(\xi_k < x) = F(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\xi_k^* = O_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\zeta_k = \log \frac{1}{F(\xi_k)}$, $\zeta_k^* = \log \frac{1}{F(\xi_{n-k+1}^*)}$; тогда

$$\zeta_k^* = O_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \quad P(\zeta_k < x) = 1 - e^{-x},$$

$$\xi_k^* = F^{-1}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{\delta_i}{n-i+1}\right)\right],$$

причем $y = F^{-1}(x)$ — обратная функция $x = F(y)$. Следовательно, ζ_k^* образует марковскую цепь. Даются примеры, показывающие, как просто можно этим способом получить классические результаты, и без доказательства приводятся следующие новые результаты, полученные таким же путем и дополняющие известные результаты А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}\sup_{a \leqslant F_n(x) \leqslant 1}\left[\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}\right] < y\right\} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \sqrt{\frac{a}{1-a}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}\sup_{a < F(x) \leqslant 1}\left[\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}\right] < y\right\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-a)}{8y^2a}}}{2k+1} & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0; \end{cases}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}\sup_{x_a \leqslant x \leqslant x_b}\left[\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}\right] < y\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{b}{1-b}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{bx^2}{2(1-b)}} \int_0^{(y-x)\sqrt{\frac{ab}{b-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\, dx.$$

Здесь $F(x_a) = a$, $F(x_b) = b (0 < a < b \leqslant 1)$.

Примечание референта. Имеются опечатки. На стр. 205, 3-я строка снизу, вместо „$\frac{1}{2}$" следует читать „$\frac{1}{\lambda}$"; на стр. 206 вместо „ξ_{n+1-k}" в формуле 13 следует читать „ξ_k". M. Rosenblatt-Roth

4027. Функции распределения экстремальных значений двух независимых переменных. Гумбель (Fonctions de probabilités à deux variables extrêmales indépendantes. Gumbel Emile J.), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 1, 49—50 (франц.)

Пусть ξ и η — две независимые случайные величины. В заметке приводятся возможные совместные распределения наибольших значений, наименьших значений, их комбинаций для этих случайных величин, а также соображения о возможности практического использования этих распределений.

Следует заметить, что более общая схема таких распределений, допускающая зависимость величин ξ и η, рассмотрена в работе референта (РЖМат, 1954, 1747). Б. В. Финкельштейн

4028. Отрицательно-биномиальные распределения с общим параметром k. Блисс, Оуэн (Negative binomial distributions with a common k. Bliss C. I., Owen A. R. G.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 37—58 (англ.)

В тех случаях, когда дисперсия значительно превышает среднее значение, большое преимущество сравнительно с распределением Пуассона имеет отрицательно-биномиальное распределение, которое определяется при помощи арифметического среднего m и параметра k, измеряющего рассеяние.

Наблюдаемые подсчеты часто сравниваются между собой в отношении их средних значений. Эти сравнения оказываются простыми и ясными, если соответствующие распределения имеют одно и то же относительное рассеяние, выражаемое в единицах.

В статье рассматриваются два способа оценки общего параметра k. Первый способ представляет обобщение оценки взвешенного момента в терминах регрессии и малых выборок. Второй способ состоит в преобразовании отрицательно-биномиального распределения с целью использования дисперсионного анализа. Изложение теории сопровождается примерами биометрического характера. А. К. Митропольский

4029. Вклад в изучение группированных наблюдений. II. Потеря информации, обусловленная группированием нормально распределенных наблюдений. Геддебек (Contribution to the study of grouped observations. II. Loss of information caused by grouping of normaly distributed observations. Gjeddebaek N. F.), Skand. aktuareitidsktr., 1956, № 3-4, 154—159 (англ.)

Вычислены эффективности оценок максимального правдоподобия для параметров нормального распределения при грубой группировке наблюдений (равные интервалы длиной от σ до $3{,}2\,\sigma$) и различных фазах центров интервалов относительно среднего значения. Делается вывод, что при длине интервала $\leqslant 2\sigma$ влияние фазы несущественно. При вычислениях использовались таблицы, опуб-

ликованные в первой части работы (Skand. aktuarietidskr., 1949, 32, 135—159). Г. К. Энгелис

4030. Линейная оценка из цензурированных данных. Плаккетт (Linear estimation from censored data. Plackett R. L.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 131—142 (англ.)

Пусть $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ — выборка объема n из совокупности с вероятностной плотностью распределения $f[(y-\mu)/\sigma]/\sigma$, где μ и σ — неизвестные параметры. Исходя из последовательности k величин $y_u, y_{u+1}, \ldots, y_v$, где $v = u + k - 1$, автор дает оценки параметров μ и σ. Р. Х. Дивеев

4031. Байесовский эмпирический подход к статистике. Роббинс (An empirical Bayes approach to statistics. Robbins Herbert), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1956, 157—163 (англ.)

Пусть случайная величина X имеет дискретное распределение, зависящее от случайного параметра Λ, $I(\lambda)$ — функция распределения величины Λ и $p(x \mid \lambda)$ — распределение величины X при известном значении $\Lambda = \lambda$.

Оценка $\varphi_I(x)$ неизвестного значения Λ по наблюденному значению $X = x$, минимизирующая среднее квадратическое отклонение $M \mid \varphi_I(x) - \Lambda|^2$, имеет вид

$$\varphi_I(x) = \frac{\int p(x \mid \lambda)\, \lambda\, dI(\lambda)}{\int p(x \mid \lambda)\, dI(\lambda)}. \qquad (1)$$

Так как $I(\lambda)$ обычно неизвестна, то предлагается в формуле (1) заменять $I(\lambda)$ ее оценкой, построенной по эмпирическому распределению величины X. Эта идея иллюстрируется на примере распределения Пуассона, геометрического распределения, биномиального и распределения типа Лапласа ($p(x \mid \lambda) = e^{\lambda x} f(x)\, h(\lambda)$). Так, например, для оценки параметра распределения Пуассона предлагается статистика $\varphi_n(x) = (x+1)\dfrac{p_n(x+1)}{p_n(x)}$, где $p_n(x)$— частота появления значения x в n независимых реализациях случайной величины. Общая теория метода в реферируемой работе не рассматривается. И. И. Гихман

4032. Упрощенные методы приближения к усеченному отрицательно-биномиальному распределению. Брасс (Simplified methods of fitting the truncated negative binomial distribution. Brass W.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 59—68 (англ.)

Даются два упрощенных метода получения оценок и формулы эффективности их для параметров усеченного отрицательно-биномиального распределения. Р. Х. Дивеев

4033. Таблицы двусторонних 5%-ных и 1%-ных контрольных пределов для индивидуальных значений r-го порядка. Масуяма (Tables of two-sides 5% and 1% control limits for individual observations of the r-th order. Masuyama Motosaburo), Indian J. Statist., 1955, **15**, № 3, 291—294 (англ.)

Предлагается использовать известные таблицы двусторонних доверительных пределов для членов вариационного ряда (Thompson C., Biometrika, 1941, **32**, 151—181) при построении контрольных пределов для индивидуальных значений по методу Брагинского (Брагинский Л. И., Оперативный статистический контроль качества в машиностроении, М., Машгиз, 1951). Л. Н. Большев

4034. Положительность в H-системах и достаточные статистики. Питчер (Positivity in H-systems and sufficient statistics. Pitcher T. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 1, 166—173 (англ.)

Под H-системой понимается комплексное гильбертово пространство, в котором для части элементов определена операция произведения. Если G есть сепарабельная, локально компактная, унимодулярная группа, то пространство L_2 относительно меры Хара группы G, где в качестве произведения функций понимается их свертка, будет примером H-системы. Обозначим ее через $H(G)$. Слабо замкнутое кольцо операторов, порожденное операторами левой свертки в $H(G)$, пусть будет $W(H)$. Элемент $W(H)$ называется центральным, если он коммутирует со всеми операторами правой свертки. Наконец, через P обозначим множество неотрицательных элементов из $H(G)$.

Если K есть компактная нормальная подгруппа G, а оператор π определяется как $\pi f(x) = \int_K f(kx)\, dk$, где dk есть нормированная мера Хара на K, тогда π есть центральная проекция и $\pi P \subset P$. В работе доказывается, что любая ненулевая, центральная, сохраняющая положительность проекция в H-системе получается описанным путем из некоторой компактной нормальной подгруппы. Указанная теорема применяется в дальнейшем к отысканию минимальных достаточных подполей в некоторых статистических задачах. Б. М. Клосс

4035. Несмещенная оценка некоторых коэффициентов корреляции. Олкин, Пратт (Unbiased estimation of certain correlation coefficients. Olkin Ingram, Pratt John W.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 201—211 (англ.)

Пусть p-мерные векторы $\mathbf{x}^\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, N$) взаимно независимы, распределены нормально с одинаковой дисперсией для соответственных компонент и одинаковой корреляцией между ними. Автор находит выражение для единственной несмещенной оценки (имеющей минимальную дисперсию) коэффициента корреляции ρ между компонентами, если неизвестны все параметры распределения и математические ожидания компонент. Эта оценка $H(r')$ является функцией от r', где

$$r' = \frac{p}{p-1}\,\frac{\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i\neq j}(x_{i\alpha} - \hat{\mu}_i)(x_{j\alpha} - \hat{\mu}_j)}{\sum_\alpha \sum_i (x_{i\alpha} - \hat{\mu}_i)^2}$$

($\hat{\mu}_i$ — оценка $M(x_i)$). Случай $p = 2$ исследуется отдельно, причем оценка $G(r)$ получена без ограничения $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (здесь r — обычный выборочный коэффициент корреляции). Автор выводит также аппроксимирующие функции для $H(r')$ и $G(r)$. Дано также выражение для оценки квадрата коэффициента множественной корреляции.

Для функций $H(r')$ и $G(r)$ для некоторых n имеются таблицы. Б. В. Финкельштейн

4036. Метод наибольшего правдоподобия в применении к биномиальному пуассонову распределению. Спротт (The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution. Sprott D. A.), Biometrics, 1958, **14**, № 1, 97—106 (англ.)

Описывается процедура нахождения по данным наблюдения оценок максимального правдоподобия для биномиально-пуассонова распределения с вероятностями

$$P(k) = e^{-a}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^t}{t!}\binom{nt}{k}p^k q^{nt-k}$$

получения k событий в выборке объема n. Эффективность оценок сравнивается для других различных способов оценок параметров p и a, когда проведено большое число повторных независимых выборок одного и того же объема. Из полученных результатов путем предельного перехода ($n \to \infty$) могут быть получены формулы для оценок распределения Неймана типа A (РЖМат 1958, 7943). Н. В. Смирнов

4037. Таблица уровней смещения, полезная для радиолокационных проблем обнаружения. Пачарес (A table of bias levels useful in radar detection problems. Pachares James), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, **4**, № 1, 38—45 (англ.)

В радиолокации используют часто случайные величины, имеющие плотность распределения

$$\frac{e^{-t}\,t^{m-1}}{(m-1)!}$$

(т. е. плотность χ^2 с четным числом степеней свободы). В связи с этим дается таблица решений $\lambda(m,p)$ уравнения

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}\,t^{m-1}}{(m-1)!}\,dt = 10^{-p}$$

для $p = 1\,(1)\,12$, $m = 1\,(1)\,150$ с четырьмя знаками после запятой. Описываются методы, использованные при ее составлении. Р. Л. Добрушин

4038. Использование преобразований и метода наибольшего правдоподобия при анализе экспериментов с двумя исходами для каждого из двух методов обработки. Йейтс (The use of transformations and maximum likelihood in the analysis of quantal experiments involving two treatments. Yates F.), Biometrika, 1955, **42**, № 3-4, 382—403 (англ.)

Рассматриваются несколько пар последовательностей независимых испытаний с параметрами (n_{i1}, p_{i1}), (n_{i2}, p_{i2}). Пусть x_{i1}, x_{i2} — количества положительных исходов в этих последовательностях. С помощью „таблиц сопряженности признаков 2×2“

$$\left\| \begin{matrix} x_{i1} & x_{i2} \\ n_{i1}-x_{i1} & n_{i2}-x_{i2} \end{matrix} \right\|,\quad i = 1, \ldots, m,$$

строится критерий для проверки сложной гипотезы $p_{i1} = p_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$. Этот критерий представляет собой некоторую комбинацию критериев для каждой из таблиц в отдельности. Л. Н. Большев

4039. Замечание о применении комбинации критериев для проверки совместной однородности нескольких таблиц 2×2. Йентс (A note on the application of the combination of probabilities test to a set of 2×2 tables. Yates F.), Biometrika, 1955, **42**, № 3-4, 404—411 (англ.)

Дополнительные замечания к реф. 4038. Л. Н. Большев

4040. Функция мощности критерия значимости для сравнения двух вероятностей. Секар, Агарвала, Чакраборти (On the power function of a test of significance for the difference between two proportions. Sekar C. Chandra, Agarwala S. P., Chakraborty P. N.), Indian J. Statist., 1957, **15**, № 4, 381—390 (англ.)

Пусть x_1 и x_2 — количества положительных исходов в двух последовательностях независимых испытаний с параметрами (n, p_1) и (n, p_2) соответственно. Для проверки гипотезы $p_1 = p_2$ используется условный критерий значимости (при условии $x_1 + x_2 = T$), основанный на том, что условное распределение x_1 при $T = \text{const}$ является гипергеометрическим. Пусть $\omega(\alpha, n, T)$ — критическая область такого критерия, соответствующая уровню значимости α, и пусть Ω — объединение таких областей по всем T. Если в качестве критической области безусловного критерия выбрать Ω, то уровень значимости такого критерия не будет превосходить α. Авторы вычислили функцию мощности критерия Ω с пятью десятичными знаками для $\alpha = 0{,}05$, $n = 5\,(5)\,20\,(10)\,50, 100, 200$ и p_1, $p_2 = 0{,}1\,(0{,}1)\,0{,}9$, а также функцию мощности соответствующего одностороннего критерия для $\alpha = 0{,}025$.

Примечание референта. Таблицы показывают, что функция мощности критерия Ω излишне мала, особенно при $n \leqslant 50$. Это произошло потому, что для области Ω, построенной с помощью условных критериев, истинный уровень значимости оказывается значительно меньше заданной величины $\alpha = 0{,}05$ (например, при $n = 10$ истинный уровень значимости равен 0,013). Л. Н. Большев

4041. Функции мощности гамма-распределений. Берндт (Power function of the gamma distribution. Berndt Gerald D.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 302—306 (англ.)

Пусть случайная величина распределена с плотностью

$$f_0 = f_0(x,\beta,\gamma) = (\beta^{\gamma}\Gamma(\gamma))^{-1} x^{\gamma-1}\exp(-x/\beta) \text{ при } x > 0$$

и $f_0 = 0$ при $x \leqslant 0$.

При этом $M(x) = \mu = \beta\gamma$; параметр β неизвестен. Проверяется гипотеза H_0: $\mu = \beta\gamma$ против альтернативной гипотезы H_1: $\mu = \delta\beta\gamma$ ($\delta > 1$ и фиксировано), при которой величина x имеет плотность $f_1 = f_0(x, \delta\beta, \gamma)$. В качестве критической области с уровнем значимости α берется интервал (x_α, ∞), где x_α определяется уравнением $\int_{x_\alpha}^{\infty} f_0(x)\,dx = \alpha$. Тогда мощность критерия есть $\pi_\delta = \int_{x_\alpha}^{\infty} f_1(x)\,dx$. Приводятся графики кривых мощности π_δ для $\gamma = \frac{1}{2}$, $1\,(1)\,5, 7, 10\,(5)\,50$, $1{,}0 \leqslant \delta \leqslant 4{,}0$ и $\alpha = 0{,}01$, $0{,}05$ и $0{,}10$. При практических расчетах следует использовать следующее свойство Г-распределений: если x_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ — независимые случайные величины, Г-распределенные с параметрами β и γ_i $(i = 1, 2 \ldots n)$, то среднее арифметическое из них будет так же Г-распределено с параметрами $\frac{\beta}{n}$ и $\gamma = \sum \gamma_i$.

Построенные кривые дают возможность найти необходимый объем наблюдения, чтобы путем сравнения выборочных средних с заданной надежностью обнаружить смещение генеральной средней заданного размера. Н. В. Смирнов

4042. Приближенная формула для функции z-распределения. Уишарт (An approximate formula for the cumulative z-distribution. Wishart John), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 504—510 (англ.)

Новый вывод разложения Эджворта для функции z-распределения по степеням $1/\sqrt{N}$, где $N = (f_1 + f_2)/f_1 f_2$ и f_1, f_2 — степени свободы z-распределения. Л. Н. Большев

4043. Оценка недостающих значений в анализе неполных данных. Уилкинсон (Estimation of missing values for the analysis of incomplete data. Wilkinson G. N.), Biometrics, 1958, **14**, № 2, 257—286 (англ.)

Уравнения для недостающих значений решаются при помощи обращения матрицы. Составлены таблицы коэффициентов уравнений для недостающих значений. Метод построения матрицы на основании этих таблиц прорабатывается на конкретных примерах. А. К. Митропольский

4044. Некоторые добавления к планам выборочных обследований. Китагава (Some contributions to the design of sample surveys. Kitagawa Tosio), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 1, 1—36 (англ.)

Рассматривается последовательность N генеральных конечных нормальных совокупностей $N(y_j, \xi_j, \sigma^2)$, $j = 1, \ldots, N$, с одной и той же дисперсией σ^2. Из каждой генеральной совокупности извлекается один элемент, y_h $(h = 1, 2, \ldots, N)$, а из множества $\{y_h\}$, $h = 1, \ldots, N$,

производится бесповторная выборка $\{y_i,\ i=1,\ldots,n\}$ объема n. Показано, что функцию распределения точки $(y_1,\ldots,y_n)$ можно представить в виде:

$$P(y_1<x_1,\ldots,y_n<x_n)=\frac{1}{{}_NP_n}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)}P(y_{i1}<x_1)\ldots P(y_{in}<x_n),$$

где $x_1,\ldots,x_n$ — вещественные числа, $(i_1,\ldots,i_n)$ — какое-нибудь размещение из $(1,2,\ldots,N)$ по n и суммирование распространяется по всем размещениям ${}_NP_n$.

Исходя из этого распределения даются характеристическая функция (х. ф.) и совместное распределение величин

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_1^n y_i \quad\text{и}\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(y_i-\bar{y})^2,$$

дифференциальный закон распределения величины

$$\frac{t^2_\alpha}{n-1}=\frac{n(\bar{y}_\alpha-\mu)^2}{(n-1)S^2_\alpha}$$

для фиксированного размещения $\alpha=(i_1,\ldots,i_n)$ (μ — произвольное постоянное), х. ф. статистик

$$t=\frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{y}-\tilde{\xi})\ (\text{где }\tilde{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{h=1}^N\xi_h)\ \text{и}$$

$$t^*=(\bar{y}-\tilde{y})/S\sqrt{\frac{N-n}{Nn}}$$

и плотность вероятности величины $t^{*2}_\alpha/n-1$.

Полученные результаты применяются для отыскания х. ф. выборочных дисперсий, встречающихся в анализе дисперсии таких выборок, и распределения отношений этих дисперсий.

Далее в статье изучаются различные ошибки, возникающие в выборочных исследованиях. Последняя часть работы посвящается обсуждению различных задач случайного расслоения. М. К. Камалов

4045. Выборочные дисперсии оценок компонент дисперсии. Серл (Sampling variances of estimates of components of variance. Searle S. R.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 167—178 (англ.)

Используя матричный метод, автор получает выборочные дисперсии оценок компонент дисперсии для данных с двухсторонней классификацией и неравными числами наблюдений в подклассах. Р. Х. Дивеев

4046. Об обобщенной производной, приспособленной к экспериментированию. Мартино-Лагард (Sur une dérivée généralisée adaptée à l'expérimentation. Martinot-Lagarde André), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 5, 690—692 (франц.)

Обобщенная производная определяется как предел множества наклонов секущих, обрамляющих рассматриваемую точку, когда общая мера h их проекции на ось ox стремится к нулю. Условия существования таких производных сравнимы с условиями существования обыкновенных производных. Это позволяет ввести понятие квазипроизводной, имеющей прямое отношение к экспериментированию и определению наклона линии регрессии в статистике. Пусть $y=f(x)$ определена в $[a,b]$. Рассмотрим секущие, обрамляющие точку x интервала $(x,x+h)\subset[a,b]$; наклон секущей обозначим $r(x',x'+h')$. Пусть $E(h)$ — множество секущих для $x'<x,\ x'+h'\geqslant x,\ h'=hu\omega(h)$ - колебание в $E(h)$. Будем говорить, что $f(x)$ имеет квазипроизводную с масштабом H, если существует H_0 такое, что $H_0<h<H$ влечет $\omega(h)<\varepsilon$, где ε — число, фиксирующее поле недостоверности. Если $\bar{r}=q(x,h)$ есть среднее значение r в $E(h)$, то $\lim_{h\to0}q(x,h)$ дает квазипроизводную для стохастической зависимости между x и y и определяет наклон линии регрессии в x. Ю. Ф. Харкеевич

4047. О максимальном числе ограничений в ортогональном строю. Сейден (On the maximum number of constraints of an orthogonal array. Seiden Esther), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 1, 132—135 (англ.)

Бос и Буш (Bose R. C., Bush K. A.,) Ann. Math. Statistics, 1952, **23**, 508—524) построили ортогональный строй (81, 10, 3, 3) (т. е. число ограничений этого ортогонального строя равно 10) и доказали, что в этом случае максимальное число ограничений не превосходит 12. Автор же утверждает, что в этом случае максимальное число ограничений не более 11. Проблема построения ортогонального строя с 11 ограничениями, однако, остается неразрешенной.

Примечание референта. Доказательство упомянутой теоремы не полно, но этот недостаток устраняется в другой статье (реф. 4048). P. Révész

4048. Поправка к статье «О максимальном числе ограничений в ортогональном строю». Сейден (Correction to «On the maximum number of constraints of an orthogonal array». Seiden Esther), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 1, 204 (англ.)

См. реф. 4047.

4049. Заметка о сбалансированных неполных блоках. Стантон (A note on BIBDS. Stanton Ralph G.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 4, 1054—1055 (англ.)

Известно, что параметры v, b, r, k, λ сбалансированных неполных блоков (СНБ) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$bk=rv, \tag{1}$$

$$\lambda(v-1)=r(k-1), \tag{2}$$

$$r-\lambda=rk-\lambda v. \tag{2'}$$

В 1940 г. Р. А. Фишер показал, что

$$b\geqslant v. \tag{3}$$

В 1942 г. Р. С. Бос показал, что для разрешимых СНБ имеет место неравенство

$$b\geqslant v+r-1. \tag{4}$$

В 1943 г. К. Р. Найр доказал для любых СНБ неравенство

$$b\geqslant 1+\frac{k(r-1)^2}{(r-k)+\lambda(k-1)}, \tag{5}$$

а для разрешимых СНБ неравенство

$$b\geqslant\frac{rk(r-1)}{(r-k)+\lambda(k-1)}. \tag{6}$$

Считалось, что (5) и (6) являются более общими, чем (3) и (4). Основываясь на равенствах (1), (2) и (2'), автор показывает, что (3) и (5), а также (4) и (6) являются эквивалентными друг другу соответственно.

М. К. Камалов

4050. Гауссова формула численного интегрирования и планирование экспериментов. Прайс (Gauss's formula of numerical integration and the design of experiments. Price P. C., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, 491—494) (англ.)

Предлагается метод нахождения уравнения криволинейной регрессии Y на X в виде

$$y(x)=\sum_{k\in H}\vartheta_k p_k(x),$$

где $p_k(x)$ — полиномы, ортогональные на (a, b) с весом $w(x)$, а H — некоторое подмножество чисел $0, 1, \ldots, n$. Предлагаемый метод пригоден, если эксперимент, в котором измеряются пары чисел (X, Y), может быть запланирован так, что значения X и стандартные отклонения значений Y выбираются по усмотрению экспериментатора, и ошибки измеренных значений Y некоррелированы. В этих условиях предлагается измерить значения $y_i = y(x_i)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, являющихся корнями полинома $p_{n+1}(x)$ на (a, b), причем стандартные отклонения значений Y_i должны равняться $\sigma_i = (A\lambda_i)^{-1/2}$, где A — некоторая постоянная, а λ_i даются формулами

$$\lambda_i = \frac{1}{p'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \frac{p_{n+1}(x)}{x - x_i} w(x)\, dx.$$

Тогда коэффициенты β_k даются формулами $\beta_k = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i p_k(x_i)$, а стандартные ошибки этих коэффициентов равняются $\sigma_0 \lambda_0^{1/2}$. Доказательство основано на гауссовой формуле численного интегрирования

$$\int_a^b f(x) w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

где $f(x)$ — любой полином степени не выше $2n + 1$.

А. С. Монин

4051. Критерий для последовательной корреляции по методу наименьших квадратов в теории регрессии. Ханнан (Testing for serial correlation in least squares regression. Hannan E. J.), Biometrika, 1957, **44**, № 1-2, 57—66 (англ.)

Изучается уравнение регрессии, векторная форма которого имеет вид $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}$, где ε_i порождаются стационарным процессом, не зависимы все от векторов $\mathbf{X}$ и имеют корреляционную матрицу Γ.

Когда $\mathbf{X}$ составлена из векторов Γ, то удобно строить критерий последовательной независимости остатков и оценивать β.

Известно, что в этом случае прямые оценки по методу наименьших квадратов численно те же самые, что и наилучшие линейные несмещенные оценки (полученные при условии, что Γ известно). Гренандер и Розенблатт исследовали условия, при которых эти две оценочные процедуры дают асимптотические оценки, имеющие одну и ту же матрицу ковариаций, вне зависимости от того, какой стационарный процесс порождает ε_i. Этим условиям удовлетворяют регрессии на определенных аналитических функциях, включающих ортогональные (по Лежандру) полиномы, тригонометрические функции и функции вида $t^p \cos \theta t$, $t^p \sin \theta t$. В настоящей работе изучаются условия применимости и упрощения теоремы Гренандера и Розенблатта. Рассматривается проблема построения критерия для проверки последовательной корреляции.

Б. М. Клосс

4052. Оценка оптимального субвыборочного числа. Брукс (The estimation of an optimum subsampling number. Brooks Samuel H.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 270, 398—415 (англ.)

Известно (см. РЖМат, 1955, 2336 К), что в двухступенчатом выборе оптимальное субвыборочное число (т. е. число элементов, выбираемых из каждой единицы, выбранной на первой стадии) для оценки генерального среднего равно $m_0 = (C_u/C_e)^{\frac{1}{2}} S_w/S_u$, где C_u и C_e — стоимости выбора одной единицы и „субвыбора" одного элемента из каждой выбранной единицы. Соответственно $S^2_u S^2_w$ — дисперсии между единицами и в пределах единиц. Во многих случаях отношение S_w/S_u приблизительно известно. В таблице III автор указывает, в каких пределах должно находиться S_w/S_u при данном субвыборочном числе m для того, чтобы точность оценки среднего составляла по крайней мере 90% точности, получаемой при использовании m_0.

Таблица I служит для планирования предварительной выборки. Если начальное значение для S_w/S_u не меньше действительного значения этого отношения, эта таблица гарантирует 90%-ную точность при основном выборе, субвыборочное число которого определяется из предварительной выборки.

K. Sarkadi

4053. О некоторых проблемах канонической корреляции. Лаха (On some problems in canonical correlations. Laha R. G.), Санкия, Indian J. Statistics, 1954, **14**, № 1-2, 61—66 (англ.)

Для измерения зависимости между двумя случайными векторами размерностей p и q $(p \geqslant q)$ Хотеллинг ввел как обобщение обычного коэффициента корреляции канонические корреляции. Канонические корреляции двух векторов определяются как квадратные корни из корней детерминантного уравнения

$$\left| \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{12}' - \theta \sum_{11} \right| = 0,$$

где

$$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} \overset{p}{\sum_{11}} & \overset{q}{\sum_{12}} \\ \sum_{12}' & \sum_{22} \end{pmatrix}$$

— дисперсионная матрица всех $p + q$ случайных величин. Пусть $x_1, \ldots, x_{p+q+r}$ — случайный вектор, следующий $p + q + r$-мерному нормальному закону. Пусть $\sum \theta_i$ и $\sum \Phi_i$ — суммы квадратов канонических корреляций вектора $(x_1, \ldots, x_p)$ с $(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ и с $(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q+r})$ соответственно. Обозначим через ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, \min(p, r))$ частные канонические корреляции между векторами $(x_1, \ldots, x_p)$ и $(x_{p+q+1}, \ldots, x_{p+q+r})$ после устранения влияния величин $x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$ точно также, как и в случае обычного частного коэффициента корреляции. Автор доказывает, что $\sum \theta_j \leqslant \sum \Phi_i$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда все Φ_i обращаются в нуль.

K. Sarkadi

4054. Ковариационный анализ при неполных данных. Уилкинсон (The analyses of covariance with incomplete data. Wilkinson G. N.), Biometrics, 1957, **13**, № 3, 363—372 (англ.)

Предлагается упрощенная процедура вывода и решения уравнений для ненаблюденных значений. Приводятся детали процесса выравнивания, стандартные ошибки и точные критерии значимости. По резюме автора

4055. Факторный анализ. Джоуэтт (Factor analysis. Jowett Geoffrey H.), Appl. Statist., 1958, **7**, № 2, 114—125 (англ).

Краткое изложение основ факторного анализа с особым ударением на „центроид-методе" (Thurstone L. L., The vectors of the mind, University of Chicago Press, 1935). По резюме автора

4056. Общий класс непараметрических критериев симметрии, включающий критерии Уилкоксона и Фишера. I. Эден, Бенард (A general class of distribution — free tests for symmetry containing the tests of Wilcoxon and Fisher. I. Eeden Constance van, Benard A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1957, **A60**, № 4, 381—391; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 381—391 (англ.)

Пусть $Z_1, \ldots, Z_m$ — независимые (вообще говоря, неодинаково распределенные) случайные величины, изображающие ряд наблюдений. В работе рассматривается один

класс критериев для гипотезы H_0: распределения величин $Z_1, \ldots, Z_m$ симметричны относительно нуля. При построении тестовой статистики наблюдения, равные нулю, опускаются; предположим, что среди остающихся наблюдений значение U_i встречается A_i раз ($i=1, \ldots, K$; $0<U_1<\ldots<U_K$), а U_i встречается B_i раз (K, A_i, B_i, U_i — случайные величины). Составляются величины

$$N_1=\sum_{i=1}^{k}A_i,\ N_2=\sum_{i=1}^{k}B_i,\ N=N_1+N_2,$$

$$T_i=A_i+B_i,\ R_i=\sum_{j=1}^{i}T_j-\frac{1}{2}(T_i-1)\qquad (i=1, \ldots, k).$$

Пусть $\varphi(u, r)$ — заданная функция двух переменных и $\Phi_i=\varphi(U_i, R_i)$. Пусть далее для имеющейся выборки оказалось

$$K=k,\ T_i=t_i,\ U_i=u_i\quad (i=1, \ldots, k). \qquad (1)$$

Обозначим через φ_i наблюденное значение Φ_i. Тестовая статистика определяется следующим образом:

$$T=\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(A_i-B_i).$$

При $\varphi(u, r)=r$ отсюда получаем статистику критерия Уилкоксона, а при $\varphi(u, r)=u$—статистику критерия Фишера (Fisher R. A., The design of experiments, Edinburgh, 1949, 43—47). Если φ не зависит от r и u, то рассматриваемый критерий превращается в критерий знаков.

Доказывается, что распределение статистики T при гипотезе H_0 и условии (1) симметрично относительно нуля и может быть найдено при помощи указанной в работе рекуррентной формулы. Доказывается также, что при гипотезе H_0 и некоторых других предположениях T распределена асимптотически нормально. В. В. Петров

4057. Общий класс непараметрических критериев симметрии, включающий критерии Уилкоксона и Фишера. II. Эден, Бенард (A general class of distribution-free tests for symmetry containing the tests of Wilcoxon and Fisher. II. Eeden Constance van, Benard A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 4, 392—400; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 392—400 (англ.)

Обсуждается связь между рассмотренным авторами классом непараметрических критериев (реф. 4056) и некоторыми двухвыборочными критериями. Исследуется состоятельность критериев Уилкоксона и Фишера.

В. В. Петров

4058. Общий класс непараметрических критериев симметрии, включающий критерии Уилкоксона и Фишера. III. Эден, Бенард (A general class of distribution-free tests for symmetry containing the tests of Wilcoxon and Fisher. III. Eeden Constance van, Benard A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 4, 401—408; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 401—408 (англ.)

Рассматривается класс критериев для гипотезы H_0 (реф. 4058), которые являются комбинацией критерия знаков и некоторых других критериев симметрии. Изучается состоятельность таких критериев. В. В. Петров

4059. Об отклонениях эмпирической функции распределения векторных случайных величин. Кифер, Вольфовиц (On the deviations of the empiric distribution function of vector chance variables. Kiefer J., Wolfowitz J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 173—186 (англ.)

Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$—независимые случайные векторные величины в m-мерном евклидовом пространстве с общей функцией распределения F. Эмпирическая функция распределения S_n—случайная функция распределения, определенная для любого $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ следующим образом: $nS_n(x)$ есть число X_i, у которых j-я координата меньше чем $x_j (j=1, r, \ldots, m)$.

В качестве одной из характеристик возьмем $D_n=\sup_x|S_n(x)-F(x)|$. Ее распределение пусть задается функцией $G_n(r)=P\{D_n<r/\sqrt{n}\}$. Авторами доказывается теорема, утверждающая существование для каждого m таких положительных констант c_0 и c, что для всех n, F и положительных r выполняется

$$1-G_n(r)<c_0e^{-cr^2}$$

Интересно, что эта же оценка выполняется и для характеристик $D^+_n=\sup_x(S_n(x)-F(x))$ и $D^-_n=\sup_x(F(x)-S_n(x))$. Основная трудность доказательства теоремы заключается в распространении результата с $m=1$ на $m=2$. Дальше уже применяется индукция. Указывается также, что операция взятия супремума может быть выполнена без изменения результата на большем классе множеств.

Приведенные константы c_0 и c не являются наилучшими, вопрос об отыскании таковых еще остается открытым. Если для $m=1$ наилучшим значением c является 2, то для $m>1$ показывается только, что $c<2$.

Во второй теореме доказывается, что для каждых m и F существует такая функция распределения G, что последовательность функций распределения G_n сходится к G в каждой точке непрерывности последней, когда $n\to\infty$. Аналогичное предложение выполнено и для других характеристик. Б. М. Клосс

4060. О непараметрических выводах. Эляндт (O możliwościach stosowania testów nieparametrycznych w zagadnieniach doświadczalnictwa rolniczego. Elandt Regina), Roczn. nauk rolniczych, 1957, **A75**, № 2, 161—187 (польск.; рез. русск., англ.)

Дается обзор некоторых классов непараметрических критериев однородности, независимости, согласия, ранговой корреляции и т. п. Новых результатов работа не содержит. По резюме автора

4061. О выборе оценок спектральной функции плотности стационарных временных рядов. Парзен (On choosing an estimate of the spectral density function of a stationary time series. Parzen Emanuel), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 921—932 (англ.)

Если процесс $x(t)$ наблюдается за время $0\leqslant t\leqslant T$, то в качестве оценки спектральной плотности $f(\omega)$ принимается

$$f^*_T(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{-iv\omega}\,k(B_Tv)R_T(v)dv,$$

где функция $k(u)$, называемая усредненным ковариационным ядром, ограничена, интегрируема в квадрате, $k(0)=1$, а $|u|^{1/2+\varepsilon}|k(u)|$ ограничено для некоторого $\varepsilon>0$. Константы B_T предполагаются убывающими к 0, когда $T\to\infty$, таким образом, что $TB_T\to\infty$. $R_T(v)$ означает выборочную ковариационную функцию. За качество оценки принимается величина среднеквадратической ошибки $E|f^*_T(\omega)-f(\omega)|^2$. Рассматриваются некоторые типы усредненных ковариационных ядер, из которых получается класс определенных оценок спектральной плотности. В работе вводятся характеристики для сравнения различных ядер $k(u)$. Получается возможность сравнения на оптимальность двух оценок спектральной плотности стационарных временных рядов. Б. М. Клосс

4062. Сглаживание кривых и периодограмм. Уитл (Curve and periodogram smoothing. Whittle P.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 38—47. Discuss., 47—63 (англ.)

Рассматривается выборка из $N=2p$ последовательных наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ дискретного стационарного

процесса $x(t)$ с абсолютно непрерывной спектральной функцией. Выводится формула для оценки $\hat{F}$ спектральной плотности $F(\omega)$ вида

$$\hat{F}_j = \sum_k a_{jk} f_k, \text{ где } f_k = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} x_t e^{\frac{2\pi i t}{N} k} \right|^2, k=1, 2, \ldots, p,$$

а сглаживающие коэффициенты a_{jk} определяются из условия минимизации интеграла

$$\int_{R_{N+p}} H(F_1, F_2, \ldots, F_p) L(x_1, \ldots, x_N \mid F_1, F_2, \ldots, F_p) \times$$
$$\times (\Sigma_k a_{jk} f_k - F_j)^2 \, dx_1, dx_2 \ldots dx_N \, dF_1 dF_2 \ldots dF_p,$$
$$j = 1, 2, \ldots, p,$$

где $H(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ — априорная функция распределения параметров $F_1, F_2, \ldots, F_p$, а $L(x_1, x_2, \ldots, x_N \mid F_1, F_2, \ldots, F_p)$ — функция правдоподобия выборки при данных $F_1, F_2, \ldots, F_p$ по всему $N+p$-мерному пространству. Окончательная формула для $\hat{F}$ выведена только в предположении, что генеральные моменты $M[F(\omega_1)]$, $M[F(\omega_2)]$ и $M[F(\omega_1) F(\omega_2)]$ связаны соотношением

$$M[F(\omega_1) F(\omega_2)] = M[F(\omega_1)] M[F(\omega_2)] [1 + \Gamma(\omega_1 - \omega_2)],$$

где функция $\Gamma(\omega)$ имеет период 2π.

Для больших N $\hat{F}$ аппроксимируется интегралом

$$\hat{F}(\omega) = G(\omega) \int \frac{f(\omega + \nu)}{G(\omega + \nu)} b(\nu) \, d\nu, \text{ где } G(\omega) = M[F(\omega)],$$

$$b(\nu) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} \frac{\psi(x) \, dx}{\frac{2\pi}{N} \left[1 + \Gamma(0) + \psi(x) \right]},$$

$$\psi(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\omega x} \Gamma(\omega) \, d\omega.$$

Проводится аналогия между оценками спектральной плотности и оценками плотности распределения. Сообщается об исследованиях стационарных дискретных процессов в электронных цифровых машинах (в частности, о получении с их помощью искусственных процессов).

В. П. Швальб

4063. Численные исследования в последовательной оценке биномиального параметра. Армитидж (Numerical studies in the sequential estimation of a binomial parameter. Armitage P.), Biometrika, 1958, 45, № 1-2, 1—15 (англ.)

Описывается метод вычисления доверительных пределов биномиального параметра для класса последовательных процедур с фиксированными границами. Кроме того, вычисляются доверительные интервалы и несмещенные оценки параметра для всех граничных точек в трех типах последовательных процедур. Р. Х. Дивеев

4064. О достаточности статистик и двойных процедурах. Гурье (Note on sufficient statistics and two-stage procedures. Ghurye S. G.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 155—166 (англ.)

Используя основные идеи схемы Штейна (РЖМат, 1955, 3322), автор рассматривает вопрос о применении двухвыборочной процедуры типа Штейна для некоторых проблем совокупных оценок.

Доказывается, что при известных допущениях для нормальной и экспоненциальной популяции две статистики

$$t_0(n; x_1, x_2, \ldots x_n) = \min(x_1, x_{21} \ldots x_n)$$

и

$$s_0(n; x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n t_0(n, x_1, x_2 \ldots x_n)$$

являются лучшими статистиками для минимизации М. О. объема всей выборки $E(n)$.

Рассматривается вопрос о выборе оптимального объема m первой выборки, обеспечивающего наименьшее значение $E(n)$. С этой целью при заданном m и фиксированных значениях коэффициента доверия $\beta = 1 - \alpha$ и относительного отклонения $\frac{\delta}{\sigma}$ выводится формула для подсчета $E(n)$

$$\nu < E(n) < \nu + \varepsilon$$

и приведена таблица значений ν и ε для значений $\alpha = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}05$ и δ/σ в пределах от 0,05 до 1,00 при значениях m от 2 до 20. А. Г. Корман

4065. Некоторые аспекты использования последовательного испытания отношения вероятностей. Де Грот, Надлер (Some aspects of the use of the sequential probability ratio test. DeGroot M. H., Nadler Jack), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 281, 187—199 (англ.)

Используя основные идеи и результаты последовательного анализа Вальда (Wald A., Sequential analysis. N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1947), авторы рассматривают следующие проблемы: 1) выбор между двумя гипотезами о среднем значении нормальной совокупности и 2) выбор между двумя гипотезами о вероятности того, что значение случайной величины превысит данное число (proportion defective).

Первая решается при помощи обычного последовательного критерия по отношению вероятностей. Пусть X — случайная величина с нормальным распределением, плотность которого $f(x, \mu, \sigma^2)$ определяется средним μ и дисперсией σ^2, и σ_A^2 — заданная положительная константа. Требуется произвести выбор между гипотезой H_0: $\mu = \mu_0$ и гипотезой H_1: $\mu = \mu_1$, $\mu_1 > \mu_0$ в предположении, что $\sigma^2 = \sigma_A^2$. Процедура принятия решения должна быть такова, чтобы при заданных верхних границах α и β вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода (α — вероятность отрицания справедливой гипотезы H_0 и β — вероятность отрицания справедливой гипотезы H_1) минимизировалось среднее число наблюдений до принятия решения.

Для этого рассматриваем последовательные наблюдения, пока

$$b < \sum_{i=1}^{n} \log \frac{f(x_i, \mu_1, \sigma_A^2)}{f(x_i, \mu_0, \sigma_A^2)} < a, \qquad (1)$$

где a и b — две константы, причем $b < 0 < a$,

$$a \leqslant \log \frac{1-\beta}{\alpha}, \qquad b \leqslant \log \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Процедура заканчивается принятием гипотезы H_0 при первом нарушении неравенства (1) слева и гипотезы H_1 при первом нарушении неравенства (1) справа. Приближения Вальда для оперативной характеристики и среднего числа наблюдений имеют вид соответственно:

$$P(\mu) = \frac{e^{a\eta} - 1}{e^{a\eta} - e^{b\eta}}$$

и

$$N(\mu, \sigma_A^2) = \frac{2\sigma_A^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \frac{(a-b) P(\mu) - a}{\eta},$$

где $\tau_1 = \dfrac{\mu_1 + \mu_0 - 2\mu}{\mu_1 - \mu_0}$.

Далее авторы рассматривают случай, когда σ неизвестно и известно лишь о его нахождении в некотором узком интервале.

Перейдя ко второй проблеме, авторы рассматривают для вышеприведенной случайной величины X вероятность p того, что X превышает заданное число U,

$$p = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

или $$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \text{где } k = \frac{u-\mu}{\sigma}.$$

Требуется произвести выбор между гипотезами $H_0 : p = p_0$ и $H_1 : p = p_1 > p_0$ или между гипотезами $H_0 : k = k_0$ и $H_1 : k = k_1 < k_0$.

При известном значении $\sigma = \sigma_A$ выбор гипотезы сводится к ранее рассмотренной процедуре для гипотез $H_0 : \mu = \mu_0 = u - k_0\sigma_A$ и $H_1 : \mu = \mu_1 = u - k_1\sigma_A$. Затем и в этой проблеме рассматривается случай, когда σ неизвестно и известно лишь о нахождении его в узком интервале. Решение каждой проблемы иллюстрируется числовым примером. Библ. 10 назв. А. Г. Корман

4066. Об одном замечании Вальда. Рао (Note on a remark of Wald. Rao M. M.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 277—278 (англ.)

Рассматривается задача последовательного выбора между двумя гипотезами $H_0 (p = p_0)$ и $H_1 (p = p_1 > p_0)$ относительно неизвестной вероятности p. Приводится строгое доказательство неравенства

$$p_0 < s < p_1,$$

где

$$s = \log \frac{1 - p_0}{1 - p_1} \Big/ \log \frac{p_1(1 - p_0)}{p_1(1 - p_1)}$$

— наклон линейных границ рассматриваемой последовательной процедуры. Это неравенство было впервые приведено Вальдом без доказательства. Б. С. Флейшман

4067. О теореме Уэйсса. Ле-Кан (Note on a theorem of Lionel Weiss. LeCam Lucien), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 4, 791—794 (англ.)

Уэйсс (РЖМат, 1955, 2328) показал, что класс последовательных критериев по отношению вероятностей является полным в очень строгом смысле. В статье показывается, как этот результат можно получить из незначительных обобщений обычных теорем теории разрешений и распространить этот результат на случай, когда число альтернатив конечно. Подобные результаты имеют место в более общих случаях. Резюме автора

См. также: 3438, 3440, 3664, 3667 Д, 3799, 4204

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

4068. Почему наблюдаемый мир — четырехмерный? Кондо (Why is the observational world four-dimensional? Kondo Kazuo), Tensor, 1958, **8**, № 1, 55—58 (англ.)

4069. Мировая инвариантная кинематика. Тупен (World invariant kinematics. Toupin R. A.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 3, 181—211 (англ.)

Определяются три группы преобразований координат: Евклида, Галилея и Лоренца. Каждая из групп совместно с координатами описывает соответствующий тип геометрического пространства, внутри которого рассматривается движение сплошной среды. Теории инвариантов движения в рамках этих пространств именуются кинематиками Евклида, Галилея и Лоренца соответственно.

В работе дан подробный анализ указанных „кинематик" с использованием математического аппарата теории групп. Я. И. Пугачев

4070. Равносторонность как единственное простейшее понятие евклидовой геометрии. Бет, Тарский (Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry. Beth Evert W., Tarski Alfred), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 4, 462—467; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 462—467 (англ.)

Пусть E — тройное соотношение между точками евклидова n-мерного пространства, которое имеет место для точек x, y, и z тогда и только тогда, когда эти три точки являются вершинами равностороннего треугольника (возможно, вырожденного; это означает, что все три точки совпадают). Авторы доказывают:

1. Если $n \geqslant 3$, то соотношение E может служить единственным первоначальным понятием n-мерной геометрии (это означает, что все понятия, которые обычно рассматриваются как простейшие для евклидовой геометрии, определяются в терминах понятия E).

2. Соотношение E не может служить единственным простейшим понятием двумерной геометрии Евклида.

Идея доказательства второго положения следующая: авторы показывают существование взаимно однозначного отображения евклидова пространства, обладающего свойствами: а) соотношение E инвариантно относительно преобразования T, б) существуют отрезки одинаковой длины, которые отображаются преобразованием T в сегменты различной длины. S. Mrówka

4071. Аксиоматическая основа евклидовой геометрии. Стуббан (Aksiomatisk grunnlag for den euklidiske geometri. Stubban John Olav), Nord. mat. tidskr., 1956, **4**, № 2, 76—84 (норв.)

По замыслу автора статья предназначена для читателя со средним математическим образованием и способного следить за строгими логическими рассуждениями. Кратко излагается история создания системы аксиом евклидовой геометрии самим Евклидом и в XIX в. М. Пашем и Д. Гильбертом. Аксиомы Гильберта для плоскости, с объяснением их значения, приводятся полностью. Статья заканчивается изложением понятия и истории создания неевклидовой геометрии. К. С. Сцилард

4072. Начальное обучение геометрии. II. Фрёйденталь (Initierea în geometrie. II. Freudenthal H.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 3, 159—174 (рум.; рез. русск., франц.)

Продолжение и конец (начало см. РЖМат, 1959, 1878) доклада, прочитанного в Бомбее на южноазиатском Совещании по вопросам преподавания математики голландским математиком-педагогом проф. Фрёйденталем. Наряду с методами Боса и Лепетра, автор излагает и анализирует другое современное течение в преподавании

начальной геометрии, связанное с именами голландских педагогов супругов Ван-Хиле, составивших ряд инструкций, пособий и учебников для индивидуального и группового обучения, и П. И. Ван Альбада, профессора Бандунгского университета.

Излагаемые методы имеют целью обучать детей с реальным учетом их возрастных особенностей и, базируясь на здоровых психологических началах, максимально стимулировать активность и самостоятельность учащихся. Применяется богатый специально изготовленный наглядный материал, состоящий из геометрических моделей, чертежей, рисунков, фотоснимков, зеркал и т. д. Уже на первых ступенях начального обучения геометрии, до пользования учебником, учащийся получает простейшие инструменты и принадлежности и на основе личных наблюдений и опытов и самостоятельного размышления отвечает на вопросы и решает задачи, изложенные в специально подготовленных для него „заданиях". Для успешного использования указанных методов требуются учителя с большой эрудицией в области психологии и педагогики. Г. И. Глейзер

4073. Конструктивная геометрия в задачах на построение моделей геометрических фигур в средней школе. Буренин Н. Д., Сб. тр. Ставропольск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 10, 3—65

Рассматривается решение некоторых задач на построение разверток и моделей пирамид и призм. Для построения разверток пирамид и призм их поверхность мысленно разрезается по боковым ребрам, после чего каждая боковая грань вращается вокруг соответствующей стороны основания до совмещения этой грани с плоскостью основания. Для построения используются различные методы геометрических построений, в частности показывается применение алгебраического метода. Далее приводятся некоторые задачи, решаемые с помощью разверток полных и усеченных пирамид и призм (например, определение объема, площадей поверхности и сечений, углов наклона боковых ребер к плоскости основания, различных двугранных углов и т. д.), а также задачи на комбинации многогранников и построение оригиналов сечений и моделей круглых тел. Н. В. Наумович

4074. Трисекция угла. Пиккет (Trisecting an angle. Pickett Hale), Math. Teacher, 1958, **51**, № 1, 12—13 (англ.)

Заметка методического характера. Отмечается, что в преподавании можно натолкнуться на попытку учащегося свести трисекцию угла к делению отрезка на три равные части. Приводится наглядное, а затем и формальное доказательство ошибочности этого приема. А. М. Березман

4075. О преподавании двугранного и телесного углов. Фер (On teaching dihedral angle and steradian. Fehr Howard), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 272—275 (англ.)

Приводится система определений, связанных с двугранным углом, предназначенная для элементарного курса геометрии. А. М. Березман

4076. Подвижные геометрические фигуры. Росс (Mobile geometric figures. Ross Alvin E.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 5, 375—376 (англ.)

Описано устройство вращающейся системы геометрических фигур, предназначенной для иллюстрации математических формул и теорем в старших классах средней школы. Ю. Л. Рабинович

4077. Эллипс из сопряженных диаметров посредством бумажной полоски. Гофман (Ellipse aus konjugierten Durchmessern mit Papierstreifen. Hofmann O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 6, 270 (нем.)

Пусть $A'A''$, $B'B''$ — сопряженные диаметры эллипса, O — его центр, U — ортогональная проекция точки B' на прямую $A'A''$, V — точка на продолжении перпендикуляра UB' на расстоянии OA' от точки B'. Положив полоску бумаги вдоль линии UV, отмечают на ней точки U, B', V. Если перемещать полоску так, чтобы ее точки U, V перемещались соответственно по прямым $A'A''$ и OV, то точка B' полоски будет описывать эллипс. В. Т. Базылев

4078 К. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. Норден (Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. Norden A. P. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss. 1958, IX, 259 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1954, 5749 К).

4079 К. Ошибки в геометрических доказательствах. Дубнов (Fehler in geometrischen Beweisen. Dubnow J. S. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, 64 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1854, 1774 К).

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

4080. Математическая интерпретация ядра сечения. Вострокнутов С. П., Научно-исслед. тр. Моск текстильн. ин-та, 1958, **19**, 112—118

Ядром сечения называется контур, из которого не должна выходить точка приложения силы для того, чтобы в сечении не возникали напряжения разных знаков. Показан способ построения ядра сечения, основанный на полярной теории конического сечения. В качестве конического сечения берется эллипс инерции. Для построения отмечаются выступающие точки сечения и строятся симметричные им точки относительно центра эллипса инерции, поляры которых относительно данного эллипса определяют контур, являющийся искомым ядром. В. А. Маневич

4081. О совпадении мгновенного центра вращения и центра ускорения в начальный момент движения. Дейвидсон (Coincidence of the instantaneous centre and the acceleration centre in initial motion. Davidson W.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 212—213 (англ.)

Доказывается теорема о том, что если при движении плоскости по плоскости в начальный момент подвижная плоскость находится в покое, то мгновенный центр вращения, рассматриваемый как точка подвижной плоскости, не имеет начального ускорения. Рассматриваются центроиды, неподвижная и подвижная, которые в начальный момент имеют общую точку и общую касательную, и подсчитывают в момент t методом комплексного переменного выражение абсолютного ускорения мгновенного центра вращения через ускорение полюса и ускорение относительно этого полюса. При $t = 0$ получается высказанная теорема. В. С. Люкшин

4082. О движении твердого тела вращения. Синьорини (Sui moti rigidi sferici. Signorini Antonio), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 274—282 (итал.)

Даются общие соображения о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Рассматриваются две задачи: определить движение, если компоненты угловой скорости вдоль фиксированных, соответственно движущихся, осей даны как функции времени. O. Bottema

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 80

4083. Решение одной задачи, включающей в себя задачу Штауда. Альфьери (Risoluzione di un problema comprendente quello di Staude. Alfieri Leandro), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 3-4, 367—372 (итал.)

Задача, названная в заголовке, заключается в определении всех возможных равномерных вращений твердого тела вокруг фиксированной точки O, отличной от цент-

ра тяжести G, когда действующая система сил эквивалентна постоянной силе, приложенной к точке P, отличной, вообще говоря, от обеих точек G и O. D. C. Lewis
Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 754

4084. Об использовании дуальных кватернионов в кинематике. Бляшке (Sull' uso dei quaternioni duali nella cinematica. Blaschke Wilhelm), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 3, 291—293 (итал.)

Известно, что вращение трехмерного евклидова пространства можно выразить формулой

$$\mathbf{x} = \overline{Q}\,\mathbf{x}'\,Q,$$

где $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}$ — векторы, а Q и $\overline{Q}$ — сопряженные кватернионы единичного модуля. Автор замечает, что та же формула выражает любое движение, не сводящееся к вращению, если за элемент пространства принять прямую, определенную вектором с дуальными компонентами $a + \varepsilon b$, где $\varepsilon^2 = 0$, предположив, что компоненты кватернионов тоже являются дуальными числами. Эти соображения он применяет к выводу дифференциальных уравнений движения твердого тела. А. П. Норден

4085. Роторы, касающиеся n фиксированных кругов. Голдберг (Rotors tangent to n fixed circles. Goldberg Michael), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 1, 69—74 (англ.)

Автор, продолжая исследования Рёло (Reuleaux), Мейснера (Meissner) и Люстерника (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 3—4 (13—14), 194—195), а также свои собственные (РЖМат, 1958, 1553, 4223), рассматривает плоские замкнутые кривые (роторы), которые при своем вращении все время касаются n фиксированных кругов на плоскости кривой. Проблема имеет технические приложения при современных скоростных методах обработки цилиндрических деталей машин. В работе указываются примеры роторов, касающихся n равных кругов с центрами в вершинах правильного n-угольника („криволинейные" и „почти прямолинейные" правильные $(n+1)$-и $(n-1)$-угольники как выпуклые, так и невыпуклые). Случаи $n = 3, 4, 5$ иллюстрируются чертежами. Ставится вопрос о существовании некруговых роторов, касающихся n неравных или же неправильно располагающихся кругов. Этот вопрос остается открытым.
Ю. Г. Лумисте

4086. Некоторые вопросы общей геометрии эвольвенты окружности Данилюк П. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 109—112

Дается вывод параметрических уравнений эвольвенты окружности в новой форме, удобной для решения задач, связанных с построением профиля зуба цилиндрических зубчатых колес и расчетами толщины зуба. За основу приняты параметрические уравнения эвольвенты окружности, где в качестве независимого параметра входит угол развернутости, т. е. центральный угол, соответствующий дуге основной окружности, развертываемой при построении эвольвенты.

Эти уравнения преобразуются, исходя из тех соображений, что в основу зубонарезания эвольвентных цилиндрических колес методом огибания положена обкатка без скольжения средней линии исходного производящего реечного контура по делительной окружности. В качестве независимого параметра вместо угла развернутости принято поэтому радиальное расстояние от точки эвольвенты до делительной окружности. Установлено, в каких пределах изменяется величина коэффициента радиального расстояния. В заключение даны формулы для определения радиуса кривизны в любой точке эвольвенты. А. М. Тевлин

4087. Геометрические основы для фрезерования винтовой резьбы. II. Вундерлих (Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten. II. Wunderlich W.), Österr. Ingr-Arch., 1955, **9**, № 4, 273—280 (нем.; рез. англ., франц.)
Часть I см. Österr. Ingr-Arch., 1952, **6**.

4088. Общее решение, определяющее напряжение в изогнутой мембране. Трусделл (General solution for the stresses in a curved membrane. Truesdell C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 12, 1070—1072 (англ.)

Утверждается, что уравнение Коши равновесия непрерывной среды $t^{km}_{,m} = 0$, $t^{km} = t^{mk}$, где запятая означает ковариантную производную, имеет общее тензорное решение только для плоскости в n-мерном пространстве. Замена уравнения интегральным равенством и применение теоремы Грина позволяет автору получить сначала условие совместности в тензорной форме, а затем решение

$$t^{km} = \alpha^{km}A - (\beta^{kmr}A)_{,r} + (\gamma^{kmrs}A)_{,rs} - \ldots,$$

где α^{km}, β^{kmr}, ..., — симметрические тензоры по первым двум индексам, A — функция напряжения — относятся к пространству двух измерений. В случае пространства трех и большего числа измерений α^{km}, β^{kmr}, ..., заменяются тензорами α^{ijkm}, β^{ijkmr}, ..., A — тензором A^{ij} и т. д.

Полученная формула t^{km} применяется к мембранам. В случае риманова пространства двух измерений с ковариантным метрическим тензором и постоянной кривизной получается для t^{km} известный результат Финци (B. Finzi). Для поверхности, налагаемой на поверхность вращения, получается результат Финци (L. Finzi). В случае произвольной поверхности мембраны существует условие совместности, выраженное в производных пятого порядка, и если это условие может быть вычислено, то работа автора дает общее тензорное решение для напряжения в мембране В. С. Люкшин

4089. Общие методы определения каустики для отражающей системы, состоящей из одной произвольной поверхности вращения. Штиглер (Allgemeine Methode zur Bestimmung der Kaustik für ein katoptrisches System mit einer beliebigen Rotationsfläche. Stiegler K.), Optik, 1958, **15**, № 5, 278—280 (нем., рез. англ.)

Выводятся общие уравнения каустики в параметрической форме для отражающей системы, состоящей из одной поверхности вращения; уравнение меридиана этой поверхности предполагается известным. А. Л. Вернер

4090. Об объеме скважин и коэффициенте скважности в строительной механике грунтовых сооружений в связи с задачей об укладке шаров с различной плотностью. Гран-Ульссон (Über Porenvolumen und Porenziffer in der Erdbaumechanik und die verschieden dichte Packung von Kugeln. Gran Olsson R. Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1955, **28**, 96—99) (нем.)

Для известных способов укладки одинаковых шаров (наименее плотного, промежуточного и наиболее плотного) приведены отношения объема скважин к объему шаров. Они сравниваются с наблюдаемыми значениями этого отношения, с содержанием воды и удельными весами различных грунтов. M. E. Wise
Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 521

4091. Тензорное представление векториальных погрешностей. Коробков С. А., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1958, **37**, № 1, 117—123

Операции с направленными погрешностями обычно излагаются при помощи специальных правил действий с геометрическими элементами эллипса ошибок. Автор излагает эти действия при помощи алгебраических операций над тензорами.

Если в данной точке K приложен единичный вектор ρ и появляется погрешность в положении этой точки от приложенных в точке K векториальных погрешностей, то ρ претерпевает деформации в виде растяжения и поворота. Новый вектор $\rho' = M\cdot\rho$ рассматривается как преобразованный из ρ при помощи оператора M, являющегося тензором ошибок. Квадрат погрешности положения точки K в направлении ρ определяется скалярным произведением $\rho\cdot\rho' = M_\rho^2$. Тензор M представляется в диадной форме, каждая диада образуется векториальной ошибкой; рассматривается плоская система из n векториальных ошибок и M является суммой n диадных произведений Тензор M преобразуется к матричной форме и раскладывается на два тензора, $M = D + S$, девиатора D и скалярного тензора S. Главные значения M, выражающиеся через его первый и второй инварианты, дают максимальную и минимальную погрешности. Известные формулы проф. Н. Г. Келля для элементов эллипса погрешностей выражаются через модули составляющих векторов тензоров D и S В. С. Люкшин

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4092. Геометрическое доказательство некоторых формул для тангенса. Эйвери, Фери (Geometrical proofs of some formulae for tangents. Avery A. J. L., Fearn W. J.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 118 (англ.)

4093. Геометрический вывод некоторых тригонометрических формул. Мазкевич (Geometric derivations of some trigonometric formulae. Mazkewitsch D.), School Sci. and Math., 1958, **58**, № 3, 213—216 (англ.)

Предложен вывод формул синуса, косинуса и тангенса двойного угла и др., основанный на метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике. А. М. Березман

4094. Уравнения второй и третьей степени в алгебре Студи. Корни n-й степени из числа Студи. Сарди (Equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra di Study. Radici ennesime di un numero di Study. Sardi Umberto. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1954, **21**, 166—173) (итал.)

Построена теория уравнений второй и третьей степени для алгебры Студи, некоммутативной алгебры третьего порядка над полем комплексных чисел. G. B. Huff

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 340

4095. О теореме Пифагора. Корт (Sur le théorème de Pythagore. Court N. A.), Mathesis, 1957, **66**, № 4-6, 191—192 (франц.)

Теорему Пифагора можно высказать так: Если в треугольнике XZY угол XZY при вершине Z — прямой, то две пары точек пересечения с прямой XY окружностей, проходящих через точку Z с центрами в точках X и Y, гармонически разделяют одна другую. В. Т. Базылев

4096. Треугольник, окаймленный квадратами. Тебо (Triangle bordé de carrés. Thébault V.), Mathesis, 1956, **65**, № 7-9, 423—426 (франц.)

4097. О решении треугольника по длинам биссектрис, исходящих из его трех вершин. Адад (Sur la résolution d'un triangle, connaissant les longueurs de trois bissectrices issues respectivement des trois sommets. Adad H.), Publs scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 2, 159—171 (франц.)

Задача приводится к решению системы двух уравнений четвертой степени. Так как не все решения системы, как показывает исследование, удовлетворяют условиям задачи, то графическое решение системы значительно упрощается. Рассматриваются два основных случая:

1-й случай. Данные три биссектрисы не пересекаются. λ, μ, ν — три непересекающиеся биссектрисы и $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$; если $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \geqslant \frac{1}{\lambda}$, то нет решений, если $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\lambda}$, то существуют четыре возможности: I. λ, μ, ν — биссектрисы внешних углов (2 решения); II. λ — биссектриса внешнего угла, μ, ν — биссектрисы внутренних углов (0 решений); III. μ — биссектриса внешнего угла, λ, ν — биссектрисы внутренних углов (1 решение); IV. ν — биссектриса внешнего угла, λ, μ — биссектрисы внутренних углов (1 решение).

В частном случае, когда 1) μ и ν бесконечны, необходимо, чтобы λ было бесконечным; в этом случае задача имеет бесконечное число решений (любой равносторонний треугольник); 2) ν бесконечно, необходимо равенство $\mu = \lambda$. Решение — бесконечное множество равнобедренных треугольников.

2-й случай. Данные три биссектрисы пересекаются. $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$. Существуют четыре возможности: V. λ, μ, ν — биссектрисы внутренних углов (1 решение). VI. λ — биссектриса внутреннего угла, μ, ν — биссектрисы внешних углов: если $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \geqslant \frac{1}{\lambda}$, то — 3 решения, если $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\lambda}$ — 4 решения. VII. μ — биссектриса внутреннего угла, ν, λ — биссектрисы внешних углов: если $\mu \neq \nu$, то — 2 решения, если $\mu = \nu$ — 1 решение. VIII. ν — биссектриса внутреннего угла, λ, μ — биссектрисы внешних углов (1 решение).

В частном случае, когда 1) $\mu + \nu$ бесконечны, возможен только случай VI; искомый треугольник — равносторонний со стороной $\frac{2\lambda}{\sqrt{3}}$, 2) ν бесконечно, возможны VI и VIII случаи. (в VI — два решения; в VIII — одно). С. И. Зетель

4098. Об одной геометрической теореме. Масселман (On a geometrical theorem. Musselman J. R.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 9, 660 (англ.)

Рассматривается следующая задача: через данную точку P проводится прямая, пересекающая стороны данного треугольника $A_1A_2A_3$ в точках $X_1X_2X_3$; прямые PA_i пересекают описанную около треугольника A_1, A_2, A_3 окружность в точках R_i (i=1,2, 3); прямые $X_i R_i$ пересекаются в одной точке E, причем последняя лежит на указанной окружности. Решается обратная задача: по данному треугольнику и данной точке E на описанной окружности определяется соответствующая секущая, проходящая через данную точку P. З. И. Прянишникова

4099. Треугольники, стороны которых образуют геометрическую прогрессию. Максуэлл (Triangles whose sides are in geometric progression. Maxwell E. A.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 114 (англ.)

При помощи циркуля и линейки производится построение, позволяющее перейти от треугольника со сторонами 1, x, x^2 к треугольнику со сторонами x^n, x^{n+1}, x^{n+2}. А. М. Березман

4100. Треугольники, углы которых образуют арифметическую прогрессию. Максуэлл (Triangles whose angles are in arithmetic progression. Maxwell E. A.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 113 (англ.)

Рассматривается несколько элементарных свойств треугольника, углы которого равны соответственно 60°, 40°, 80°. А. М. Березман

4101. О преобразовании шестиугольника в квадрат (On transforming a hexagon into a square), Math. Student J., 1957, **4**, № 2, 1—2 (англ.)

Приводится решение следующей задачи элементарной геометрии: прямыми линиями разрезать правильный шестиугольник на части, из которых можно сложить

квадрат. Предлагается решить аналогичную задачу для правильного пятиугольника. А. М. Березман

4102. Об одной задаче. Николеску (Asupra unei probleme. Nicolescu C.), Gaz. mat. si fiz., 1956, A8, № 4, 176—179 (рум.)

Излагается аналитическое решение следующей задачи: Правильная четырехугольная пирамида $MA'B'C'D'$ пересечена произвольной плоскостью γ. Пусть A, B, C, D — точки пересечения γ с ребрами пирамиды. Доказать, что:

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MC}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}. \qquad (1)$$

Излагаются некоторые обобщения данной задачи, в основном средствами синтетической геометрии. Автор исходит из равнобедренного треугольника $A'MC(MA'=MC')$, высота MO которого пересечена в точке ω прямой, встречающей MA' и MC' соответственно в точках A и C. При вращении прямой AC в плоскости треугольника около ω на прямых MA' и MC' устанавливается проективное соответствие, приводящее к равенству

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MC}=K'. \qquad (2)$$

Вращая треугольник $A'MC'$ на произвольный угол α вокруг высоты MO до некоторой позиции $B'MD'$, получается аналогичное равенство

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=K'. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает (1). Указанным методом автор доказывает следующие предложения: 1) При пересечении прямой (имеется в виду с равными боковыми ребрами) пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник, произвольной плоскостью, имеет место соотношение (1). 2) Пусть $MA_1'A_2'\ldots A_{2n}'$ — прямая пирамида, в основании которой лежит $2n$-угольник. При пересечении произвольной плоскостью боковых ребер в точках $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{MA_1}+\frac{1}{MA_{n+1}}=\frac{1}{MA_2}+\frac{1}{MA_{n+2}}=\ldots=\frac{1}{MA_n}+\frac{1}{MA_{2n}},$$

где A_1 и A_{n+1}, A_2 и A_{n+2} и т. д. находятся на противоположных ребрах. 3) Прямая, проходящая через какую-либо точку высоты прямого конуса с вершиной V, пересекает поверхность конуса в точках A и C так, что имеет место соотношение $\frac{1}{UA}+\frac{1}{UC}=\text{const}$.

Г. И. Глейзер

4103. Тетраэдры Мёбиуса. II. Мандан (Möbius tetrads. II. Mandan Sahib Ram), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 247—251 (англ.)

Кратко излагаются результаты первой части данной работы (РЖМат, 1958, 9671). Строится тетраэдр $T_3\equiv A_3B_3C_3D_3$, связанный с тремя связанными между собой тетраэдрами $T_i\equiv A_iB_iC_iD_i$ $(i=0,1,2)$. Четыре тетраэдра $T_k\equiv A_kB_kC_kD_k$ $(k=0,1,2,3)$ автополярны относительно одной квадрики Q. Берутся другие четыре тетраэдра $T_A\equiv AA_1A_2A_3$, $T_B\equiv BB_1B_2B_3$, $T_C\equiv CC_1C_2C_3$, $T_D\equiv DD_1D_2D_3$. Эти две четверки тетраэдров называются сопряженными друг другу.

Рассматриваются элементы указанных 8 тетраэдров, сопряженные относительно Q; квадрики, определяемые вершинами этих тетраэдров, и их взаимное расположение; квадрики, определяемые вершинами этих тетраэдров, и их взаимное расположение; квадрики типа Q_1 (см. I часть) и их связь с Q. В. А. Маневич

4104. Пучок сфер, связанных с тетраэдром. Тебо (Faisceau de sphères associées à un tétraèdre. Thébault V.), Mathesis, 1956, **65**, № 4-6, 269—270 (франц.)

Рассматривается пучок сфер, определяемый сферой (O), описанной около произвольного тетраэдра $T\equiv ABCD$, и сферой (O') его двенадцати точек (пучок аналогичен пучку кругов Гриффитса для треугольника). Центры сфер пучка лежат на прямой OO'. Радиус сферы пучка с данным центром (ω) легко подсчитывается на основании теоремы Стюарта, примененной к треугольнику AOO', где точка (ω) делит OO' в заданном отношении, A — вершина тетраэдра. Рассматриваются различные частные случаи.

В заключение рассматривается пучок сфер, ортогональных описанной сфере (O). В частности, показано, что сфера (O') ортогональная сфере (O). С. И. Зетель

4105. Касательные окружности и суммы степеней. Багер (Røringscirkler og potenssummer. Bager Anders), Nord. mat. tidskr., 1956, **4**, № 1, 30—35 (датск.)

Пусть r, r_a, r_b, r_c — радиусы вписанной и соответственно вневписанных окружностей треугольника со сторонами a, b, c. Доказываются формулы для любого натурального числа p:

$$r_a^p+r_b^p+r_c^p+(-r)^p=\sum_{i+2j+4k=p}\frac{(-1)^j(i+j+k-1)!\,2^{2i-j}\,p}{i!\,j!\,k!}R^iS^jT^{2k},$$

$$r_a^{-p}+r_b^{-p}+r_c^{-p}+(-r)^{-p}=\sum_{2i+3j+4k=p}\frac{(-1)^j(i+j+k-1)!\,2^{2j-ip}}{i!\,j!\,k!}\,\frac{R^jS^i}{T^{2(i+j+k)}},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника, T — его площадь и $S=a^2+b^2+c^2$. Составляется и исследуется система из 10 независимых уравнений для 13 величин $a, b, c, r_a, r_b, r_c, r, h_a, h_b, h_c, S, T, R$ (h_a, h_b, h_c — высоты, соответствующие a, b и c, $2s=a+b+c$). Доказываются также некоторые более простые соотношения для этих величин (некоторые из них — частные случаи приведенных двух равенств). К. С. Сцилард

4106. Ортополюсы и обратные трансверсали. Бланшар (Orthopôles et transversales réciproques. Blanchard René), Mathesis, 1957, **66**, № 1-3, 39—43 (франц.)

Обобщение некоторых вопросов, помещенных в последние годы в журнале Mathesis, приводит к теоремам, из которых приведем следующие:

1) Если в треугольнике T, вписанном в круг O, FF' — диаметр, то прямая Δ_2 — обратная трансверсали прямой Δ_1, параллельной оси параболы (P) с фокусом F, вписанной в треугольник T, — пересекает касательную в вершине P в точке K_2, расстояние которой до ортополюса прямой FF' равно расстоянию F до Δ_1, а прямая Δ_2 перпендикулярна прямой FK_2.

2) Получается известное соотношение, ранее данное Гурматаем: если Δ_1 и Δ_2 — взаимообратные трансверсали треугольника T, вписанного в круг (O), то расстояние от точки O до прямой Δ_2 равно произведению степени проекции точки O на прямую Δ_1 относительно круга девяти точек и расстояния ортополюса прямой Δ_1 до ортоцентра треугольника.

3) Даны четыре компланарных прямых Δ_i, определяющих четыре треугольника T_i; обозначим через O_i точку пересечения Δ_i и диаметра окружности, описанной около T_i, перпендикулярного Δ_i, через f_i ортополюс этого диаметра. Точки O_i и f_i симметричны относительно прямой Ньютона четырехугольника, определенного прямыми Δ_i. С. И. Зетель

4107. Квадратура круга. Сорнито (Squaring a circle. Sornito Juan E.), Math. Teacher, 1957, **50**, № 1, 51—52 (англ.)

Предложен процесс, позволяющий приближенно, с любой степенью точности, построить при помощи циркуля и линейки сторону квадрата, равновеликого данному кругу. А. М. Березман

4108. Теорема Пифагора для n измерений. Уэйнер (The theorem of Pythagoras in n dimensions. Weiner L. M.), Rev. Univ. nac. Tucumán, 1957, **A11**, № 1-2, 28—31 (англ.)

Сформулировано и доказано, как обобщение теоремы Пифагора на случай n измерений, следующее предложение: Пусть $u_1 \ldots u_n$ суть n ортогональных векторов, пусть V_i $(i = 1,\ldots,n)$ — объем $(n-1)$-мерного симплекса, вершинами которого служат начала и концы векторов $u_1, \ldots u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n$ и V — объем $(n-1)$-мерного симплекса с вершинами в концах этих векторов. Тогда $V^2 = V^2_1 + \ldots + V^2_n$. А. М. Березман

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4109. Касательные к коническому сечению, проходящие через данную точку. Примроз (Tangents from a point to a conic. Primrose E. J. F.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 120—121 (англ.)

Предлагается изящное аналитическое доказательство четырех известных теорем о касательных к коническому сечению. А. М. Березман

4110. Общие инварианты окружности и конического сечения. Маравалль-Касесновес (Sobre los invariantes comunes a una circunferencia y a una cónica. Maravall Casesnoves Dario), Gac. mat., 1956, **8**, № 6-7, 199—207 (исп.)

Рассматриваются конические сечения A и B, заданные соответственно в однородных декартовых координатах $A \equiv \Sigma a_{ij}x_i$, $B \equiv \sum b_{ij}x_ix_j$, (1)

а в однородных тангенциальных координатах:

$$A \equiv \Sigma A_{ij}u_iu_j, \quad B \equiv \Sigma B_{ij}n_in_j, \tag{2}$$

где A_{ij}, B_{ij} — миноры, соответствующие a_{ij} и b_{ij}. Выражения

$$I = \Sigma a_{ij}B_{ij} \text{ и } \quad J = \Sigma b_{ij}A_{ij}, \tag{3}$$

составленные из коэффициентов точечного и тангенциального уравнений, являются инвариантами относительно преобразования координат.

Инвариант $I = 0$, если существует треугольник, вписанный в конечное сечение A, автополярный относительно B, или автополярный относительно A и описанный около B. Аналогично с инвариантом J. Исследуются частные случаи, когда одно из конических сечений является окружностью, а другое параболой, или равнобочной гиперболой, или эллипсом. Определяется геометрическое место центров окружностей, описанных около некоторого треугольника, автополярного относительно некоторого конического сечения. М. П. Черняев

4111. О вписанных в треугольник конических сечениях. Бланшар (Sur des coniques inscrites à un triangle. Blanchard R.), Mathesis, 1957, **66**, № 1-3, 70—71 (франц.)

В треугольнике ABC четыре гармонически ассоциированные точки, в барицентрических координатах относительно треугольника $I(\alpha, \beta, \gamma)$, $I_a(-\alpha, \beta, \gamma)$, $I_b(\alpha, -\beta, \gamma)$, $I_c(\alpha, \beta, -\gamma)$, принимаются за центры вписанных конических сечений. Четыре прямых, соединяющих эти точки с точками Жергона Γ, Γ_a, Γ_b, Γ_c этих конических сечений, сходятся в одной точке T. Автор показывает: Если точка $P(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ будет полюсом в треугольнике ABC медианы $\frac{x}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta^2} + \frac{z}{\gamma^2} = 0$ четырехсторонника, образованного трилинейными полярами точек I, I_a, I_b, I_c, то точка T будет антидополнительной (anticomplémentaire) для точки Жергона Γ_o конического сечения с центром в точке P, вписанного в треугольник ABC. М. П. Черняев

4112. Длина перпендикуляра. Сидерман (Length of a perpendicular. Sederman V. G.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 206 (англ).

Вывод формулы $(a^2 + b^2)d^2 = (ax_1 + by_1 + c)^2$ для расстояния d точки (x_1, y_1) от прямой $ax + by + c = 0$. В. Т. Базылев

4113. О конических сечениях, вписанных в треугольник. Гурматай (Sur les coniques inscrites à un triangle. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 298—302 (франц.)

Два вопроса, недавно решенные в журнале Mathesis, привлекают внимание к точкам, имеющим связь с фокусами конических сечений, вписанных в треугольник, и к соответствию, существующему между этими точками и центрами конических сечений. Дальнейшие обобщения рассматриваемых вопросов приводят к интересным случаям изучаемого соответствия и к определению четырех кругов, связанных с трижды касательными окружностями треугольника. Исследование ведется в плоскости Гаусса.

Доказано несколько теорем, из которых отметим следующие:

1) Если центр конического сечения, вписанного в треугольник, описывает произвольную прямую Δ, проходящую через центр круга девяти точек, то середина отрезка, заключенного между точками обратными фокусам относительно описанной окружности O, описывает медиатрису отрезка с концами в точке O и в середине отрезка от точки Фрейербаха касательного треугольника Ф до точки, для которой прямая Симсона перпендикулярна Δ.

2) Если центр конического сечения, вписанного в треугольник, описывает произвольную прямую Δ, то середина отрезка, заключенного между точками, обратными фокусам относительно описанной окружности O, описывает окружность, центр которой лежит на диаметре окружности O, симметричном прямой Эйлера относительно диаметра параллельного прямой Симсона точки, лежащей в конце полудиаметра, перпендикулярного Δ. В заключение показано, что вместо рассмотрения точек, обратных фокусам относительно описанной окружности, можно рассматривать точки, обратные относительно окружности I, трижды касающейся треугольника $A_1A_2A_3$ в точках T_1, T_2 и T_3. С. И. Зетель

4114. Теорема Моденова. Виша (Teorema lui Modenov. Visa Eugen), Gaz. mat. si fiz., 1955, **A7**, № 8, 425—427 (рум.; рез. русск., франц.)

4115. Из записей. Максуэлл (From scripts. Maxwell E. A.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 215 (англ.)

Замечания о кривых 2-го порядка.

4116. Вычисление определителя, часто встречающегося в координатной геометрии. Траси (Evaluation of a well-known determinant in coordinate geometry. Trasi M. S.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 340, 115, (англ.)

Отмечается тождество

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = -(Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv) + dD,$$

где через A, H, G, ... обозначены алгебраические дополнения элементов a, h, g .. определителя $D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$.

А. М. Березман

4117. Об одном способе обоснования геометрических построений на плоскости и в пространстве. Пикус А. Л., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 201—208

Рассматривается дескриптивное определение класса конструктивных построений на плоскости и в пространстве. Используя дескриптивный, т. е. теоретико-множественный подход к обоснованию геометрических построений, автор решает вопрос о минимуме данных, при которых задача на геометрические построения может быть решена без привлечения произвольных элементов, и дает строгое логическое обоснование использованию произвольных элементов там, где такое использование является необходимым. Показывается также, что всякая задача на построение, имеющая вообще решение, решается циркулем и линейкой либо точно, либо приближенно с любой степенью точности.

Н. В. Наумович

4118. К обоснованию аналитической геометрии. Пикерт (Zur Grundlegung der analytischen Geometrie. Pickert Günter), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, **60**, № 3, 97—100 (нем.)

Автор идет несколько иным путем, чем В. Юркат, в его обосновании геометрии (РЖМат, 1958, 4216) — не вводит растяжений (скаляров) как основных понятий и отказывается от их расположенности. Понятие вектора и точки аксиоматизируются так же, как и у Юрката, так что множество векторов образует коммутативную группу по сложению. Вводится новое основное понятие — двойное направление (Doppelrichtung) — класс векторов, содержащий все векторы некоторого направления и направления ему противоположного (и нуль-вектор); двойные направления представляют собой одномерные подпространства векторного пространства. Под растяжением s понимается эндоморфизм векторной группы, отображающий каждое двойное направление на себя.

Аксиомы, определяющие двойное направление, следующие: 1. Двойное направление есть множество векторов, содержащее по крайней мере один вектор $\neq 0$. 2. Существует по крайней мере два различных двойных направления 3. Каждый вектор $\mathbf{a}$ ($\neq 0$) принадлежит некоторому двойному направлению $[\mathbf{a}]$. 4. Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат двойному направлению D, то к D принадлежит и разность $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. 5. Для векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}(\neq 0)$ одного двойного направления всегда найдется растяжение s, такое что $\mathbf{a}\cdot s = \mathbf{b}$.

В соответствии с аксиомой 4 двойное направление является подгруппой. Растяжения образуют подкольцо S кольца эндоморфизмов векторной группы. Сложение и умножение в S определяется равенствами: $\mathbf{x}(s+t) = \mathbf{x}s + \mathbf{x}t$, $\mathbf{x}(st) = (\mathbf{x}s)t$. Доказывается существование в S обратных элементов. Таким образом S образует поле. Двойное направление $[\mathbf{a}]$ состоит из всех векторов $\mathbf{a}s$, где $s \in S$. За подробными доказательствами автор отсылает к 3-му изданию его „Аналитической геометрии“.

А. Г. Школьник

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4119. Проективное определение двойного отношения. Джентри (A projective definition of double ratio. Gentry Frank C.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 359—360 (англ.)

Пусть $(\alpha x) \equiv \alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ и $(\beta x) = 0$ — уравнения двух гиперплоскостей в n-мерном проективном пространстве. $a \equiv (a_0, \ldots, a_n)$ и $b \equiv (b_0, \ldots, b_n)$ — две точки не инцидентные с данными гиперплоскостями. Двойное отношение взятых четырех элементов n-мерного проективного пространства равно:

$$D = \frac{(\alpha a)(\beta b)}{(\alpha b)(\beta a)},$$

где $(\alpha a) = \alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_n a_n$ и т. д.

В. А. Маневич

4120. Об одном способе объединения теории отрезков с теорией равенства. Вайлати (Di un modo di riattaccare la teoria delle proposizioni fra segmenti a quella dell'équivalenza. Vailati G.), Archimede, 1958, **10**, № 2-3, 109—111 (итал.)

Перепечатка заметки из собрания сочинений (Vailati G., Soritti, Success. Seeber, Firenze, 1911) автора (1863 — 1909). Устанавливается возможность доказать предложение 11 пятой книги Евклида (о двух отношениях, равных третьему), исходя из предложения 35 третьей книги (о равенстве произведений отвезков двух пересекающихся хорд окружности).

Г. И. Дринфельд

4121. Об одном порядковом соотношении в треугольнике. Карцель (Über eine Anordnungsbeziehung am Dreieck. Karzel Helmut), Math. Z., 1956, **64**, № 2, 131—137 (нем.)

Порядковой функцией $h(\alpha)$ на проективной плоскости называется функция, определенная для всех прямых h и всех точек α, равная 0, если h и α инцидентны, и ± 1 в противном случае (Sperner, Math. Ann., 1949, **121**, 107—130; Sitzungsber. Heidelberg, Akad. Wiss. Mathnaturwiss. Kl., 1949, 413—448).

Три различные точки α, β, γ прямой k удовлетворяют соотношению $[\alpha, \beta \mid \gamma]$ в том и только том случае, если для любых двух прямых g, $h(\neq k)$, проходящих через γ, $g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta) = 1$. Соотношение $[a, b \mid c]$ определяется взаимным образом. Если три любые коллинеарные точки α, β, γ удовлетворяют соотношению $[\alpha, \beta \mid \gamma]$, то говорят, что порядковая функция удовлетворяет линейному соотношению. Линейное соотношение влечет за собой соотношение треугольника: если α, β, γ — вершины треугольника, a, b, c — любые прямые, точки пересечения которых (a, b), (b, c), (c, a) инцидентны со сторонами (α, β), (β, γ), (γ, α) треугольника, но не совпадают ни с одной из вершин α, β, γ, то имеет место равенство

$$a(\beta)\, a(\gamma)\, b(\gamma)\, b(\alpha)\, c(\alpha)\, c(\beta) = 1.$$

Автор доказывает следующее обратное предложение: Для любой порядковой функции $h(\alpha)$ на проективной плоскости, на которой выполняется малая теорема Дезарга и любая прямая содержит не менее четырех точек, соотношение треугольника влечет за собой линейное соотношение, если только $[\alpha, \beta \mid \gamma]$ имеет место по крайней мере для одной тройки точек или $[a, b \mid c]$ имеет место по крайней мере для одной тройки прямых.

F. A. Behrend

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1123

4122. Недезарговы плоскости. Фаччотти (Piani non desarguesiani. Facciotti G.), Period. mat., 1956, **34**, № 3, 159—168 (итал.)

Автор иллюстрирует при помощи геометрических моделей известное положение, что теорема Дезарга о гомологических треугольниках не может быть доказана из аксиом принадлежности, порядка и непрерывности проективной плоскости.

Даются три модели недезарговой плоскости. В каждой из этих моделей теорема о гомологических треугольниках не имеет места в некоторой области проективной плоскости. В первых двух моделях, аналогич-

ных построениям Мультона (Moulton F. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1902) и Морманна (Mohrmann H., Math. Ann., 1922), прямые линии частично подвергаются линейному преобразованию, что и приводит к цели. В третьей модели применяется топологическое преобразование, переводящее заданный на плоскости эллипс в себя, что соответствует идеям Гильберта в его „Основаниях геометрии" (1899). Н. Ф. Четверухин

4123. Замечания о дезарговой трапеции. Циммер (Bemerkungen zum Trapezdesargues. Zimmer Hans-Georg), Math. Ann., 1958, **135**, № 3, 274—278 (нем.)

Теоремой о дезарговой трапеции (Trapezdesargues) автор называет следующее предложение, играющее фундаментальную роль в геометрии Муфанга (Moufang R., Math. Ann., 1931—1934, 105—108, 110): Если прямые AA', BB' и CC' проходят через общую точку P и $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C' \parallel BB'$, то $BC \parallel B'C'$. Если при этом $BC \parallel AA'$, то получаем теорему о дезарговом параллелограмме (Parallelogrammdesargues). Из теоремы о дезарговом параллелограмме не вытекает теоремы дезарговой трапеции; если бы это было так, то это означало бы (как это можно показать путем рассмотрения почти тел характеристики 2), что второй распределительный закон может быть доказан.

Исходя из альтернативного тела (с характеристикой $\neq 2$), Муфанг показала с помощью теоремы о полном четырехстороннике, что можно построить недезаргову геометрию на плоскости, удовлетворяющую аксиоме о четвертой гармонической точке. Частным случаем является теорема о центре, под которой понимается следующее предложение: P и Q — две различные точки, R — произвольная точка, не лежащая на PQ, точка S однозначно определяется требованиям $PS \parallel RQ$ и $SQ \parallel PR$; при этих условиях существует точка M — пересечение диагоналей PQ и RS, не зависящая от выбора точки R.

В статье доказываются следующие теоремы, имеющие место в аффинной плоскости:

I. Из теоремы о дезарговом параллелограмме и теоремы о центре вытекает теорема о дезарговой трапеции.

II. Если теорема о дезарговой трапеции имеет место вдоль двух параллельных прямых g и g', то она сохраняет силу вдоль любой прямой, параллельной g (теорема о трапеции имеет место вдоль некоторой прямой, если рассматриваются только такие треугольники, у которых вершины B и B' лежат на этой прямой).

III. Если теорема о дезарговой трапеции выполняется вдоль двух параллельных прямых g и g', то для этого направления имеет место малая теорема Дезарга.

IV. Если теорема о дезарговой трапеции имеет место для некоторого направления и вдоль некоторой другой прямой, то она имеет место вдоль любой прямой плоскости. А. Г. Школьник

4124. Инволюция прямых в S_3, в которой каждая прямая встречает свой образ. Уайли (Line involutions in S_3 in which every line meets its image. Wylie C. R., Jr), Rev. Univ. nac. Tucumán, 1957, **A11**, № 1-2, 32—40 (англ.)

Рассматриваются инволюции прямых в пространстве S_3, в которых произвольная прямая пересекает свою соответствующую. Например: возьмем две плоскости π и π_1 и установим в π_1 точечную инволюцию, тогда произвольной прямой l, пересекающей π и π_1 соответственно в точках P и P_1, соответствует прямая $l' \equiv PP'_1$, где P'_1 соответствует P_1 в точечной инволюции на π_1.

Устанавливается связь между порядком инволюции (порядком линейчатой поверхности, соответствующей в инволюции пучку лучей 1-го порядка), порядком конуса, образованного прямыми, пересекающими соответствующие прямые в вершине, и классом кривой, огибаемой прямыми, лежащими с соответствующими им в одной плоскости. Показано, что для рассматриваемых инволюций число плоскостей, в которых точки пересечения соответствующих прямых определяют точечную инволюцию, может равняться 0,1 или 2.

Рассматриваются квадратичные инволюции и некоторые примеры кубических инволюций. В. А. Маневич

4125. Об одной элементарно-геометрической задаче, которая приводит к классической проблеме геометрии. Гофман (Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt. Hofmann L.), Elem. Math., 1958, **13**, № 4, 79—85 (нем.)

В двух плоских полях ε и ε' на общем носителе даны две группы точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5. Автор исследует вопрос о возможности из двух точек данных полей S и S' спроектировать эти группы точек конгруэнтными пучками лучей. Отнеся точки каждого поля к прямоугольной системе координат и используя однородные координаты, автор рассматривает конкретные группы точек и получает ответ на поставленный им вопрос, который не является общим. Тщательно выполненные чертежи облегчают чтение реферируемой статьи. М. П. Черняев

4126. Иллюстрация вырождения геометрического места при вырожденных коллинеациях. Альгунеид (A geometrical illustration of the destruction of loci by degenerate collineations. Alguneid Ali Rida. Proc. Egyptian Acad. Sci., 1954—1955, 10, 69—72) (англ.)

Продолжение статьи о вырождении коллинеаций пространства (Proc. Egyptian Acad. Sci., 1951, **7**, 1—17). Поверхность S, заданная как геометрическое место, как огибающая плоскостей и как комплекс касательных, преобразуется в S' посредством „полной" коллинеации. Автор рассматривает предельную форму S', когда преобразование становится вырожденным. Приведены примеры.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 657 O. Bottema

4127. О вращениях в плоскости. Ленц (Über ebene Drehungen. Lenz Hanfried), Arch. Math., 1958, **8**, № 6, 477—480 (нем.)

Доказывается следующее предложение: Если группа $\mathfrak{G}$ однородных аффинных преобразований плоскости обладает следующими свойствами: (I) $\mathfrak{G}$ транзитивна на множестве прямых, проходящих через начало координат O; (II) любая точка $P \neq O$ может быть с помощью преобразований из $\mathfrak{G}$ переведена лишь в конечное число точек прямой OP, то $\mathfrak{G}$ является либо полной группой вращений, либо полной группой вращений и зеркальных отражений, либо — при надлежащем выборе координатной системы — группой подобных преобразований с матрицей

$$e^{f(\varphi)} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где f удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$$

и условию $f(\pi) = 0$. Группа (1) рассматривалась Пикертом (Pickert G., Math. Ann., 1948, 120, 498).

В заключение автор указывает, что на основе надлежащей системы аксиом (не включающей аксиомы симметрии!) можно построить группу однородных аффинных преобразований, удовлетворяющих требованиям (I) и (II). Из нее выделяется группа аффинных преобразований, сохраняющих углы — группа преобразований подобия с матрицей

$$a\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\ a\neq 0.$$

Из группы подобия выделяется подгруппа преобразований с детерминантом равным 1—группа движений, которая используется для определения конгруэнтности. Этим путем может быть дано обоснование евклидовой геометрии на плоскости. А. Г. Школьник

4128. Геометрия Галилея—Ньютона. II. Движения и преобразования подобия. Макарова Н. М., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, 7, 5—27

Часть I см. РЖМат, 1956, 4757. Геометрия Галилея-Ньютона определяется как раздел аффинной геометрии, характеризующийся наличием одного определенного направления. За это направление принимается направление оси $y = ob$. Расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяется по формуле

$$d = |x_1 - x_2|.$$

Угол между прямыми $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ определяется по формуле $\varphi = |k_1 - k_2|$. Под движением понимается аффинное преобразование плоскости Галилея-Ньютона, при котором сохраняются расстояния между точками и углы между прямыми. Указаны четыре вида движений, составляющих полную группу движений плоскости Галилея-Ньютона. Рассматриваются конкретные примеры движений плоскости Галилея-Ньютона и дается их классификация.

Например: параллельный перенос относится к первому виду, а симметрия относительно точки — к четвертому виду движений. Под преобразованием подобия понимается аффинное преобразование плоскости Галилея—Ньютона, при котором отрезки преобразуются в пропорциональные отрезки, а углы — в пропорциональные углы. Приведена классификация преобразований подобия, аналогичная классификации движений.

В. А. Маневич

4129. Геометрия Галилея—Ньютона. III. Элементы теории циклов. Макарова Н. М. Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, 7, 29—59

(Части I, II см. РЖМат, 1956, 4757; реф. 4128). Работа содержит теорию, аналогичную евклидовой теории окружностей, в геометрии, где движения (в аффинных координатах x, y) записываются формулами

$$\begin{aligned} x' &= x + a,\\ y' &= \varphi x + y + b. \end{aligned} \qquad (1)$$

Роль окружностей в новой геометрии играют линии двух типов: циклы — геометрические места точек, из которых отрезок виден под постоянным углом, и окружности — геометрические места точек, равноудаленных от точки O. В системе координат (1) циклы будут параболами $kx^2 + bx + c = y$, а окружности — парой прямых $kx^2 + bx + c = 0$.

Дано определение степени точки относительно цикла или окружности, понятие радикальной оси, радикального центра, классификация пучков и связок циклов и окружностей и т. д. Строится теория точечных круговых преобразований, переводящих циклы в циклы и окружности в окружности. Доказывается, что все такие преобразования в определенном смысле сводятся к „симметрии относительно цикла" или „относительно окружности", определения которых аналогичны определению инверсии в евклидовой плоскости (приводящим здесь к разным преобразованиям).

В § 4 развивается теория, двойственная изложенной выше. М. А. Войтенко

4130. О геометрических построениях в плоскости Римана. Костюк (Про геометричні побудови в площині Рімана. Костюк А. І.), Наук. зап., Луцький держ. пед. ін-т, 1958, 6, 57—73 (укр.)

Автор называет квадратно-радикальной задачей ту, в которой искомый отрезок x определяется следующим уравнением:

$$\cos x = Q(\cos a; \cos b; \ldots, \cos h). \qquad (1)$$

Здесь $a, b, \ldots, h$ — длины эллиптических прямолинейных отрезков, которые, в предположении, что величина радиуса кривизны эллиптической плоскости принята равной единице, не превосходит π, а Q — получающаяся в результате конечного числа рациональных операций и извлечения квадратного корня функция указанных аргументов. Автор отмечает, что построение отрезка x, определяемого равенством (1), сводится к выполнению 10 элементарных операций (некоторые из этих операций оказываются, впрочем, комбинациями других). Приводится ряд основных геометрических мест, с которыми автору приходится иметь дело в построениях. Решаются, с помощью одной лишь линейки, 14 элементарных конструктивных задач при условии, что в плоскости Римана начерчена дуга круга, ее центр и какая-либо пара взаимно перпендикулярных прямых, не проходящих через этот центр. К этим задачам сводится решение всякой конструктивной квадратно-радикальной задачи. Подобное же предложение высказывается и в случае, когда заданы дуга круга с центром и пять точек другого круга. С помощью одной линейки может быть решена всякая квадратно-радикальная задача, если в плоскости начерчены дуга эквидистанты, ее базис и пара взаимно перпендикулярных прямых, каждая из которых не перпендикулярна к базису.

В заключение рассматриваются построения с помощью прямого угла. При этом, если прямой угол используется только для проведения прямых линий и перпендикуляров к прямым, то всякая квадратно-радикальная задача может быть решена при условии, что в плоскости начерчена дуга круга. Если же прямой угол используется для нахождения таких точек прямой, из которых данный отрезок виден под прямым углом, то всякая конструктивная квадратно-радикальная задача решается без каких бы то ни было дополнительных условий. Н. И. Кованцов

4131. Некоторые вопросы теории геометрических построений. Костюк (Деякі питання теорії геометричних побудов. Костюк А. І.), Наук. зап. Луцький держ. пед. ін-т, 1958, 6, 37—55 (укр.)

Рассматриваются геометрические построения в проективной плоскости, в плоскости Евклида и в плоскости Лобачевского. Среди других доказываются теоремы:

1. В проективной плоскости точки пересечения прямой и нераспадающейся кривой второго порядка, заданной своей дугой, можно построить при помощи только линейки.

2. Если в проективной плоскости задана некоторая дуга кривой второго порядка, то каждую конструктивную проективную задачу второй степени в этой плоскости можно решить при помощи только линейки.

3. Каждую конструктивную квадратно-радикальную задачу в плоскости Лобачевского можно решить при помощи только линейки, если в этой плоскости задана дуга окружности, ее центр и пара взаимно перпендикулярных прямых, не проходящих через этот центр.

4. Каждую конструктивную квадратно-радикальную задачу в плоскости Лобачевского можно решить с помощью подвижного прямого угла. Г. И. Дринфельд

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4132. О проекции, осуществляемой с помощью квадратичного комплекса характеристики (11) (112). I. Браунер (Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11) (112) vermittelte Projektion

I. Brauner H.), Monatsh. Math., 1958, 62, № 2, 119—131 (нем.)

Пусть $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ — однородные декартовы координаты точки в пространстве и пусть

$$\{j_1\} \ldots x_2 - ix_1 - e^{i\varphi} = x_3 - ix_0 = 0,$$
$$\{j_2\} \ldots x_2 + ix_1 - e^{-i\varphi} = x_3 + ix_0 = 0 —$$

два плоских пучка прямых (φ — параметр) с установленным проективным соответствием между ними. Принимая лучи j_1, j_2 за директрисы линейных конгруэнций, получают, при изменении φ, некоторый квадратичный комплекс Σ характеристики (11) (112).

Пусть

$$i_1 \ldots x^2 - ix_1 = x_3 - ix_0 = 0,$$
$$i_2 \ldots x_2 + ix_1 = x_3 + ix_0 = 0 —$$

не соответствующие друг другу лучи пучков. Проводя через каждую точку P пространства прямую, пересекающую лучи i_1, i_2 (все такие прямые образуют конгруэнцию $\mathfrak{N}$), получают в плоскости π ($x_3 = 0$) проекцию P^w точки P. Предметом содержания реферируемой статьи и является изучение такого рода проекций.

Если $z = x_3 : x_0 = \operatorname{tg}\zeta$, то точка P^w получается из ортогональной проекции P' точки P на плоскость π путем поворота вокруг начала координат O на угол $-\zeta$ с последующим растяжением в отношении $\cos\zeta : 1$.

Каждая негоризонтальная по отношению к π прямая g имеет, очевидно, своей проекцией некоторую окружность g^w. Для горизонтальной прямой эта окружность вырождается в прямую линию. Все лучи комплекса Σ проектируются в окружности диаметра 1.

Группе проективных преобразований, автоморфных относительно комплекса Σ, соответствует в π группа конгруэнтных преобразований. В частности, тождественному преобразованию соответствует совокупность ∞^1 аксиальных коллинеаций комплекса (Z_1) с фокальными лучами i_1, i_2. Каждая такая коллинеация заставляет каждый луч комплекса скользить по самому себе.

Кроме группы Z_1, автор рассматривает трехчленную группу „проективных“ вращений D_3 вокруг лучей конгруэнции $\mathfrak{N}$. Каждое такое вращение есть прообраз обычного вращения в π вокруг следа соответствующего луча конгруэнции $\mathfrak{N}$. Объединение автоморфизмов Z_1 и D_3 дает четырехчленную группу S_4. Присоединяя к этой группе совокупность ∞^3 так называемых аксиальных инволютивных автоморфизмов I, образом которых в π являются всевозможные симметричные отражения относительно произвольных прямых этой плоскости, получают все автоморфные коллинеации комплекса Σ.

Для того чтобы дать новое геометрическое истолкование указанным автоморфизмам, автор вводит в пространстве так называемую квазиэллиптическую метрику. В качестве абсолюта пространства берется вырожденная квадрика $x_3^2 + x_0^2 = 0$, состоящая, очевидно, из плоскостей двух пучков $\{j_1\}$ и $\{j_2\}$.

Тогда, например, квазирасстояние от точки P до плоскости π оказывается равным углу ζ. Вводится понятие квазирасстояния между двумя точками, квазиугла между прямыми и квазиугла между плоскостями.

Рассматриваемая проекция на плоскость π может быть рассматриваема как параллельная оси x_3 в смысле Клиффорда проекция квазиэллиптического пространства на плоскость π.

Автоморфизмы группы S_4 могут быть истолкованы как клиффордовы сдвиги в направлении лучей конгруэнции $\mathfrak{N}$, а „проективные“ вращения — как квазиэллиптические вращения вокруг соответствующих лучей. Наконец, аксиальные автоморфные коллинеации есть квазиэллиптические аксиальные отражения относительно прямых, пересекающих прямую $x_3 = 0$, $x_0 = 0$.

Каждый конус лучей комплекса Σ есть квазиэллиптический конус вращения вокруг луча конгруэнции $\mathfrak{N}$, проходящего через его вершину. Все осевые углы этих конусов в квазиэллиптическом смысле равны между собою.

Если подвергнуть пространство точечному преобразованию T, в котором каждая точка проектирующей прямой переходит в точку этой же прямой, остающуюся на таком же расстоянии от π, то каждая прямая g перейдет в некоторую кубическую кривую, касающуюся прямых i_1, i_2. Для этого преобразования указывается еще одно геометрическое истолкование, основанное на понятии так называемого неевклидова вращения.

Н. И. Кованцов

4133. О проекции, осуществляемой с помощью квадратичного комплекса характеристики (11) (112). II. Брауне р (Über die durch einen quadratischen Komplex der Chatakteristik (11) (112) vermittelte Projektion. II. Brauner H.), Monatsh. Math., 1958, 62, № 2, 132—145 (нем.)

Часть I см. реф. 4132. Каждой точке P пространства ставится в соответствие окружность P^k (проекция II), получающаяся от пересечения с плоскостью π лучей комплекса Σ, исходящих из P. Радиус этой окружности $R = |\sin\zeta|$, где ζ — квазиэллиптическое расстояние точки P от плоскости π, а центр совпадает с точкой P^w.

Рассматриваются различные системы окружностей в плоскости π и соответствующие им через проекцию II многообразия точек пространства. В частности, эллиптической или гиперболической связке окружностей с базисным кругом q соответствует некоторая поверхность 2-го порядка. Эта поверхность есть поверхность квазиэллиптического вращения вокруг луча конгруэнции $\mathfrak{N}$, проходящего через центр круга q. Эта поверхность переходит в себя при кубических преобразованиях T. Для параболической связки окружностей получается совокупность конусов комплекса, содержащих тот луч конгруэнции $\mathfrak{N}$, который проходит через центр связки.

В произвольной плоскости ε лучи комплекса Σ огибают некоторую гиперболу γ (автор указывает способ построения ее проекции I). Совокупность точек плоскости ε в проекции II соответствует линейная конгруэнция окружностей. Гиперболе γ соответствует однопараметрическая совокупность окружностей, центры которых лежат на единичном круге с центром ε^w — проекции I центра гиперболы γ.

Рассматриваются те циклографические преобразования плоскости π, которые соответствуют квазиэллиптическим отображениям относительно плоскости ε. Рассматриваются отображения прямых g пространства в линейные совокупности кругов плоскости π. При этом каждой прямой q соответствует на плоскости π некоторая улитка Паскаля как огибающая кругов, соответствующих в проекции II точкам прямой q.

Если рассмотреть проекцию II точек пространства R на плоскость π и одновременно циклографическое отображение на эту же плоскость некоторого пространства R^*, то между точками пространств R и R^* установится определенное соответствие. Автор отмечает некоторые свойства этого соответствия. Н. И. Кованцов

4134. Обобщенные развертывающиеся проекции. Маруяма (On generalized development projections. Maruyama Takaharu), Токусима дайгаку гакугэй киё (Сидзэн кагаку), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci., 1954, 5, Dec., 49—56 (англ.)

Рассмотрен один из способов стереографической проекции сферы на плоскость с промежуточным конформ-

ным отображением сферы на развертывающуюся поверхность, которая касается сферы

$$x = \sin v \cdot \cos u; \quad y = \sin v \cdot \sin u; \quad z = \cos v \qquad (1)$$

вдоль кривой, определяемой дифференциальным уравнением

$$\cos v \cdot \frac{d^2v}{du^2} + (\sin v - m)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = m\cos^2 v. \qquad (2)$$

Дано решение в квадратурах уравнения (2) для случая, когда m зависит явно только от v. Для $m = 0$ и $n_3 = \sin v$; $dv/du = \pm \sin v$ определены элементы ребра возврата касательной развертывающейся поверхности и ее уравнение в виде

$$X^i = x^i(s) + t\alpha^i(s), \qquad (3)$$

где $x^i = x^i(s)$ — уравнение ребра возврата, а $\alpha^i(s)$ — направляющие косинусы прямолинейной образующей. В этих случаях кривая прикосновения является локсодромией сферы.

Развертка на плоскость осуществляется введением изометрических координат на развертывающейся поверхности (3). Эти координаты автор вводит с помощью подстановки

$$x = \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg} tk + s; \quad y = \frac{1}{2k}\ln(1 + t^2k^2), \qquad (4)$$

где s — длина дуги ребра возврата, отсчитываемая от некоторой его точки, k — его кривизна, а t — длина отрезка прямолинейной образующей от точки ребра возврата до текущей точки.

Линейный элемент поверхности (3), отнесенной к изометрическим координатам, имеет вид

$$ds^2 = e^{2ky}(dx^2 + dy^2),$$

что позволяет осуществить непосредственную развертку поверхности (3) на плоскость. Промежуточное конформное отображение сферы (1) на поверхность (3) в работе не рассмотрено. В. С. Малаховский

4135 К. Преобразование ортогональных проекций (Учебное пособие для втузов). Чувиков Н. Т. М., «Сов. наука», 1957, 176 стр., илл. 4 р. 30 к.

Излагается способ вспомогательного проектирования на специально выбранную плоскость, известный уже по работам других авторов (С. М. Колотев и др.). Этот способ назван автором „комбинированным методом", так как он состоит из двух операций: 1) проектирование исходных элементов на специально выбранную плоскость P в заданном или специально выбранном направлении, 2) совмещение плоскости P с одной из плоскостей проекций. Способ перемены плоскостей проекций, способ совмещения, построение теней на плоскости проекций являются частными случаями комбинированного метода.

В книге имеется три главы. Гл. I посвящена вопросу преобразования ортогональных проекций точек, линий и плоских фигур путем ортогонального и косоугольного проектирования их на различные плоскости. В гл. II дается решение всех основных метрических и позиционных задач начертательной геометрии комбинированным методом преобразования проекций. В некоторых случаях решения получаются более просты, чем излагаемые в известных курсах начертательной геометрии. В гл. III показывается применение комбинированного метода преобразования ортогональных проекций к построению аксонометрии. Излагаются вопросы теории аксонометрии и приводятся примеры построения аксонометрических изображений непосредственно по ортогональному чертежу. В приложении дается 50 задач для самостоятельных упражнений и приводится описание двух приборов, сконструированных на основании применения комбинированного метода. Н. В. Наумович

4136 К. Начертательная геометрия. Зальковский (Darstellende Geometrie. Salkowski E. 5 Aufl. Bearb. Walter Schulze. Leipzig, Akad. Verlagsges., Geest and Portig K.-G., 1955, X, 213S., 9.50DM) (нем.)

Это переработка 4-го издания учебника автора (Salkowscki E., Grundzüge der darstellenden geometrie 4 ed. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A., Band 3, Akademische Verlangsgesellschaft, Leipzig, 1949, XII+194 pp.) Чертежи переделаны и улучшены; некоторые фигуры добавлены вновь. Хотя число фигур заметно возросло (с 318 до 367), текст изменен незначительно. E. Lukacs

Перевод из Math. Revs, 1956, 17 № 4, 398.

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4137. К понятию псевдовеличины. Голомб, Кухажевский (Über der Begriff der Pseudogrössen. Golab S., Kucharzewski M.), Tensor, 1958, 8, № 2, 79—89 (нем.)

Псевдовеличинами, согласно Схоутену и Стройку, называются геометрические объекты, закон преобразования компонент которых имеет вид:

$$\mathfrak{W}^{k'_1\ldots k'_p}{}_{l'_1\ldots l'_q} = \tau A^{k'_1}_{k_1}\ldots A^{k'_p}_{k_p} A^{l_1}_{l'_1}\ldots A^{l_q}_{l'_q}\mathfrak{W}^{k_1\ldots k_p}{}_{l_1\ldots l_q}, \qquad (1)$$

где $A^{k'}_{k}$ — частные производные функций преобразования системы координат (x') в (x), τ — некоторый множитель, вообще говоря, не зависящий от преобразования координат.

Авторы рассматривают случай, когда множитель τ в (1) зависит от производных (любого порядка) функций преобразования системы координат, и доказывают, что:

I. Если преобразования координат являются преобразованиями класса C^s $(s \geqslant 2)$, то τ может зависеть только от первых производных функций преобразования координат, т. е. $\tau = \tau(A^{k'}_{k})$;

II. Функции $\tau(A^{k'}_{k})$ (при условии дифференцируемости по всем n^2 переменным) имеют вид $|\Delta|^{\alpha}$ или $\operatorname{sgn}\Delta|\Delta|^{\alpha}$, где $\Delta = \operatorname{Det}|A^{k'}_{k}|$, α — некоторое постоянное число.

Таким образом каждая псевдовеличина рассматриваемого вида есть собственная или несобственная аффинорная w-плотность. Ю. Е. Пензов

4138. К вопросу совпадения метрической и аффинной нормали на гиперповерхности. Каменский Н. П., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, 3, 107—110

Пусть V_n — оснащенная гиперповерхность, погруженная в евклидово пространство E_{n+1}. Пусть

$$r^{\alpha}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad \xi_1{}^{\alpha}(x^1, x^2, \ldots, x^n) —$$

векторы, определяющие соответственно поверхность V_n и оснащение на ней, и пусть

$$r^{\alpha}_{ij} = \Gamma^h_{ij} r^{\alpha}_h + h^1_{ij}\xi^{\alpha}_1, \qquad \xi^{\alpha}_{1,i} = \beta^h_{1i} r^{\alpha}_h + \Gamma^1_{1i}\xi^{\alpha}_1 —$$

основные деривационные уравнения для гиперпозерхности.

Тензор h^1_{ij} от оснащения не зависит и определяется только гиперповерхностью V_n. Это основной тензор гиперповерхности. Пусть $|h^1_{ij}| = \Delta \neq 0$ и $g_{ij} = a_{\alpha\beta} r^\alpha_i r^\beta_j$, где $a_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства E_{n+1}. Пусть $|g_{ij}| = g$ и $P_k = h^1_{ij|k} h_1^{ij}$. Здесь символ $|$ означает ковариантное дифференцирование на базе тензора g_{ij}. Если $P_k = 0$, то ξ^α_i определяют аффинную нормаль.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы оснащение на V_n было метрическим, является равенство

$$P_k = \frac{g}{\Delta}\left[\frac{\Delta}{g}\right]_{|k}$$

K-пространством называется такое пространство V_n первого класса, на котором совпадают метрическая и аффинная нормали. Выбирая так называемую каноническую систему координат в пространстве E_{n+1}, находят необходимое и достаточное условие того, чтобы V_n была поверхностью:

$$\Delta/g = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует известная теорема о том, что аффинная и метрическая нормали поверхности в трехмерном пространстве совпадают только на поверхностях постоянной гауссовой кривизны. K-поверхностями являются, в частности, гиперсферы. Автор приводит пример K-поверхностей, отличных от гиперсфер.

Н. И. Кованцов

4139. Минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны. Пинль (Minimalflächen fester Gaußscher Krümmung. Pinl M.), Math. Ann., 1958, **136**, № 1, 34—40 (нем.)

В одной из своих предыдущих статей (Arch. Math. 1949/50, 2, № 4, 283—288) автор исследовал комплексные двумерные минимальные поверхности гауссовой кривизны $K = 0$. Теперь он рассматривает случай постоянной кривизны $K \neq 0$ и доказывает, что таких двумерных минимальных поверхностей (ни вещественных, ни комплексных) в n-мерном евклидовом пространстве R_n нет. Для этого он переходит на рассматриваемых поверхностях к изотропным координатам u_1 и u_2. Тогда

$$K = -\frac{1}{g_{12}} \frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

Это уравнение (при $K = \text{const} \neq 0$) легко интегрируется и проблема сводится к тождеству

$$(\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2)^2 \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\widetilde{u}_1)\, g_\nu(\widetilde{u}_2) = 2K^{-1},$$

которое приводится к противоречию редукцией по n.

Положение меняется при переходе к пространствам с более общей римановой метрикой. Известен результат Коммерелля (Kommerell), по которому для любой поверхности V_2 в R_n существуют поверхности V_m, $2 < m < n$, заключающие V_2, по отношению к которым V_2 является минимальной. Автор изучает следующий конкретный пример: единичная двумерная сфера — сечение цилиндрической гиперповерхности V_3 евклидова пространства R_4 с гиперплоскостью, ортогональной к образующим, — является в V_3 примером замкнутой минимальной поверхности кривизны $+1$.

Ю. Г. Лумисте

4140. Сети и конгруэнции высшего порядка. Аргириаде (Réseaux et congruences d'ordre supérieur. Arghiriade Emmanuel), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957(1958), **23**, № 5, 246—250 (франц.)

Статья содержит результаты автора без доказательств. Автор говорит о сети BS (Bompiani — Segre) линий u, v на поверхности S_2 в проективном пространстве S_n, если точки $x(u, v)$ поверхности S_2 удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{1} a_{ij} x^{ij} = 0 \quad \left(x^{ij} = \frac{\partial^{i+j} x}{\partial u^i \partial v^j}\right)$$

Автор изучает обобщенное уравнение Лапласа порядка (p, q).

$$L \equiv \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} a_{ij} x^{ij} = 0,$$

определяющее обобщенную сеть порядка (p, q).

Точки, фигурирующие в уравнении, образуют матрицу

$$\sum_0 = \begin{pmatrix} x^{00} & x^{01} \dots & x^{0q} \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{p-1,0} & x^{p-1,1} \dots & x^{p-1,q} \\ x^{p,0} & x^{p,1} \dots & x^{p,q} \end{pmatrix}$$

и определяют линейное пространство $\sum_0 = S_{pq+p+q-1}$ или основное лапласово пространство.

По способу Серре (C. Segre, Rend. Circolo mat. Palermo, **30**, 2^{e}sem., pp. 87—90) из $\sum_0$ получается последовательность $\sum^u$ лапласовых пространств в направлении u:

$$\left(\sum_0, \sum_1^u \dots \sum_{p+1}^u\right), \quad \left(\sum_{p+2}^u, \sum_{p+3}^u \dots \sum_r^u\right).$$

Пространства в первой скобке — главные лапласовы пространства. Эти пространства существуют всегда, и их измерения убывают на q единиц с каждым членом последовательности. Пространства, находящиеся во второй скобке,— вторичные лапласовы пространства. $\sum_{p+\sigma}^u$ существует только если $p \geqslant r+1$, где r — ранг системы уравнений, называемых автором уравнениями измерения пространства $\sum_{r+\sigma}^u$.

В последовательности пространств, соответствующей сети BS порядка $(p, 1)$, измерения убывают регулярно на единицу. Последнее лапласово пространство — результат преобразования Лапласа x_1. По аналогии автор называет сетью S в направлении u или сетью S_u — сеть порядка (p, q), у которой измерения второстепенных пространств убывают регулярно на единицу. Здесь также достигают последнего лапласова пространства, приводящегося к точке $x_1 = \sum_{2p}^u$.

Последнее лапласово пространство $x_1 = \sum_{2p}^u$ сети S_u удовлетворяет соотношениям:

$$x_1^{sr} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{r} b_{ijsr} z_{pi}^{0j} + \sum_{i=0}^{q+r} c_{isr} x^{0j}$$

$$(s = 0, 1, \dots p;\ r = 0, 1, \dots q).$$

За исключением уравнения, которое дает x_1^{pq} из коэффициентов при z_{pi}^{0j} и x^{0i} составляют определитель Δ.

Если $\Delta=0$, то сеть (x) особенная, а когда $\Delta\neq 0$ — сеть (x) не особенная. Одно из свойств: точка x_1 описывает сеть S_v не особенную, и последнее лапласово пространство сети (x_1) совпадает с точкой x.

Уравнения

$$x_v = ax + by, \quad y_u = \alpha x + \beta y$$

определяют обыкновенную конгруэнцию прямых.

Если точки $x(u, v)$ и $x_1(u, v)$ удовлетворяют системе

$$x^{0q} = \sum_{i=0}^{q-1} a_i x^{0i} + \sum_{i=0}^{p-1} b_i x^{i0},$$

$$x_1^{p0} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x^{i0} + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i x^{0i},$$

то автор говорит, что прямая xx_1 описывает обобщенную конгруэнцию порядка (p, q) с фокусами x и x_1.

Можно придти к двум определителям δ_1 и δ_2, которые для обыкновенной конгруэнции становятся: $\delta_1 = b$, $\delta_2 = h : b^3$, где h — инвариант Дарбу сети (x). При $\delta_1\neq 0$, $\delta_2\neq 0$ обобщенная конгруэнция не особая. Ее фокусы x и x_1 описывают соответственно сети S_u, S_v. Точка x_1 — последнее лапласово пространство $\sum_{2p}^{u}$ сети (x), и точка x — последнее лапласово пространство $\sum_{2q}^{v}$ сети (x_1).

Как приложение, автор рассматривает сеть

$$x^{22} = Ux^{02} + Vx^{20} + ax^{00},$$

где U зависит только от u, V — только от v, a — от u, v

К. Н. Тихоцкий

4141. О риччи-рекуррентных римановых пространствах трех измерений. Петров П. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 122—126

Так называют, следуя Паттерсону (E. M. Patterson), риманово пространство, если его тензор Риччи $R_{\alpha\beta}\neq 0$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta} = K_\gamma R_{\alpha\beta}.$$

Рассматривая риччи-рекуррентные пространства (р.- р.п.) V_3, автор приходит к ряду результатов, из которых отметим важнейшие.

Теорема 3. Ранг ρ матрицы $\mathfrak{R} \equiv \| R_{\alpha\beta} \|$ меньше трех.

Теорема 6. Если $\rho=1$, то р.-р.п. V_3 неприводимо и $\mathfrak{R}$ имеет характеристику $[(\mathring{2}\ \mathring{1})]$; если же $\rho=2$, то V_3 приводимо, и $\mathfrak{R}$ имеет характеристику $[(11)\ \mathring{1}]$.

Теорема 7. Конформно плоские р. -р.п. V_3 неприводимы.

Следствием этих теорем является то, что метрическая форма неприводимых р.-р.п. V_3 неопределенна. Неприводимые р.-р.п. V_3 существуют, так как представляются, например, формами

$$ds^2 = e^{x_3} dx_1^2 + 2dx_1 dx_2 + dx_3^2$$

или

$$ds^2 = x_3 x_1^2 dx_1^2 + 2dx_1 dx_2 + dx_3^2,$$

из которых только вторая определяет конформно-плоское пространство.

А. П. Норден

4142. Изометрическое соответствие римановых пространств категории $n-2$. Хуан Чжэн-чжун (Hwang Cheng-chung), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 2, 222—230 (кит.; рез. англ.)

Регулярное n-мерное риманово пространство $R(n, p)$ будет категории p, если оно допускает p и только p функционально независимых инвариантов. Автор ставит задачу установить необходимые и достаточные условия, чтобы два пространства категории $n-2$ были изометрически эквивалентны.

Каждое пространство $R(n, p)$ допускает группу движений порядка $n-p$ с $n-p$ линейно независимыми векторами Киллинга. Если при этом n риччи-независимых направлений в римановом пространстве — различны, эта группа будет максимальной. При подходящем выборе локальных координат (x^i) последние $x^{n-p+1}, \ldots, x^n$ координат составят p инвариантов и линейный элемент примет вид

$$ds^2 = g_{\lambda\mu}(x)\,dx^\lambda dx^\mu + 2c_\alpha^\lambda(x^\beta)\,\zeta_{\lambda|\mu}(x^\nu)dx^\alpha dx^\mu + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\,dx^\alpha dx^\beta \quad \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \nu = 1 \ldots n-p \\ \alpha, \beta, \gamma = n-p+1, \ldots, n. \end{pmatrix}.$$

Для $p = n-2$ локальная группа движений G_2 задается посредством

$$\text{(I)}\quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

или

$$\text{(II)}\quad X_1 f = e^{-y}\frac{\partial f}{\partial x}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y},$$

смотря по тому, будет ли она абелевой или не абелевой. Линейный элемент приводится

(I) $ds^2 = g_{ij}(x^\alpha)\,dx^i dx^j$;

(II) $ds^2 = a(dx^2)^2 + 2(ax+b)\,dxdy + (ax^2 + 2bx + c)dy^2 + 2h_\alpha dx dx^\alpha + 2(h_\alpha x + k_\alpha)\,dy dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$;

коэффициенты — функции от $x^3, \ldots, x^n$.

Отсюда риманово пространство $R(n, n-2)$ допускает 3-мерную локальную группу движений Ли, если при подходящем выборе координат

$$ds^2 = g_{11}(x^\alpha)(dx^2 + dy^2) + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\,dx^\alpha dy^\beta.$$

Если v_n и $\bar{v}_n$ — два римановых пространства категории $n-2$, то после приведения к виду

$$ds^2 = g_{ij}(x^\alpha)dx^i dx^j, \; d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(\bar{x}^\alpha)\,d\bar{x}^i\,d\bar{x}^j$$

многообразия v_n и $\bar{v}_n$ будут изометричны только в том случае, если $g^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\beta}$ и $\det|g_{\lambda\mu}| / \det|\bar{g}_{\lambda\mu}| = \text{const}$. Аналогичные (более сложные) условия изометрии получаются для римановых пространств с неабелевой группой движений.

Из резюме автора

4143. О движениях в неприводимых римановых симметрических пространствах первого класса. Петров А. З., Затворников С. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 35—40

П. А. Широковым было найдено выражение линейного элемента симметрических римановых пространств первого класса в нормальной системе координат. Пользуясь этим выражением, авторы доказывают, что эти пространства допускают неполупростую неразрешимую группу движений, порядок которой равен 8 при $n=4$ и $\frac{1}{4}n(n+2)$ при $n>4$. В обоих случаях записано выражение операторов группы в нормальной системе координат, а для первого случая составлены уравнения структуры.

А. П. Норден

4144. Об n-мерных однородных пространствах с группами Ли измерений, больших $\frac{1}{2}n(n-1)$. Обата

(On n-dimensional homogeneous spaces of Lie groups of dimension greater than $n(n-1)/2$. Obata Morio), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 4, 371—388 (англ.)

Изучается n-мерное однородное риманово пространство G/H, где G-связная r-параметрическая группа Ли, H — ее компактная подгруппа. Предполагается, что G действует в G/H почти эффективно, т. е. алгебра H' группы H не содержит идеала алгебры G' группы G.

Как известно, если $\frac{n(n-1)}{2} < r < \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geqslant 3$, $n \neq 4$, $n \neq 8$, то $r = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Доказывается, что этот результат имеет место и в случае $n = 8$. Получаются метрические и топологические структуры пространств при $r = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $n \neq 4$, а именно: метрики пространств имеют вид: (1) $C_0^1 \times C_+^{n-1}$, (2) $C_0^1 \times C_-^{n-1}$, (3) C_0^n или (4) C_-^n, где $C_+^a (C_-^a)$ — a-мерная метрика с положительной (отрицательной) постоянной кривизной, C_0^a — a-мерная евклидова метрика, при этом топологическая структура соответственно будет (1) $E^1 \times S^{n-1}$ (если пространство односвязное) (2) E^n или $S^1 \times E^{n-1}$, (3) E^n или $S^1 \times E^{n-1}$, (4) E^n, где E^a и S^a — a-мерное евклидово пространство и a-мерная сфера соответственно. Гу Чао-хао

4145. Классы V_3 геодезические которых допускают первый квадратичный интеграл. Тоноло (Classi di ds^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici. Tonolo Angelo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 3, 230—238 (итал.)

Автор излагает решения Штекеля, Пенлеве и Леви—Чивита задачи определения римановых пространств V_3, допускающих нетривиальный первый квадратичный интеграл геодезических линий, и сравнивает те предположения, при которых они получены. Н. С. Синюков

4146. Классификация трехмерных римановых пространств по их дифференциальным инвариантам. Петров П. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 119—121

Предполагая, что тензор R_{ijkl} удовлетворяет обычным алгебраическим тождествам, связывающим компоненты тензора кривизны, автор формулирует следующую лемму: Если компоненты тензора R_{ijkl} являются голоморфными функциями переменных x^1, x^2, x^3 в области H, то существует неособенная тернарная квадратичная форма ds^2, для которой R_{ijkl} будет тензором Римана-Христоффеля. С другой стороны, отмечается известный факт, что тензор кривизны в трехмерном римановом пространстве выражается через метрический тензор g_{ij} и некоторый симметрический тензор L_{ij}.

Автор предлагает положить в основу классификации трехмерных римановых пространств следующую теорему: Множество неособенных тернарных квадратичных форм по их характеристикам

[111], [21], [3], [(11) 1] [(21)] [(111)]

разбивается на шесть непустых и непересекающихся классов.

Подробные доказательства не приводятся. А. П. Норден

4147. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу положительным числом. Топоногов В. А., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 4, 719—721

Для римановых пространств $R^m{}_k$ размерности m дважды непрерывно дифференцируемых с полной метрикой, кривизна которой снизу ограничена числом $k > 0$, доказаны теоремы:

Углы произвольного треугольника ABC, составленного из кратчайших, не меньше углов треугольника $(ABC)'_k$ на плоскости R_k постоянной кривизны k с теми же длинами сторон.

Если в $R^m{}_k$ существует треугольник с суммой сторон $2\pi/\sqrt{k}$ и ни одна сторона не равна сумме двух других, то каждый угол равен π. Сумма длин сторон не превышает $2\pi/\sqrt{k}$.

Вообще в $R^m{}_k$ не существует кратчайшей с длиной больше $\pi/\sqrt{k}$. Если же существует с длиной $\pi/\sqrt{k}$, то $R^m{}_k$ есть m-мерная сфера радиуса $1/\sqrt{k}$; тот же результат получается, если найдется треугольник с суммой сторон $2\pi/\sqrt{k}$. С. П. Фиников

4148. Замечание о гармонических группах Ли. Уоллес (A note on harmonic Lie groups. Wallace E. W.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 34—35 (англ.)

Пространство с симметрической аффинной связностью (размерности n) называется (просто) гармоническим (Ruse, Publ. Math. Debrecen, 1952, **2**, 169—174) при следующем условии. Пусть $x^i = \Phi^i(x_0, at)$ — уравнение пути, идущего по заданному направлению $a = (a^1, \ldots, a^n)$ из точки $P_0 = (x^1{}_0, \ldots, x^n{}_0)$ и $Y^i(x, x_0) = t\frac{dx^i}{dt}$. Требуется, чтобы $Y^i{}_{;i} = n$ для любой точки P_0 (где знаком точка с запятой обозначается ковариантное дифференцирование).

В реферируемой заметке устанавливается, что для того чтобы группа Ли (при своей естественной симметрической аффинной связности) была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы ее алгебра Ли была нильпотентной. Строится пример группы (для любой размерности n), являющейся гармоническим пространством аффинной связности, не будучи в то же время римановым пространством. Соответствующая алгебра Ли задается (в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$) с помощью ненулевых коммутаторов $[e_\alpha, e_n] = e_{\alpha-1}$ ($\alpha = 2, \ldots, n-1$). И. З. Розенкноп

4149. Инфинитезимальные проективные преобразования. Кути (Transformations infinitésimales projectives. Couty Raymond), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 11, 804—806 (франц.)

Если (ξ^i) — вектор, определяющий инфинитезимальное проективное преобразование в компактном, ориентируемом римановом пространстве, и R_{ij} — тензор кривизны Риччи, то не существует проективного вектора, удовлетворяющего $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$, если только его ковариантная производная не будет нулевой, и тогда $R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$. Если же кривизна Риччи в пространстве всюду отрицательна, то вообще не существует не равного нулю проективного вектора.

На эйнштейновском пространстве с однородной группой голономии, не допускающей инвариантных векторов, если L означает алгебру Ли линейных проективных форм, векторное пространство L будет прямой суммой пространства алгебры Ли линейных форм Киллинга и пространства проективных линейных форм, гомологичных нулю.

На полном пространстве Эйнштейна с отрицательной скалярной кривизной всякая проективная линейная форма, соответствующая вектору ограниченной длины, будет формой Киллинга.

В келеровом пространстве $v_{2n}(n > 1)$ всякая замкнутая проективная линейная форма будет аффинной формой; если же пространство будет компактно и ориентируемо, то замкнутая проективная форма будет с нулевой ковариантной производной. На пространстве Эйнштейна-Келера $v_{2n}(n > 1)$ с ненулевой скалярной кривизной вся-

кая проективная линейная форма будет формой Киллинга. С. П. Фиников

4150. О касании многообразий в аффинном линейном пространстве. Ножичка (O styku variet v afinním lineárním prostoru. Nožička František), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 2, 171—201 (чешск.; рез. русск., франц.)

В линейном аффинном пространстве $E_n (n \geqslant 2)$ с координатами x^α автор рассматривает два p-мерных многообразия $(1 \leqq p \leqq n-1)$

$$x_\alpha = {}^{(i)}x^\alpha({}^{(i)}\tau_i^a) \quad (i = 1,2;\ \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p), \quad (1)$$

о функциях в правой части соотношения (1) он делает обычные предположения. Пусть $\overset{(s)}{v}{}^\alpha_0$ $(s=1, \ldots, n-p)$ — фиксированные векторы в E_n, удовлетворяющие условиям

$$\left[\overset{(i)}{B}{}^\alpha_1 \ldots \overset{(i)}{B}{}^\alpha_p \cdot \overset{(1)}{v}{}^\alpha \ldots \overset{(n-p)}{v}{}^\alpha \right] \neq 0 \qquad (i = 1,2),$$

$$\overset{(i)}{B}{}^\alpha_a = \left(\frac{\partial^{(i)} x^\alpha}{\partial {}^{(i)}\tau_i^a} \right)_{{}^{(i)}\tau_i^a = {}^{(i)}\tau_i^a{}_0} \qquad (i=1,2).$$

Символы ${}^{(i)}\tau_i^a{}_0$ — значения параметров многообразий в их общей точке P_0. Система уравнений

$${}^{(2)}x^\alpha\left({}^{(2)}\tau_i^a\right) - {}^{(1)}x^\alpha\left({}^{(1)}\tau_i^a\right) = \sum_{s=1}^{n-p} \lambda_s \overset{(s)}{v}{}^\alpha_0$$

определяет соответствие между точками многообразий (1), которое в достаточно малой окрестности точки P_0 одно-однозначно.

Касание определяет автор следующим образом: Многообразия (1) имеют в общей точке P_0 касание по крайней мере k-го порядка, если

$$(\lambda)_0 = (d\lambda)_0 = \ldots = (d^k\lambda)_0 = 0 \quad \text{для } s = 1, \ldots, n-p,$$

$(d^l\lambda)_0$ — значения выражения $(d^l\lambda)$ в точке P_0.

Это определение не зависит ни от выбора координат в E_n, ни от выбора параметров многообразий, ни от выбора фиксированных векторов $\overset{(s)}{v}{}^\alpha_0$.

Автор приводит необходимое и достаточное условие для того, чтобы многообразия (1) имели в точке P_0 касание k-го порядка (в вышеописанном смысле); в двух частных случаях он показывает, что его определение эквивалентно метрическим определениям.

Z. Nádeník

4151. Характеристическое многообразие точечного преобразования и квазиасимптотическое многообразие. Ваона (Varietà caratteristiche di una trasformazione puntuale e varietà quasi-asintotiche. Vaona Guido), Boll. Unione mat., ital., 1955, **10**, № 1, 32—42 (итал.)

Изучение точечных преобразований между двумя проективными пространствами S_r и S'_r таких, что в каждой паре соответствующих точек имеется бесконечное множество характеристических прямых, приводит к некоторым задачам теории квазиасимптотических многообразий (Villa, Ann.Univ. Ferrara, 1950, 1, 17—21; Muracchini, Boll. Unione mat ital., 1951, 6, 198—205).

В настоящей статье определены V_k, которые имеют ∞^k $(k-1)$-мерных квазиасимптотических покрытий $\sigma_{1,2}$ максимального вида. Доказано, что все такие V_k исчерпываются следующими типами: I. V_k есть $\infty^1 S_{k-1}$. II. V_k есть $\infty^2 S_{k-2}$, соприкасающихся к асимптотическим кривым интегральной поверхности уравнения Лапласа параболического типа. III. V_k есть $\infty^2 S_{k-2}$, проектирующих из $S_h (0 \leqslant h \leqslant k-3)$ соприкасающихся S_{k-h-3} к асимптотическим кривым интегральной поверхности уравнения Лапласа параболического типа. IV. $V_k \subset S_{k+1}$ и есть $\infty^2 S_{k-2}$, имеющее неподвижную касательную S_k вдоль каждой образующей S_{k-2}. Квазиасимптотические покрытия можно организовать в $\infty^1 V_{k-1}$ во всех случаях, кроме IV. Многообразия V_3, которые в каждой точке имеют два плоских квазиасимптотических покрытия, принадлежат к одному из типов: а) $V_3 \subset S_4$; б) V_3 есть ∞^1 плоскостей с неподвижной касательной S_3 вдоль каждой плоской образующей. V_3, имеющие в каждой точке одно плоское квазиасимптотическое покрытие, принадлежат только к типам II, III; эти покрытия организуемы в ∞^1 поверхностей. В. Т. Базылев

4152. Характеристика плоского проективного пространства. Ху Хэ-шэн (Hu Hoo-sung), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, **8**, № 2, 269—271 (кит.; рез. англ.)

Основной результат: Если m-мерное пространство V_m аффинной связности без кручения содержит $m+2$ семейства вполне геодезических гиперповерхностей таких, что существует отображение V_m в аффинное пространство A_m, которое переводит $m+2$ семейства гиперповерхностей в $m+2$ семейства плоскостей общего положения, то пространство будет проективно-плоским, и наоборот. Число $m+2$ не может быть уменьшено, даже наличие $m+1$ семейства такого рода недостаточно, чтобы пространство необходимо было проективно-плоским. Из резюме автора

4153. О многообразиях с аффинной связностью, состоящих из элементов гиперповерхностей; в частности об их эквивалентности. Мор, Шош (Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen, insbesondere deren Äquivalenz. Moór A., Soós Gy.), Acta scient. math., 1955, **16**, № 1-2, 29—42 (нем.)

Пусть H_n — многообразие гиперповерхностных элементов, принадлежащее к дифференцируемому точечному многообразию P_n. Элементом многообразия H_n будет пара (x^i, u_t), где u_t — элемент гиперповерхности в точке x^i. Автор предполагает, что в H_n существует инвариантный дифференциал векторной плотности. Этим самым H_n становится аффинным расширением пространства Картана, в котором H_n имеет метрику $L(x,u)$. Авторы развивают тензорное исчисление такого пространства, включая ковариантное дифференцирование, кривизну и кручение. Даются также необходимые и достаточные условия для эквивалентности двух многообразий H_n.

C. B. Allendoerfer

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 189—190.

4154. Некоторые пространства аффинной связности с реальной метрикой. Су Бу-цин (Certain affinely connected spaces with areal metrics. Su Buchin), Scientia sinica, 1957, **6**, № 6, 967—975 (англ.)

Статья является переводом работы, опубликованной на китайском языке (РЖМат, 1958, 7145). Гу Чао-хао

4155. К теории триметрических систем П. К. Рашевского. Яглом И. М., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, **7**, 187—195

Триметрической системой Рашевского называется шестимерное многообразие элементов, называемых реперами, в котором заданы шесть линейно независимых дифференциальных форм $\overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \overset{0}{\omega}, \overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}, \overset{(0)}{\omega}$, удовлетворяющих некоторым условиям.

Уравнения

$$\left[d \overset{A}{\omega} \right] = C^{\ A}_{\text{БГ}}\ \omega\omega \quad (A, \text{Б}, \Gamma = 1,2,0,(1),(2),(0)),$$

выражающие внешние дифференциалы основных форм A ω в виде линейных комбинаций попарных произведений этих форм, автор называет структурными уравнениями их коэффициенты $C^A_{Бг}$ — структурными коэффициентами триметрической системы. Находятся условия, которым должны удовлетворять структурные коэффициенты для того, чтобы основные формы триметрической системы определялись однозначно, а также характеристические условия для трех специальных классов триметрических систем — систем обладающих соответственно первой, второй и третьей мерами. Ю. Е. Пензов

4156. Дифференциальная топология трехмерных шапочек, касающихся в точке. Ваккаро (Topologia differenziale delle calotte tridimensionali tangenti in un punto. Vaccaro Giuseppe), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **44**, 201—231 (итал.)

Работа примыкает к циклу статей, Бомпьяни, объединенных названием „Дифференциальная топология" (РЖМат, 1955,1947).

Пусть в окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$ арифметического пространства $X_n: x^i = x^i(u^1, \ldots, u^k)$, $x^i(0,\ldots,0) = 0$, ранг матрицы $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$ равен k и справедливы разложения

$$x^i = \sum a^i_\alpha u^\alpha + \ldots + \sum a^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_s} + \text{члены}$$

высшего порядка. Совокупность элементов, определяемых точкой O, параметрами u^α и коэффициентами $a^i_\alpha, \ldots, a^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ называется регулярной k-мерной шапочкой порядка s и обозначается через σ^s_k. O называется центром шапочки. Понятие регулярной шапочки относится к дифференциальной топологии (класса C^s) в том смысле, что преобразование (класса C^s) окрестности O в себя переводит σ^s_k в $\bar{\sigma}^s_k$. Говорят, что шапочки σ^s_k, $\bar{\sigma}^s_k$ с центром O имеют в нем соприкосновение порядка h ($h < s$), если они содержат общую шапочку σ^h_k с центром O, т. е. в разложениях соответствующих σ^s_k и $\bar{\sigma}^s_k$ (при надлежащей параметризации) совпадают все члены до порядка h включительно. Если $h = 1$, то σ^s_k, $\bar{\sigma}^s_k$ называются касательными. Понятие соприкосновения является топологическим.

Автор изучает трехмерные шапочки второго порядка, касательные в центре O. Основные результаты связаны с рассмотрением тех многообразий, содержащих пару касающихся (соприкасающихся) в O шапочек, число измерений которых минимально.

Краткая формулировка результатов затруднительна. Г. И. Дринфельд

4157. Упрощенное доказательство теоремы Паппуса—Лейзенринга. Аль-Дхахир (A simplified proof of the Pappus—Leisenring theorem. Al-Dhahir M. W.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 3, 225—226 (англ.)

Речь идет о теореме: Пусть S — коммутативное проективное n-мерное пространство ($n > 1$). В гиперплоскости H_0 из S_n пусть $T = \{t_i\}$ ($i = 0,1,\ldots,n$) будет совокупностью $n+1$ точки, из которых ни одна группа из n точек не будет зависимой. Пусть $A_{k,m}$ — подпространство, определяемое точками $T - t_k - t_m$, и через каждое $A_{k,m}$ проходят две гиперплоскости H_{km} и H_{mk}, отличные от H. Для каждого k совокупность n гиперплоскостей H_{km} ($m = 0,1\ldots,n$; $m \neq k$) определяет точку p_k и, аналогично, если поменяем местами m и k, — точку q_m. Тогда, если точки p_k зависимы, то будут зависимы с тем же рангом точки q_m. С. П. Фиников

4158. О голоморфно-проективном соответствии почти комплексных пространств. Тасиро (On a holomorphically projective correspondence in an almost complex space. Tashiro Yoshihiro), Math. J. Okayama Univ., 1957, **6**, № 2, 147—152 (англ.)

В реферируемой работе обобщается понятие голоморфно проективного соответствия на пространстве почти комплексной структуры со связностью и доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пространство аффинной связности с почти комплексной структурой является голоморфно проективно-плоским тогда и только тогда, когда тензор голоморфно проективной кривизны P^h_{kji} равен нулю.

В случае эрмитовой метрики доказывается известная теорема.

Теорема 2. Если келерово пространство голоморфно проективно-плоское, то оно имеет постоянную голоморфную кривизну. Л. Е. Евтушик

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4159. Прямолинейные потенциальные поля. Ленц (Geradlinige Potentialfelder. Lenz Hanfried), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, **60**, № 3, 2. Abt., 39 (нем.)

Как известно, линии поля идеального плоского, цилиндрического и сферического конденсатора являются прямыми. Автор доказывает, что, обратно, из прямолинейности линий поля, имеющего потенциал $u(x, y, z)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, следует, что поверхности уровня такого поля являются либо плоскостями, либо круговыми цилиндрами, либо сферами.

В силу параллельности поверхностей семейства $u(x,y,z) = \text{const}$ функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению $(\text{grad } u) = f(u)$, откуда вытекает соотношение $-f'(u) = 2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности $u(x, y, z) = \text{const}$. При параллельном переносе поверхности оба радиуса R_1 и R_2 увеличиваются на одно и то же число h так, что при любом h

$$\frac{1}{R_1 + h} + \frac{1}{R_2 + h} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что на каждой поверхности уровня оба радиуса R_1 и R_2 постоянны, а из этого вытекает что поверхность является либо плоскостью, либо круговым цилиндром, либо сферой. Ю. Л. Рабинович

4160. Спинорное представление новой фундаментальной группы преобразований релятивистской квантовой механики. Сибата (Spin representation of the new fundamental group of transformations in relativistic quantum mechanics. Shibata Takashi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, **A19**, № 3, 491—498 (англ.)

Вводится новая группа преобразований координат плоского метрического пространства $x'^\lambda = A^\lambda_\mu x^\mu$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$). Элементы ее A^λ_μ связаны с компонентами четырехмерной скорости U^λ и некоторого фиксированного нуль-вектора k^λ соотношениями

$$A^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\mu + k^\lambda \frac{U_\mu - U'_\mu}{(kU')} + \frac{U'^\lambda - U^\lambda}{(kU)} k_\mu + \frac{(UU') - (UU)}{(kU)(kU')} k^\lambda k_\mu.$$

В этом выражении приняты следующие обозначения:

$$U^\lambda = (v^i/\sqrt{1 - v^2/c^2},\ c/\sqrt{1 - v^2/c^2}),\ U'^\lambda = U^\lambda(v=0) = (0, 0, 0, c),\ (U \cdot U) = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2,$$

где v^i — компоненты обычной (трехмерной скорости ($i = 1, 2, 3$), $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор. Нуль-вектор k^λ имеет только три переменных координаты $k^\lambda = (d^1, d^2, d^3, 1)$ и определяется условием $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$.

Таким образом, элементы A^ν_μ фактически зависят от

составляющих v^i обычной скорости, что позволяет рассматривать новую группу G_3 как трехпараметрическую подгруппу собственно группы Лоренца.

С помощью четырехмерных матриц Дирака γ^μ, удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I,$$

указаны спиновые преобразования, соответствующие преобразованиям G_3. Получено также спинорное представление этой группы. Я. И. Пугачев

4161. О фазово-инвариантном и градиентно-инвариантном спинорном анализе. Букдал (On phase-invariant and gauge-invariant spinor analysis. Buchdahl H. A.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 34, 109—113 (англ.)

В работе Инфельда и Ван-дер-Вардена (Infeld L., van der Waerden B. L., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1933, стр. 380) для каждой точки риманова пространства V_4 с метрическим тензором g_{kl} было предложено ставить в соответствие двумерное комплексное спинорное пространство с метрическим спинором $\gamma_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1,2$). Связь между спинорами и векторами определяется тем что спинтензору $a_{\dot\lambda\mu} = a_{\mu\dot\lambda}$ ставится в соответствие вектор $a^k = \sigma^{k\dot\lambda\mu}a_{\dot\lambda\mu}$, причем $\sigma^{k\dot\mu\nu}\sigma^{l}_{\dot\mu\nu} = g^{kl}$, $\sigma^{k\dot\mu\nu}\sigma^{\dot\alpha\beta}_{k} = \gamma^{\dot\mu\dot\alpha}\gamma^{\nu\beta}$. Допуская, что ковариантная производная спинора равна ψ^α; $k = \psi^\alpha$, $k + \Gamma^\alpha_{\beta k}\psi^\beta$, векторный потенциал для электромагнитного поля определяется как величина, пропорциональная мнимой части $\Gamma^\alpha_{\alpha k}$, что позволяет сформулировать понятие о градиентном преобразовании. В настоящей работе рассматриваются возможности обобщения этого понятия. В окончательном виде совместное фазовое и градиентное преобразование определяется формулами

$$\gamma_{\mu\nu}\to\gamma_{\mu\nu}\exp\left(-\frac{1}{2}f - i\varphi\right),\quad k_s\to k_s + f_{,s},\quad \varkappa_s\to\varkappa_s + \varphi_{,s} \quad (1)$$

Здесь f и φ — произвольные вещественные скаляры, k_s и $\varkappa_s$ — вещественные 4-векторы, с помощью которых определяется градиентно- и фазово-инвариантная ковариантная производная тензора-спинора $z^{\nu\cdots}_{\dot\mu\ldots k\ldots}$:

$$\begin{aligned} Z^{\nu\cdots}_{\dot\mu\ldots;k\ldots;s} &= Z^{\nu\cdots}_{\dot\mu\ldots k\ldots,s} + \Gamma^\nu_{\lambda s}Z^{\lambda\cdots}_{\mu\ldots k\ldots} + \ldots - \\ &- \Gamma^{\dot\lambda}_{\dot\mu s}Z^{\nu\cdots}_{\dot\lambda\ldots k\ldots} - \ldots - \Gamma^t_{ks}Z^{\nu\cdots}_{\mu\ldots t\ldots} - \ldots - \\ &- (vk_s + iw\varkappa_s)Z^{\nu}_{\dot\mu\ldots k\ldots}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем принимается, что $\sigma^{k\dot\mu\nu}{}_{;s} = 0$, $\gamma_{\mu\nu;s} = 0$. При этом спинор имеет градиентный вес v и фазовый вес w, если при преобразовании (1) он приобретает множитель $\exp(vf + iw\varphi)$. С учетом приведенных формул выводятся отдельные соотношения для смешанного градиентно- и фазово-инвариантного „тензора кривизны", имеющего два векторных и два спинорных индекса. Г. А. Зайцев

4162. Волновые уравнения в конформном пространстве. Волновое уравнение для ядра. Мураи (Wave equations in conformal space. Wave equation for nucleon. Murai Iasuhisa), Sci. Repts Saitama Univ., ser. A, 1955, **2**, № 1, 7—31 (англ.)

Автор рассматривает пятимерное пространство сфер в пространстве Минковского в терминах шести однородных координат. В этом представлении конформная группа пространства Минковского есть проективная группа квадрики. Формализм автора отличается от формализма Ингрема (Ingraham) в статье (РЖМат, 1956, 7612) и сопоставлен с ним.

Эта статья связана главным образом со свойствами различных тензорных и спинорных волновых уравнений в пятимерном пространстве сфер и их предварительной интерпретацией в терминах пространства Минковского. A. H. Taub

Перевод из Math. Revs, 1956, 17 № 3,305.

4163. Общековариантные уравнения полей с произвольными спинами. Дуань И-ши, Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, **34**, № 3, 632—636 (рез. англ.)

Уравнения Гельфанда и Яглома

$$L^k\,\partial\psi/\partial x^k + m\psi = 0$$

для обобщенной функции ψ, описывающей частицы произвольного спина, справедливы в рамках специальной теории относительности (L^k — матрицы, определяющие линейные преобразования функции ψ). Автором получена общековариантная форма этих уравнений для случая риманова пространства, метрический тензор которого имеет вид

$$g_{ik} = \lambda_{i(\alpha)}\lambda_{k(\alpha)},$$

где $\lambda_{i(\alpha)}$ („полуметрики") являются элементами несимметричной матрицы. При таком обобщении основная задача сводится к замене обычной производной $\partial\psi/\partial x^k$ через ковариантную. Обобщенные уравнения можно получить также из вариационного принципа; в работе приведено выражение для функции Лагранжа. Я. И. Пугачев

4164. Калибровочно-инвариантное обобщение теории поля с асимметричным фундаментальным тензором. Букдал (Gauge-invariant generalization of field theories with asymmetric fundamental tensor. Buchdahl H. A.), Quart. J. Math., 1957, **8**, № 30, 89—96 (англ.)

В четырехмерных единых теориях поля для того, чтобы охватить электродинамику, к симметрично метрическому тензору приходится добавлять либо вектор, играющий роль электромагнитного потенциала (калибровочно-инвариантная теория Вейля), либо антисимметричный тензор, играющий роль электромагнитного поля (Эйнштейн). В реферируемой работе рассмотрено пространство J_n, в котором, наряду с асимметричным ковариантным тензором g_{ik}, введен ковариантный вектор k_i. При этом асимметричная линейная связность определена следующим образом:

$$\Gamma^s_{ik} = p^{sabc}_{ik}(g_{ab,c} - g_{ab}k_c),$$

где p^{sabc}_{ik} определяют предполагаемое существующим решение системы линейных алгебраических уравнений $\Delta^s_{il}g_{sk} + \Delta^s_{lk}g_{is} = f_{ikl}$ с помощью соотношения $\Delta^s_{ik} = p^{sabc}_{ik}f_{abc}$. Тогда J_n можно рассматривать либо как калибровочно-инвариантное обобщение пространства H_n типа Эйнштейна, либо как „асимметрическое" обобщение пространства W_n типа Вейля.

При преобразовании калибровки $g_{ab}\to\lambda g_{ab}$, $k_c\to k_c + (\log\lambda)_{,c}$, связность Γ^s_{ik} остается инвариантной. С помощью Γ^s_{ik} может быть построен калибровочно-инвариантный эрмитов тензор Эйнштейна $'G_{ik} = -\Gamma^s_{ik,s} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{s}_{sk,l} + \Gamma^{s}_{sk,i}\right) + \Gamma^s_{il}\Gamma^t_{sk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}$.

В заключение в частном примере демонстрируется способ явного получения калибровочно-ковариантных эрмитовских гамильтоновых производных.

Ф. И. Федоров

4165. Уравнения движения в несимметричной единой теории поля. Боннор (The equations of motion in the non-symmetric unified field theory. Bonnor W. B.), Proc. Roy. Soc., 1954, **A226**, № 1166, 366—377 (англ.)

См. РЖФиз., 1956, 9521.

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4166. О группах голономии линейных связностей. Хано, Одзеки (On the holonomy groups of linear connections. Hano Jun-ichi, Ozeki Hideki), Nagoya Math. J., 1956, **10**, June, 97—100 (англ.)

Показано, что всякая связная подгруппа полной линейной группы с n переменными будет однородной группой голономии некоторой аффинной связности в некотором n-мерном многообразии. В частности, ограниченная однородная группа голономии может быть незамкнутой; рассматривается пример, показывающий, что она может оказаться незамкнутой даже в случае, когда отсутствует кручение. W. Ambrose

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 7, 507

4167. Заметка о существовании рациональных точек. Судзуки (Note on the existence of rational points. Suzuki Satoshi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 5, 245—246 (англ.)

Обобщение теоремы Нисимура (РЖМат, 1957, 6659). Пусть U и V — абстрактные многообразия над одним и тем же базисным полем k и V полное; пусть P — относительно простая точка U над k; если существует рациональное отображение U в V, определенное, над k, то существует по крайней мере одна точка Q на V, соответствующая точке P, такая, что $K(Q)$ содержится в $K(P)$. Из резюме автора

4168. О приводимости многообразия аффинной связности. Касивабара (On the reducibility of an affinely connected manifold. Kashiwabara Shobin), Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 1, 13—28 (англ.)

Рассматривается n-мерное, дифференцируемое, аффинно-полное и R-приводимое многообразие M аффинной связности без кручения. Пространство аффинной связности называется R-приводимым, если в нем существует такое семейство реперов $(e_1,\ldots,e_n)$, что в некоторой окрестности каждой точки уравнения перенесения реперов можно написать в виде

$$dx = dx^a e_a + dx^i e_i,\ de_a = \Gamma^b_{ca}(x^d)\,dx^c e_b,$$

$$de_i = \Gamma^k_{ij}(x^l)\,dx^j e_k \quad (a,\ldots,d = 1,\ldots,r;\ i,\ldots,l = r+1,\ldots,n).$$

Если положить по всему многообразию M $dx = \omega^a e_a + \omega^i e_i$, то система Пфаффа $\omega^i = 0$ ($\omega^a = 0$) имеет r-мерное ($n-r$-мерное) максимальное интегральное многообразие $R(x)$ ($S(x)$), проходящее через точку x.

Доказывается: 1) Если все $R(x)$ и $S(x)$ односвязные, то произведение $\widetilde{M} = R(o)\times S(o)$ ($o\in M$) эквивалентно накрывающему пространству M. 2) Если M односвязное, то M эквивалентно аффинному произведению $R(o)\times S(o)$. Изучается случай, когда $\pi_1(M) = 2$, т. е. фундаментальная группа M является циклической группой порядка 2. Вводится обозначение: $p(x)$ — число точек $R(x)\cup S(x)$. Доказывается, что в случае $\pi_1(M) = 2$ M имеет одну из следующих структур:

1) $\pi_1(R) = 1$ (т. е. R односвязное), $\pi_1(S) = 1$ для всяких R, S и $p(x) = 2$ ($x\in M$);

2) $\pi_1(R) = 1$, $\pi_1(S) = 2$ для всяких R и S, и M эквивалентно $R(o)\times S(o)$ ($o\in M$);

3) $\pi_1(R) = 1$ для всякого R, все S разделяются на два класса, удовлетворяющих соответственно $\pi_1(S) = 1$ и $\pi_1(S) = 2$, причем $p(a) = 1$, когда $\pi_1(S(a)) = 1$; $p(a) = 2$, когда $\pi_1(S(a)) = 2$. Гу Чао-хао

4169. Проективные связности и проективные преобразования. Танака (Projective connections and projective transformations. Tanaka Noboru), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 1—24 (англ.)

В работе методами теории связности на расслоенных пространствах изучаются соотношения между группой проективных и группой аффинных преобразований пространства аффинной связности. Основной результат автора заключается в том, что если аффинная связность — без кручения, полная (т. е. всякую геодезическую можно продолжить на сколь угодно большие значения аффинного параметра), поле тензора Риччи параллельно и квадратичная форма $R_{ij}dx^i dx^j$ равна нулю или отрицательная полуопределенная, то группа проективных преобразований совпадает с группой аффинных преобразований. Устанавливается также геометрический критерий того, что две аффинные связности, заданные на данном многообразии, проективны друг другу, т. е. что их геодезические совпадают. Ю. И. Левин

4170. О вложении дифференцируемого многообразия в евклидово пространство. Амман (Sur l'immersion d'une variété différentiable dans l'espace euclidien. Ammann André), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 11, 828—833 (франц.)

Пусть V — n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞. Многообразие V называется счетным в бесконечности, если оно обладает такими топологическими свойствами:

1) V имеет счетное, локально конечное покрытие U_i (каждая точка пространства V обладает окрестностью, пересекающейся с конечным числом множеств U_i).

2) Множества $\bar{U}_i$ бикомпактны.

Автором доказана теорема Уитнея в следующей формулировке: Можно отобразить действительное, дифференцируемое, n-мерное, счетное в бесконечности многообразие V класса C^∞ в евклидово пространство R^{2n+1} при помощи всюду регулярного гомеоморфизма класса C^∞. Л. Е. Евтушик

4171. О вложении многообразий Финслера в пространства Минковского. Гу Чао-хао, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, **8**, № 2, 272—275 (кит.; рез. русск.)

Автор рассматривает проблему вложения в целом. Основной результат: Всякое дифференцируемое n-мерное многообразие M^n класса $r\,(r\geqslant 2)$ погружается регулярно и собственно в $4n$-мерное аффинное пространство E^{4n} так, что два любых вектора, касающихся к образу вложения M^n в E^{4n}, в различных точках не будут параллельными. Аналогично: всякое n-мерное многообразие Финслера класса $r\,(r\geqslant 2)$ погружается в $4n$-мерное пространство Минковского. Из резюме автора

4172. Афинные связности на многообразиях с почти комплексной, кватернионной и эрмитовой структурами. Обата (Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure. Obata Morio), Нихон сугаку сюхо, Japan. J. Math., 1956, **26**, 43—77 (англ.)

Статья носит обзорный характер. Исследование ведется тензорным методом в целом. Сначала дается определение почти комплексной структуры и условие того, чтобы она была комплексно-аналитической (иначе, интегрируемой) структурой. Далее вводится понятие о кватернионной структуре и рассматриваются условия ее интегрируемости. Затем решается вопрос о нахождении аффинной связности, относительно которой данная почти комплексная структура ковариантно постоянна. Именно, доказывается существование такой связности и дается способ ее построения из произвольной аффинной связности. Указываются некоторые частные случаи таких связностей. Далее аналогичные вопросы рассмотрены для комплексно-аналитического многообразия с кватернионной структурой, для многообразия почти эрмитовой структуры и псевдокелерова многообразия кватернионной структуры. Библ. 31 назв. Н. С. Синюков

4173. О лемме Шварца в многомерных комплексных пространствах Эйнштейна. Гун Шэн (Kung Sun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 4, 471—476 (кит.; рез. англ.)

Пусть D — простая область комплексного пространства $(z',\ldots,z^n)$ с метрикой Бергмана $ds^2 = dzT\bar{d}z'$. Предполагается, что D является пространством Эйнштейна с кривизной Риччи, равной -1. Доказывается результат: Если $w^j = f^j(z)$ является псевдоконформным отображением области D в D' и если существует такая положительная метрика $ds^2 = dwHw\,\bar{dw'} = dz\,H\bar{dz'}$ в области D', что ее кривизна Риччи $\leqslant -1$ и что на границе ∂D области $D \det H < \det T$, то в области D имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial(w_1\ldots w_n)}{\partial(z_1\ldots z_n)}\right|^2 \leqslant \frac{\det T}{\det H_w}.$$

В частности, если $\det T \to \infty$, когда $z \to \partial D$ и $w^j = f^j(z)$ является псевдоконфомным отображением D в себя, то имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial(w_1\ldots w_n)}{\partial(z_1\ldots z_n)}\right|^2 \leqslant \frac{\det T(z)}{\det T(w)}.$$

Полученные результаты являются обобщениями леммы Шварца—Картана, леммы Шварца—Пика—Алфорса и леммы Шварца—Бергмана в многомерных комплексных пространствах Эйнштейна. Гу Чао-хао

4174. Построение и свойства некоторых 6-мерных почти комплексных многообразий. Калаби (Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds. Calabi Eugenio), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 407—438 (англ.)

После аксиоматического определения семимерного евклидова пространства Y „чисто мнимых" чисел Кэли (с помощью скалярного, векторного и смешанных произведений) и обзора понятий и свойств, связанных с почти комплексными многообразиями, условиями интегрируемости, римановой и эрмитовой метрикой, келеровостью и т. п., автор изучает регулярные, дифференцируемые отображения в Y 6-мерных ориентированных, дифференцируемых многообразий X (класса C^2). Устанавливаются следующие результаты.

1) Вложение в Y индуцирует на X структуру эрмитова почти комплексного многообразия. Оператор J, определяющий почти комплексную структуру, задается посредством векторного умножения на нормаль к многообразию.

2) Эта почти комплексная структура интегрируема (т. е. влечет комплексную аналитичность X) тогда и только тогда, когда выполнено (во всех точках) условие: $K - JKJ = 0$, где K — оператор, определяющий вторую фундаментальную форму вложения.

3) Необходимым и достаточным для симплектичности многообразия X (что означает замкнутость внешней формы второго порядка, соответствующей эрмитовой метрике) является одновременное выполнение условий: $K + JKJ = 0$, $Sp(K) = 0$. В частности, из 2) и 3) следует, что многообразие X будет келеровым тогда и только тогда, когда оно отображается на гиперплоскость.

4) Эрмитова, почти комплексная структура, индуцируемая на X, является специальной в том смысле, что допускает систему унитарных координатных окрестностей, причем переход от одной из них к другой осуществляется преобразованиями специальной унитарной группы $SU(3)$. Это равносильно обращению в нуль первого класса Чженя C^1.

Указывается некоторый класс отображений в Y прямых произведений двумерной поверхности на четырехмерное линейное пространство, в которых тем самым вводится комплексно-аналитическая структура.

Наконец, строится пример отображения в Y компактного многообразия (прямое произведение двумерной римановой поверхности нечетного рода $g = 2h + 1$ $(h \geqslant 1)$ на четырехмерный тор), в котором индуцируется комплексно-аналитическая структура, отличная от естественной. При этом оказывается, что: а) в разных комплексно-аналитических структурах многообразие имеет разные характеристические классы Чженя; б) в одной из них оно келерово, а в другой — некелерово.

Таким образом, келеровость многообразия и его характеристические классы Чженя не являются, вообще говоря, инвариантами дифференцируемых гомеоморфизмов, а существенно зависят от выбора комплексно-аналитической структуры. Автор высказывает гипотезу, что келеровость сохранится, если в одной из структур многообразие будет алгебраическим и не меняются классы Чженя и ориентация. И. З. Розенкноп

4175. Об аналитических накрытиях аналитических многообразий. Грауэрт, Реммерт (Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques. Grauert Hans, Remmert Reinhold), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 10, 918—921 (франц.)

Пусть X — связное комплексное аналитическое многообразие. Непрерывное собственное отображение φ локально компактного пространства $\hat{X}$ на X называется аналитическим накрытием, если оно обладает следующими свойствами: $\varphi^{-1}(x)$ конечно для всех $x \in X$; существует такое аналитическое множество $A \subset X$ комплексной коразмерности 1, что отображение

$$\varphi : \hat{X} \setminus \varphi^{-1}(A) \to X \setminus A$$

локально гомеоморфно; всякая точка $x \in \varphi^{-1}(A)$ обладает базой связных окрестностей V_i таких, что $V_i \setminus \varphi^{-1}(A)$ связно и непусто. На $\hat{X}$ вводится понятие голоморфной функции и через $I(X)$, $I(\hat{X})$ обозначаются кольца голоморфных функций на X и $\hat{X}$. Пусть b — число точек множества $\varphi^{-1}(x)$ $(x \in X \setminus A)$. Оказывается, что каждый элемент кольца $I(\hat{X})$ является целым алгебраическим относительно $I(X)$ степени $\leqslant b$. Основной результат работы состоит в том, что всякое накрытие обладает следующим свойством: каждая точка $x \in X$ имеет окрестность U такую, что существует элемент кольца $I(\varphi^{-1}(U))$, имеющий степень b над $I(U)$. Отсюда следует, что пространство $\hat{X}$, будучи снабжено пучком ростков голоморфных функций, становится нормальным аналитическим пространством в смысле А. Картана.

А. Л. Онищик

4176. Аффинные преобразования в почти комплексном многообразии с естественной аффинной связностью. Обата (Affine transformations in an almost complex manifold with a natural affine connection. Obata Morio), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 4, 345—362 (англ.)

В многообразии M с почти комплексной структурой F существует аффинная связность (называемая естественной), в которой эта почти комплексная структура ковариантно постоянна (РЖМат, 1957, 1782). Естественная аффинная связность определяется почти комплексной структурой неоднозначно. Поэтому, говоря ниже о почти комплексной структуре, мы будем иметь в виду фиксированную естественную аффинную связность. Автор рассматривает вопрос о том, когда аффинные преобразования почти комплексного многообразия (в смысле естественной связности) сохраняют почти комплексную структуру. Основной результат статьи, обобщающий соответствующие результаты Лихнеровича (РЖМат, 1956, 739) и Схоу-

тена, Яно (реф. 4177) содержится в теореме: Пусть M — почти комплексное многообразие размерности $2m$ с почти комплексной структурой F; $\mathfrak{G}_p$, $p \in M$ — однородная группа голономии M относительно естественной аффинной связности; $A(M)$ — группа всех аффинных преобразований M в себя и $A_0(M)$ — ее связная компонента единицы. Предположим, что $\mathfrak{G}_p$ неприводима (в вещественном смысле). Тогда $\mathfrak{G}_p$ — подгруппа $CL(m, R)$ — действительного представления группы $L(m, C)$ всех невырожденных матриц степени m с комплексными коэффициентами. Далее, (I) В случае нечетного m или четного, $m = 2l$, и если $\mathfrak{G}_p$ не есть подгруппа вещественного представления полной линейной кватернионной группы $QL(l, R)$, мы имеем $\varphi F = \pm F$ для любого $\varphi \in A(M)$. В частности, $\varphi F = F$ при любом $\varphi \in A_0(M)$, т. е. $A_0(M)$ сохраняет почти комплексную структуру. (II) В случае, когда m четно, $m = 2l$, и $\mathfrak{G}_p$ — подгруппа $QL(l, R)$ имеет три независимых почти комплексных структуры F, H, K, таких, что $FK = -KF = H$, $KH = -HK = F$, $HF = -FH = K$ и все они параллельны (относительно естественной связности M). $A(M)$ действует на векторное пространство, натянутое на F, H, K как группа ортогональных преобразований. Эти ортогональные преобразования принадлежат $SO(3)$. Библ. 13 назв.

Н. С. Синюков

4177. О псевдокелеровых пространствах, допускающих непрерывную группу движений. Схоутен, Яно (On pseudo-kählerian spaces admitting a continuous group of motions. Schouten J. A., Yano K.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 5, 565—570; Indagationes math., 1955, **17**, № 5, 565—570 (англ.)

Теорема Лихнеровича (см. РЖМат, 1956, 739) устанавливает, что в келеровом многообразии V_{2n} каждое движение метрики оставляет инвариантной комплексную структуру, если (1) V_{2n} неприводимо, (2) тензор Риччи не исчезает, (3) n чётно. Авторам удалось ослабить условия до следующих: (0) V_{2n} псевдокелерово, (1) V_{2n} неприводимо, (2) тензор Риччи не исчезает для четных n, (3) n нечетно или четно. В доказательстве используются производные Ли, псевдоаналитические ковариантные векторные поля и линейные подпространства на нуль-конусе комплексификации касательного пространства.

A. Nijenhuis

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 531.

4178. Торы с однопараметрической группой движений. Буземан, Педерсен (Tori with one-parameter groups of motions. Busemann Herbert, Pedersen Flemming P.), Math. scand., 1955, **3**, № 2, 209—220 (англ.)

Пусть R есть двумерный тор, метризованный как G-пространство (см. РЖМат, 1957, 6668), который обладает однопараметрической группой изометрий Γ_R. Если ни одна из траекторий Γ_R не является замкнутой геодезической, то метрика является метрикой Минковского (плоской в случае риманова пространства R), и тогда имеется транзитивная абелева группа движений. На универсальной накрывающей плоскости P с поднятой (lifted) метрикой назовем геодезическую прямой, если она изометрична „в большом" евклидовой прямой. Если каждая траектория Γ_R будет геодезической, то все геодезические в P — прямые (Теорема 4.5 независима от 4.4 и, естественно, предшествует ей). Наконец, если Γ_R имеет несколько (не все) траекторий замкнутыми геодезическими, то P состоит из полос, ограниченных такими прямыми, что геодезические, пересекающие их или им асимптотичные, будут единственными прямыми на P. Это описание сопряженных точек содержит большую часть качественных результатов Блисса (Bliss, Ann. Math., (2) 1902, **4**, 1—21), Кимбалла (Kimball, Amer. J. Math., 1930, **52**, 29—52) и Хедлунда (Hedlund, Ann. Math., 1932, **33**, 719—739).

L. W. Green

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 999.

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4179. Об асимметрической противоположности кривизн, вытекающей из рассмотрения свободных паратингент. Мирге (Sur une opposition de courbures asymétrique déduite du paratingent libre. Mirguet Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 5, 488—490 (франц.)

Рассматривается ортоповерхность S, обладающая в каждой точке M следующими свойствами: если паратингента MD не имеет знака, то в некоторой окрестности точки M пересечение S с вертикальной полуплоскостью луча MD есть сегмент на этом луче; множество несвободных паратингент не имеет внутренних элементов; всякая вполне паратингентная плоскость содержит по крайней мере две несвободные паратингенты; существует свободная паратингента, не являющаяся старшей (supérieure). У такой ортоповерхности в каждой точке M существует непрерывная касательная плоскость P. Нестаршая свободная паратингента, которую будем считать положительной, делит P на полуплоскости P_1 и P_2. Рассматривается случай, когда существует положительная несвободная паратингента B_1MB_2. Доказывается, что в одной из полуплоскостей, скажем в P_1, существует угол $B_1M\tau$ такой, что все лучи внутри него отрицательны, а вне его и внутри P_1 положительны. Описывается расположение несвободных паратингент в этом случае, когда в P_2 существует аналогичный угол B_2MT. Если τMT — прямая, то имеет место классический симметрический случай и существуют всего две несвободные паратингенты: B_1MB_2 и τMT.

А. Л. Онищик

4180. Об определении касательной ко множеству бесконечной линейной меры. Безикович (On the definition of tangents to sets of infinite linear measure. Besicovitch A. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 1, 20—29 (англ.)

E называется регулярным (иррегулярным, имеющим касательные $l(x)$ для $x \in E_1 \subset E$), если любое измеримое подмножество E' конечной меры регулярно (иррегулярно, имеет касательные $l(x)$ для почти всех $x \in E'E_1$). Большинство результатов для случая конечной меры распространяется на случай σ-конечной меры; в частности, регулярное множество σ-конечной меры обладает касательными. На простой дуге σ-конечной меры касательная существует на подмножестве T бесконечной меры; остаточное множество N может быть бесконечной меры, но проектируется в нуль-множество почти во всех направлениях. Среди множеств более чем σ-конечной меры имеется простая дуга, не имеющая регулярных подмножеств, а также регулярное множество, обладающее касательными. Если $\psi(x) \prec\!\succ \varphi(x) \prec\!\succ x$ при $x \to 0$, E замкнуто и его ψ-мера > 0, то существует $E' \subset E$, иррегулярное и φ-мера которого > 0. Если E замкнуто и имеет более чем σ-конечную линейную меру, то существует $\psi(x) \prec\!\succ x$ такая, что ψ-мера E положительна.

Из этих двух предложений и неопубликованной теоремы Дэйвиса (Davies) следует, что никакое аналитическое множество Суслина более чем σ-конечной меры не может быть регулярным.

H. D. Ursell

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 595.

4181. О последней геометрической теореме Пуанкаре. Штернберг (On Poincaré's last geometrical theorem. Sternberg Shlomo), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 787—789 (англ.)

Пуанкаре (H. Poincaré, Rend. Circolo mat. Palermo, 1912, **33**, 375—407) высказал теорему: Если гомеоморфизм T кольца $a \leqslant r \leqslant b$, оставляющий инвариантной

границу (но смещения на внутренней и внешней окружностях происходят в противоположные стороны), сохраняет меру, то он имеет неподвижную точку.

Винтнер (РЖМат, 1958, 6171) переформулировал эту теорему так: Если в тех же условиях P — любая точка кольца, а U — любая область его, то существует такая функциональная зависимость между величинами $d = \min |TP - P|$ и $\alpha = \min |TU| / |U|$, где U — площадь области, что $\lim_{\alpha \to 1} d(\alpha; a, b) = 0$.

Доказывается, что указанная зависимость имеет следующий вид: $d \leqslant (1-\alpha)(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. Р. Н. Щербаков

4182. Контактные преобразования и обобщенные метрические пространства. Такано (Contact transformations and generalized metric spaces. Takano Kazuo), Tensor, 1954, **4**, № 1, 51—66 (англ.)

Статья содержит изложение в естественной последовательности основных результатов теории однородных контактных преобразований в обобщенных метрических пространствах. Сначала выводятся основные уравнения, определяющие однородные контактные преобразования в n-мерных арифметических многообразиях V_n, определяются понятия 1-го и 2-го контактных реперов (the contact frame), а также ковариантных и контравариантных векторов (и тензоров) относительно однородных контактных преобразований.

Далее в пространстве опорных элементов V (точка и гиперплоскость V_n) вводится ковариантное дифференцирование ковариантных векторов, рассматривается случай, когда V_n имеет финслерову метрику, порожденную его бесконечно малыми контактными преобразованиями, и находится, при некоторых предположениях, связь этой метрической связности с указанной выше связностью. Наконец, рассматривается тот частный случай, когда это финслерово пространство является римановым.

В заключительной части проводится сравнение изложенного с неголономной теорией однородных контактных преобразований.

Имеются ссылки на 7 работ иностранных авторов 1936—1953 гг. Н. С. Синюков

4183. О некоторых диадных представлениях для трехмерных тензоров. Федоров Ф. И., Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1957, вып. 2, 230—234

Показывается, что всякий симметрический тензор в трехмерном вещественном или комплексном пространстве может быть представлен в диадной форме

$$A = a + b(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'),$$

причем в вещественном случае векторы c' и c'' являются нормалями плоскостей круговых сечений поверхности второго порядка $rAr=c$. Находится также физический смысл векторов c' и c'' в случаях, когда тензор A^{-1} — тензор инерции твердого тела или тензор диэлектрической проницаемости кристалла; в случае поглощающего кристалла тензор A — комплексный тензор.

М. А. Джавадов

4184. Аксиоматическое построение геометрии кругов на основе двойного отношения. Бенц (Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen. Benz Walter), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 1-2, 56—90 (нем.)

Известно, что на плоскости комплексного переменного точка X принадлежит кругу, проходящему через точки A, B, C, тогда и только тогда, когда значение двойного отношения $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix}$ принадлежит полю действительных чисел. В реферируемой статье, исходя из этого факта, вводится (весьма общее) определение круга на чисто алгебраической основе. Вначале рассматриваются абстрактные множества $P\{A, B, C, \ldots\}$ (число элементов которого предполагается не менее четырех) и $\theta\{t, \ldots\}$ (не пустое), а также отображение σ множества упорядоченных четверок элементов (точек) множества P на множество $\theta: \sigma(ABCD) \to t \in \theta$. Тогда t называется двойным отношением упорядоченной четверки точек A, B, C, D. Вводя в рассмотрение собственное подмножество Δ множества θ, автор называет кругом, определенным тремя точками A, B, C, множество точек X, для которых двойное отношение $\sigma(ABCX)$ принадлежит подмножеству Δ, причем A, B, C считаются элементами этого множества по определению. Обозначается двойное отношение через $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ и свойства этого отношения из общего случая выделяют важнейшие частные случаи. Автор вводит следующие условия:

K_{Q_1}. Пусть A, B, C, D — совокупность различных элементов множества P. Тогда из $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$ и $\begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix} \in \Delta$ следует $\begin{bmatrix} A & B \\ E & C \end{bmatrix} \in \Delta$.

K_{Q_2}. Пусть A, B, C, D — совокупность различных точек множества P. Тогда из $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$ следует $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Delta$, $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \Delta$, $\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$.

Q_0. Пусть A, B, C — различные точки множества P и $t \in \theta$. Тогда уравнение $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = t$ имеет точно одно решение $X \in P - \{A, B, C\}$.

Q_1. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 — различные элементы множества P. Тогда из равенств

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ D_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ E_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ E_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

следует

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ E_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ E_2 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Q_2. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 — различные точки множества P. Тогда если $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ D_2 & C_2 \end{bmatrix}$, то имеет место:

$$(\alpha)\ \begin{bmatrix} -B_1 & A_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 & A_2 \\ D_2 & C_2 \end{bmatrix}; \quad (\beta)\ \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ D_1 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ D_2 & B_2 \end{bmatrix};$$

$$(\gamma)\ \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}; \quad (\pi)\ \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 \end{bmatrix}.$$

При выполнении условий K_{Q_1}, K_{Q_2} структуру $(P; \theta \supset \Delta; \sigma)$ автор называет Quaternar.

В § 1 автор доказывает теоремы, устанавливающие условия (более геометрические), эквивалентные условиям K_{Q_1} и K_{Q_2}. Именно доказывается теорема: Пусть дана структура $(P; \theta; \sigma)$. Пусть далее некоторые подмножества множества P отмечены и называются кругами, причем выполняются следующие свойства:

1) Имеются круг a и точка A такие, что $A \notin a$.

2) Для трех различных точек найдется один и только один круг, который им принадлежит. Каждый круг обладает по крайней мере тремя точками.

3) Если A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 — четверки различных точек и точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одном круге, то из условия $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ D_2 & C_2 \end{bmatrix}$ следует, что точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одном круге.

Тогда множество Δ всех $t \in \theta$, для которых найдется четверка различных точек A, B, C, D, лежащих на кру-

ге, таких что $\sigma(A, B, CD)=t$ образуют такую структуру $(P; \theta \supset \Delta; \sigma)$, для которой выполняются условия K_{Q_1} и K_{Q_2}. Имеет место и обратная теорема.

Автор далее доказывает, что в случае выполнения условий K_{Q_1}, K_{Q_2}, Q_0, Q_1, $Q_{2\gamma}$ в множестве θ можно определить произведение по правилу: Под произведением $p=\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$ и $q=\begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix}$ понимается элемент $t=\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}$. Элемент $t=pq$ определяется однозначно и относительно этого произведения множество $\theta+1$ (множество θ пополняется новым элементом 1) является группой G, а множество $\Delta+1$ его подгруппой U. Доказывается, что при выполнении условий K_{Q_1}, K_{Q_2}, Q_0, Q_1, $Q_{2\gamma\pi}$ выполняется тождество

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ H & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & B \\ G & C \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & B \\ D & G \end{bmatrix},$$

которое эквивалентно теореме Микеля (Если A, B, C, D, E, F, G, H — различные точки множества P, то при условии, что пять четверок точек из шести $ABCD$, $EFGH$, $AEHD$, $FBCG$, $AFCH$, $EBGD$ концикличны, то и шестая четверка точек также конциклична).

В § 2 определяется „угол пучка“ $S(a, b; S, S')$ (die Büschelecke) как упорядоченная пара кругов a, b, пересекающихся по крайней мере в двух точках S и S'. Если a и b совпадают, то $S(a, b; S, S')$ называется вырожденным. Вводится понятие равенства: $S(a, b; S, S')$ и $S(c, d; T, T')$ равны, если найдутся точки $A \in a-b$, $B \in b-a$, $C \in c-d$, $D \in d-c$ такие, что $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix}$ (два вырожденных пучка всегда считаются равными). Доказывается, что понятие равенства есть отношение эквивалентности. Оказывается, что элемент $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}$ и множества P не зависит от выбора точек A, B, C, D и обладает свойствами, которые позволяют автору обозначить его через -1 $(-1 \in U)$. Тогда обычным способом вводится понятие четвертого гармонического элемента для элементов A, B, C, который обозначается через $H(ABC)$. В множестве „углов пучка“ определяется абелева группа, которая совпадает с G/H, причем классам равных „углов пучка“, которому принадлежит $S(a, b; S, S')$, соответствует класс смежности, содержащий элемент $t=\begin{bmatrix} S' & S \\ A & B \end{bmatrix}$, где $A \in a-b$ и $B \in b-a$. Тогда можно ввести понятие аргумента элемента $t \in G$, полагая $\arg t=t-U$. Определяются ортогональные „углы пучка“, для которых соответствующие элементы $\alpha \in G/U$ удовлетворяют равенству $\alpha+\alpha=0$.

В § 4 рассматривается понятие разделенных пар точек круга при условии выполнения требований K_{Q_1}, K_{Q_2}, Q_0, Q_1, $Q_{2\beta\gamma\pi}$ и дополнительных требований: 1) имеется круг, который имеет по крайней мере четыре различные точки, 2) группа U обладает подгруппой U^+ индекса 2 со свойствами: а) $-1 \notin U^+$ и б) если A, B, C попарно различные точки, D отличная от A, B точка, то из $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in U^+$ следует $\begin{bmatrix} A & C \\ H(ABD) & B \end{bmatrix} \in U^+$. В этих условиях вводится определение: если $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in U-U^+$, то пара QR разделяет пару ST на том круге, на котором они лежат.

В § 5 определяется понятие суммы двух элементов $p, q \in G$ по правилу: Если A, B, C — три различные точки и P, Q такие, что $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}=p$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}=q$, то сумма $p+q$ в случае $Q \neq H(ABC)$ есть элемент $s=\begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}$, где S определяется из условия $\begin{bmatrix} A & P \\ S & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ Q & H(ABP) \end{bmatrix}$. В случае $Q=H(ABC)$ полагают $p+q=0$, где 0 — элемент, добавленный к G. Показывается, что $p+q$ определяется независимо от выбора основных точек A, B, C и что относительно введенных операций сложения и умножения множества $K_2=G+0$ и $K_1=U+0$ оказываются коммутативными телами. После этого доказывается классическая формула для вычисления двойного отношения.

В § 6 при условии выполнения требований K_{Q_1}, K_{Q_2}, Q_0, Q_1, $Q_{2\beta\gamma\pi}$ устанавливаются дополнительные необходимые и достаточные условия для того, чтобы выполнялось „предложение о касании“ (через точку вне данного круга проходит один и только один круг, касающийся данного в данной точке): Тело K_2 является квадратическим расширением K_1.

В § 7 при условии выполнения требований K_{Q_1}, K_{Q_2}, Q_0, Q_1, $Q_{2\beta\gamma\pi}$ устанавливаются дополнительные условия для того, чтобы выполнялось предложение, известное под названием „теоремы пучков“ (das Büschelsatz) (см., например, РЖМат, 1957, 7379): 1) каждый круг содержит по крайней мере шесть различных точек, 2) если γ_1, $\gamma_2 \in K_2-K_1$ и имеются решения u_i, $v_i \in K_1$ уравнения

$$1=\gamma_i u_i+\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma_i}}v_i;\ i=1,2,$$

то имеет место $u_1\frac{\gamma_1}{\gamma_2}+u_2\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \in K_1$. В заключение рассматриваются предложения: теорема Микеля, „предложение о касании“ и „теорема пучков“ и их зависимость в данной схеме. Для этого построены примеры, показывающие, что выполнение „теоремы о пучке“ и теоремы Микеля не влечет за собой выполнения „теоремы о касании“ и что выполнение теоремы Микеля не влечет за собой выполнения „теоремы о пучке“, но выполнение „теоремы о касании“ и теоремы Микеля влечет за собой выполнение „теоремы о пучке“

В. И. Ведерников

4185. Замечания о пространствах с неположительной кривизной. Насу (Remarks on spaces with non-positive curvature. Nasu Yasuo), Kumamoto J. Sci., 1954; **A2**, № 1, 1—10 (англ.)

Автор определяет неположительную кривизну в G-пространстве (для этого и других понятий см. книгу референта „The geometry of geodesics“ Acad. Press, N. Y., 1955, гл. V) следующим образом. Пусть $x_i(t_i)$, $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i=1,2$ — параметрическое представление геодезической дуги и пусть $t_2=ct_1+d$ отображает $[\alpha_1, \beta_1]$ на $[\alpha_2, \beta_2]$. Если $f(t)=x_1(t)x_2(ct+d), \alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, то из $\alpha_1 \leqslant \alpha' < t < \beta' \leqslant \beta_1$ следует $f(t) \leqslant \max(f(\alpha'), f(\beta'))$. По принципу непрерывности это удовлетворяется также для $\alpha_2=\beta_2$. Педерсен (Pedersen F. P., Mat. Tidskr. B., 1952, 66—89) определяет неположительную кривизну (называемую выпуклостью оболочек в цитированной книге референта, чтобы отличить ее от более сильного условия автора) следующим образом: в окрестности, достаточно малой для единственности сегментов, рассмотрим два сегмента $T_i(i=1,2)$, представляемые посредством $x_i(t_i)$, $\alpha_i \leqslant t_i, \leqslant \beta_i$. Если $\varphi(t)=x_1(t)T_2$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, то в вышеприведенных обозначениях имеем $\varphi(t) \leqslant \max(\varphi(\alpha'), \varphi(\beta'))$, где равенство достигается только для $\varphi(\alpha')=\varphi(\beta')$. Это условие о равенстве можно опустить, что доказано недавно Педерсеном

и следует из соотношения (36.16) в цитированной книге. Автор доказывает, что это условие слабее, чем условие Педерсена; на самом деле оно включает в себя условие Педерсена (однако референт не исследовал вопроса, не будут ли оба условия эквивалентны). Ибо, если условие Педерсена не выполняется, то существуют сегменты T_1, T_2 и значения α', t, β' (см. аналогичное изложение выше), такие, что $\varphi(t) > \max(\varphi(\alpha'), \varphi(\beta'))$. Если $x_1(\alpha')x_2(\alpha'') = \varphi(\alpha')$, $x_1(\beta')x_2(\beta'') = \varphi(\beta')$ и $x_1(t)x_2(t_0) = \varphi(t)$, то при $(\alpha'' - t'')/(\alpha'' - \beta'') = (\alpha' - t)/(\alpha' - \beta')$ будет $x_1(t)x_2(t'') \geqslant x_1(t)x_2(t_0) > \max[x_1(\alpha')x_2(\alpha''), x_1(\beta')x_2(\beta'')]$, так что условие автора также не удовлетворяется. Следовательно, все результаты автора содержатся в статье Педерсена и даже еще более в книге референта. H. Busemann.

Перевод из Math. Revs. 1956, **17**, № 5, 527.

4186. Дифференциальная геометрия гладких многообразий. Бакельман И. Я., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 145—146

В отличие от поверхностей ограниченной кривизны автор рассматривает гладкие поверхности (поверхности ограниченного искривления) с точки зрения их вложения в евклидово пространство. Поэтому, кроме требования, чтобы поверхность в окрестности каждой точки допускала параметризацию

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(u, v)$$

с помощью функций класса C^1 и $\mathfrak{B}_u \times \mathfrak{B}_v \neq 0$, он предполагает существование обобщенных вторых производных в смысле Соболева, с суммируемым квадратом.

Это позволяет ввести вторую квадратичную форму, которая может не существовать в некоторых точках, а ее коэффициенты могут испытывать разрывы. Однако основные факты классической геометрии в интегральной форме распространяются на поверхности ограниченного искривления.

Внутренняя кривизна $\omega(E)$, как функция множества, абсолютно непрерывна, и справедлива формула

$$\omega(E) = \iint_{E} \frac{LN - M^2}{FG - F^2}\, dS,$$

где E, F, G и L, M, N — коэффициенты первой и второй квадратичной формы, а dS — элемент площади. Можно ввести понятие сферического изображения и обобщить теорему Гаусса. В интегральной форме обобщаются уравнения Петерсона-Кодацци и деривационные формулы Гаусса. С. П. Фиников

4187. Угловая мера в некотором метрическом пространстве. Насу (On angular measure in a metric space. Nasu Yasuo), Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 1, 1—12 (англ.)

Исследуется метрическое пространство, называемое пространством G, рассмотренное Буземаном (Busemann H., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **56**, 200—274).

После изложения аксиом, определяющих пространство G (§ 1), автор рассматривает (§2) двумерное пространство G, называемое пространством S. В этом пространстве определяется угловая мера ψ и угловой избыток треугольника F. Обозначая угол между сегментами $T(p, a)$ и $T(p, b)$ через $\widehat{apb}$, имеем для треугольника $\sigma(= abc)$ $F(\sigma) = \widehat{bac} + \widehat{cba} + \widehat{acb} - \pi$. Из непрерывности угловой меры ψ выводится непрерывность функции F, если она ограниченная. Далее (§ 3) рассматривается угловая мера и функция F в пространстве σ, имеющем постоянную кривизну в смысле Буземана. Доказывается (для S) непрерывность угловой меры и функции F, при ограниченном F, и также, что в случае ограниченности F стремится к постоянному значению $\frac{1}{k}$. Эту величину автор называет обобщенной гауссовой кривизной. Выводится формула, аналогичная формуле Гаусса-Бонне. Для пространства измерений $n \geqslant 2$ число $\frac{1}{k}$ появляется как обобщенная гауссова кривизна двумерных подпространств. Если пространство G является римановым, то $\frac{1}{k}$ совпадает с римановой кривизной, поэтому автор называет число $\frac{1}{k}$ обобщенной римановой кривизной. В конце (§ 4) автор дает классификацию пространств G с постоянной кривизной и доказывает, что указанные пространства делятся на три класса, для которых обобщенная риманова кривизна соответственно положительна, равна нулю или отрицательна.

Пространства постоянной кривизны уже ранее рассмотрены автором. Л. Я. Березина

4188. Пример плоскости с конечным числом точек. Бризак (Un exemple de géométrie plane où les points sont en nombre fini. Brisac Robert), Publs scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 1, 7—12 (франц.)

В афинной плоскости над GF (3) определяются понятия порядка и движения. Л. А. Скорняков

4189. Некоторые замечания к статье Ароншайна и Панитчпакди. Хенриксен (Some remarks on a paper of Aronszajn and Panitchpakdi. Henriksen Melvin), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1619—1621 (англ.)

Хаусдорфово пространство X удовлетворяет $(Q\mathfrak{m})$, если для любых открытых непересекающихся множеств $U, V \subset X$, каждое из которых есть сумма замыканий менее чем $\mathfrak{m}$ открытых множеств, имеем $\overline{U} \cap \overline{V} = 0$. Доказывается, что существует компактное связное пространство, удовлетворяющее $(Q\aleph_1)$. Пусть $B(X)$ — булева алгебра открыто-замкнутых подмножеств пространства X. Доказывается, что существует такое вполне несвязное компактное пространство X, удовлетворяющее $(Q\aleph_1)$, что алгебра $B(X)$ не является σ-полной. Тем самым дается отрицательный ответ на два вопроса, поставленные в указанной в заглавии статье (РЖМат, 1958, 3269). А. Л. Онищик

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

4190. О числе сторон многоугольника Питри. Стейнберг (On the number of sides of a Petrie polygon. Steinberg Robert), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 2, 220—221 (англ.)

Пусть $\{p, q, r\}$ — правильный четырехмерный политоп, каждая грань которого $\{p, q\}$ — правильный полиэдр с p-угловыми гранями, по q в каждой вершине. Многоугольник Питри Полиэдра $\{p, q\}$ — косой многоугольник, образованный из ребер полиэдра $\{p, q\}$ так, что каждые две последовательных стороны многоугольника принадлежат одной и той же грани полиэдра, но никакие три последовательных стороны не принадлежат одной грани. Многоугольник Питри политопа $\{p, q, r\}$ определяется свойством, что любые три его последовательных стороны принадлежат многоугольнику Питри границы политопа, но никакие четыре последовательных стороны этим свойством не обладают.

Доказывается формула

$$\frac{h_{p,q,r}}{g_{p,q,r}} = \frac{1}{64}\left(12 - p - 2q - r + \frac{4}{p} + \frac{4}{r}\right), \qquad (1)$$

где $h_{p,q,r}$ — число сторон многоугольника Питри политопа $\{p, q, r\}$, а $g_{p,q,r}$ — порядок группы симметрии этого политопа. Доказательство основывается на устанавливаемой в статье формуле для числа сторон h многоугольника Питри полиэдра $\{p, q\}$

$$h+2=\frac{24}{10-p-q} \qquad (2)$$

и на результате Кокстера (Coxeter H. S. M., Regular polytopes, London, 1948, 232; Duke Math. J., 1951, 18, 765—782). А. Г. Школьник

4191. О новом понятии аффинной ширины овала. Сан-Роман (Sobre un nuevo concepto de anchura de óvalos, invariante afín. San Roman J. Sancho de), Rev. mat. hisp.-amer., 1956, **16**, № 3-4, 151—171 (исп.)

Треугольная ширина овала C в E^2 в точке $p\in C$ есть наибольшая из площадей треугольников, вписанных в C и имеющих p своей вершиной. Если эта площадь не зависит от p, то говорят, что C есть овал постоянной треугольной ширины. Кроме эллипсов, существуют и другие овалы постоянной треугольной ширины; характеристическим свойством эллипсов оказывается совпадение центров тяжести всех треугольников наибольшей площади. Овал имеет постоянную треугольную ширину в том и только том случае, если касательная в p всегда параллельна стороне треугольника наибольшей площади, противолежащей его вершине p.

H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 6, 505.

4192. Неравенства для суммы и разности Минковского выпуклых тел. Оман (Ungleichungen für die Minkowskische Summe und Differenz konvexer Körper. Ohmann D.), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 4, 297—304 (нем.)

Пусть A, B — выпуклые тела в E^n и $A\supset B$. Обобщая свой результат, относящийся к плоскости, автор доказывает неравенства

$$|A+B|+|A-B|\geqslant(|A|^{1/n}+|B|^{1/n})^n+$$
$$+(|A|^{1/n}-|B|^{1/n})^n,$$
$$|A+B|-|B|\leqslant(2|A|^{1/n}-|A-B|^{1/n})^n-$$
$$-(|A|^{1/n}-|A-B|^{1/n})^n,$$

где $|x|$ означает n-мерную меру X. Эти неравенства сильнее неравенств Брунна-Минковского

$$|A+B|^{1/n}\geqslant|A|^{1/n}+|B|^{1/n},\quad|A-B|^{1/n}\leqslant$$
$$\leqslant|A|^{1/n}-|B|^{1/n},$$

однако они, в противоположность плоскому случаю, не образуют полной системы неравенств для $|A|$, $|B|$, $|A+B|$, $|A-B|$. H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 228.

4193. Ретракция, гомотопия, интеграл. Чезари (Retraction, homotopy, integral. Cesari Lamberto), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 77—84 (англ.)

Обзор работ, посвященных свойствам непрерывных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E_3 и свойствам различных интегралов, определяемых на этих поверхностях. Непрерывной поверхностью $S=(T, A)$ в E_3 называется непрерывное отображение T двумерного множества A в E_3. В большей части статьи A предполагается плоским множеством или еще специальнее — жордановой областью на плоскости. В классическом анализе отображение T предполагается непрерывно дифференцируемым. В работах, которым посвящен настоящий обзор, помимо непрерывности T, предполагается большей частью, что S имеет конечную площадь по Лебегу; сверх этого, автор старается вводить минимальное число допущений, формулируемых в духе теории функций вещественной переменной, теории функций множеств и топологии. Изучались: связь между отображением T и его проекциями на координатные плоскости, обобщенное неравенство Кавальери, вопрос о представлении площади (в смысле Лебега) поверхности S аналогом классического двойного интеграла (три якобиана, входящие в классический двойной интеграл, заменяются „обобщенными якобианами", определяемыми в топологических и теоретико-множественных терминах), вопрос о существовании „достаточно хорошего" отображения T', эквивалентного по Фреше данному отображению T (определяющего „ту же" поверхность S), тангенциальные свойства непрерывных поверхностей, обобщенный интеграл Вейерштрасса $I(S)$ на S, обобщенные теоремы Остроградского — Гаусса и Стокса, изопериметрическое неравенство при различных определениях объема области, ограниченной замкнутой непрерывной S, теоремы о ретракции и гомотопии для непрерывных S и теоремы о существовании минимума в вариационном исчислении для интегралов на S.

С. М. Лозинский

4194. Об одном обобщении строгой выпуклости. Мирге (Sur une généralisation de la stricte convexité. Mirguet Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 4, 402—404 (франц.)

Пусть S — ортоповерхность, $\Delta(M)$ — ориентированная вертикаль в точке $M\in S$ (Mirguet, Ann. Éc. norm. super., 1934, **51**, № 3). Луч MD называется положительным, если для всякой достаточно близкой к $\Delta(M)$ прямой $\delta\parallel\Delta(M)$, $\delta\neq\Delta(M)$, лежащей в вертикальной полуплоскости луча MD, множество $S\cap\delta$ лежит выше MD; луч MD не имеет знака, если в любой окрестности точки M он содержит бесконечное множество точек из S. В остальных случаях MD считается отрицательным. Прямая D_1MD_2 имеет знак, если MD_1 и MD_2 имеют один и тот же знак; этот знак приписывается всей прямой. Паратингента в точке M называется свободной, если она имеет знак и если все достаточно близкие к ней паратингенты в точке M имеют тот же знак. Плоскость P, проходящая через M, называется вполне паратингентной (вполне свободной), если всякая прямая в P, проходящая через M, является паратингентной (свободной паратингентной) в этой точке. Доказывается, что ортоповерхность строго выпукла тогда и только тогда, когда она допускает в каждой своей точке вполне свободную плоскость. Далее изучается случай, когда любая вполне паратингентная плоскость в любой точке содержит ровно одну несвободную паратингенту. В этом случае в любой точке существует только одна несвободная паратингента. А. Л. Онищик

4195. Нерегулярные поверхности ограниченной внешней кривизны. Бакельман И. Я., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 4, 631—632

Заметка посвящена решению задачи о выделении и исследовании класса негладких поверхностей с внутренней метрикой ограниченной кривизны, который включал бы общие выпуклые поверхности, поверхности, представимые разностью выпуклых функций, и гладкие поверхности ограниченной внешней кривизны (РЖМат, 1957, 8232). Введенный автором класс поверхностей ограниченной внешней кривизны удовлетворяет этим требованиям. Поверхность F этого класса обладает непрерывным касательным конусом (контингенцией) и локально может быть задана уравнением $z=f(x, y)$. Ограниченность внешней кривизны локально определяется следующим образом. Пусть $G\subset F$ — замкнутая компактная область и $M_1, M_2, \ldots, M_n\subset G$ — открытые попарно непересекающиеся множества с выпуклыми проекциями $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \ldots, \widetilde{M}_n$ на плоскость x, y. Пусть $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ — выпуклые оболочки множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Обозначим через M'_i и M''_i те части границы выпуклого тела $\overline{M}_i$, обращенные выпуклостью соответственно в сторону $z>0$ и

$z<0$, которые однозначно проектируются в открытое множество $\widetilde{M}_i$, и пусть σ'_i и σ''_i — площади их сферических изображений. Рассмотрим

$$\sigma(G)=\sup\sum_{i=1}^{n}(\sigma'_i+\sigma''_i),$$

где точная верхняя граница берется по всевозможным наборам введенных выше множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Величина $\sigma(G)$ определяет положительную часть внешней кривизны области G поверхности F. У поверхностей ограниченной внешней кривизны положительная часть внешней кривизны локально ограничена.

Автором получены следующие теоремы.

Теорема 1. Для всякой точки X поверхности ограниченной внешней кривизны F найдется окрестность $U\subset F$ такая, что существует последовательность регулярных поверхностей F_n, равномерно сходящаяся к F в U вместе с внутренними метриками, положительные части внешних кривизн которых $\iint_{E_n}K_n dS_n$ равномерно ограничены (E_n — множество точек F_n, где гауссова кривизна $K_n\geqslant 0$; dS_n—элемент площади поверхности F_n).

Теорема 2. Поверхности ограниченной внешней кривизны в смысле их внутренней метрики — многообразия ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова.

Построение регулярных поверхностей F_n осуществляется с помощью конструкций, предложенных А. В. Погореловым (РЖМат, 1958, 8232), а теорема 2 легко следует из теоремы 1. А. Л. Вернер

4196. Заметки о геометрии Минковского (I). Соотношения между внешним радиусом, диаметром, внутренним радиусом и минимальной шириной выпуклых множеств. Эглстон (Notes on Minkowski geometry (I). Relations between the circumradius, diameter, inradius and minimal width of a convex set. Eggleston H. G.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 76—81 (англ.)

Пусть X — выпуклое множество пространства Минковского M^n. Обозначим внешний радиус, внутренний радиус, диаметр и минимальную ширину множества X через R, r, D и d соответственно. Автор доказывает,

$$R\leqslant\frac{n}{n+1}D,\quad d\leqslant(n+1)r\ (n=\dim M^n)$$

и эти соотношения наилучшие. Первый результат аналогичен результату Юнга для случая евклидовых пространств (Jung H. W., J. reine und angew. Math., 1901, **123**, 241—257; 1910, **137**, 310—313) и доказан Боненблустом (Bohnenblust, Ann. Math., 1938, **39**, 301—308), а второй — результату Штейнхагена (Steinhagen, Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1922, **1**, 15—26).

В. И. Близникас

4197. Об одном экстремальном свойстве симплекса в n-мерном пространстве. Шопп (Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n-dimensionalen Raum. Schopp J.), Elem. Math., 1958, **13**, № 5, 106—107 (нем.)

Доказывается следующая теорема: Если P — произвольная точка внутри симплекса A_i ($i=1,\ldots,n+1$) в n-мерном пространстве и секущая PA_i пересекает противоположную границу в точке B_i, то, полагая $R_i=PA_i$, $d_i=PB_i$, имеем неравенство

$$\prod_{i=1}^{n+1}R_i\geqslant n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}d_i.$$

С. П. Фиников

4198. О выпуклом отображении. Муто (On convex mapping. Mutô Yosio), Тохоку сугаку дзасси Tohoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 141—145 (англ.)

Отображение f класса C^2 n-мерного компактного многообразия M^n ($n\geqslant 2$) класса C^2 в $(n+1)$-мерное евклидово пространство E^{n+1} называется выпуклым, если $\sum\Omega_{jk}v^jv^k\leqslant 0$ для любого v^j ($j,k=1,2,\ldots n$) и $\sum\Omega_{jk}v^jv^k<0$ для некоторых v^j, где Ω_{jk} есть второй фундаментальный тензор $f(M^n)$ для выбранного соответствующим образом направления нормали. Автор доказывает при этих предположениях, что f есть гомеоморфизм и что M^n гомеоморфно некоторой n-сфере.

L. A. Santaló

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, 1237

4199. Некоторые дифференциально-геометрические теоремы конгруэнтности для замкнутых поверхностей и гиперповерхностей. Фосс (Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen. Voss K.), Math. Ann., 1956, **131**, № 2, 180—218 (нем.)

Параллельное отображение $p\to p'$ одной гиперповерхности S и E^n на другую, S', определяется тем, что прямые pp' все параллельны друг другу. Если две замкнутых одинаково ориентированных выпуклых гиперповерхности S, S' с положительной кривизной допускают такое параллельное отображение, что в соответствующих точках p, p' одна из элементарных симметрических функций H_v (v фиксировано, $v=1,2,\ldots n-1$) главных кривизн принимает одинаковые значения, то $p\to p'$ есть перенос (или его часть). Теорема остается верной для $H_1=\sum R_i^{-1}$ и невыпуклых замкнутых ориентированных гиперповерхностей (не обязательно гомеоморфных S^{n-1}), если только параллельное отображение регулярно в локальных параметрах на S, S' и теневые границы S, S', соответствующие направлению pp', не содержат внутренних точек. Эти теоремы приводят к теоремам симметрии для отдельных поверхностей, например: замкнутая гиперповерхность S положительной кривизны и класса C^3 имеет гиперплоскость симметрии, нормальную к прямой L, если H_v принимает одинаковые значения в точках пересечения S с прямыми, параллельными L.

Приводятся различные другие теоремы, следующая будет типичной. Пусть F есть замкнутая аналитическая поверхность (произвольного рода) в E^3 такая, что прямая, параллельная фиксированной прямой L либо вовсе не пересекает F, либо пересекает F в двух точках, либо касается F в одной точке; кроме того, линейный элемент в точках касания к F прямых, параллельных L, не совпадает с асимптотическим направлением на F. Обозначим главные кривизны на F через k_1, k_2. Если имеет место равенство $k_2=f(k_1)$, где $f(x)$ определена при $x\geqslant c$; $f(c)=c$; $f'(x)<0$ при $x>c$, то F обладает плоскостью симметрии, нормальной к L. H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 229.

4200. О некоторых формулах интегральной геометрии. Мазотти-Биджоджеро (Su alcune formula di geometria integrale. Masotti-Biggiogero Giuseppina), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 3, 280—288 (итал.)

Несколько непосредственных следствий из формул Сантало для плотностей прямых S, пересекающих овал, и точек пересечения, касательных к овалу в точках его встречи с S. Г. И. Дринфельд

4201. Об интегральной геометрии: новые формулы, относящиеся к овалоидам. Мазотти-Биджоджеро (Sulla geometria integrale: nuove formule relative agli ovaloidi. Masotti Biggiogero Giuseppina), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 173—179 (итал.)

Пусть A_1, A_2 — точки пересечения прямой S с овалоидом Σ; R — пересечение плоскостей θ_1 и θ_2, касающихся Σ в A_1 и A_2; t_1 и t_2 — расстояния A_1 и A_2 от R; k_1 и k_2 — гауссовы кривизны овалоида в точках A_1, A_2; $\sigma = \overline{A_1A_2}$; ω — угол между θ_1 и θ_2, α_1 и α_2 — углы между S и нормалями к Σ в A_1, A_2; F и V—соответственно площадь овалоида и ограниченный им объем. Из принадлежащих Сантало (Santaló L. A., Rev. Union mat. Argentina, 1942, **8**, 165—169; 1946—47, **12**, 78—87) формул для плотностей dR и dS прямых R и S следует

$$dR = \frac{k_1k_2t_1t_2\sigma^2}{\cos\alpha\cos\alpha_2\sin^2\omega}\,dS = k_1k_2\frac{\sigma^4}{\sin^4\omega}\,dS.$$

Из этой формулы и формулы Крофтона, Сантало и др. выводятся соотношения

$$\int\frac{\sin^4\omega}{k_1k_2\sigma^4} = \frac{\pi}{2}F, \int\frac{\sin^4\omega}{k_1k_2\sigma^3}\,dR = 2\pi V, \int\frac{k_1+k_2}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}\sigma^2dS = 4\pi F$$

и ряд других. Г. И. Дринфельд

4202. Минимальная фигура, покрывающая точки решетки. II. Шеффер (Figura minima que cubre puntos de una red. II. Schäffer Juan J. Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr., 1955, **2**, № 9, 173—199 (исп.; рез. англ.)

Основной результат автора в более сильной форме можно найти в его другой статье (РЖМат, 1956, 6133), которая была сдана в печать позже, чем настоящая статья. В приложении имеются некоторые результаты, относительно выпуклых покрывающих множеств с минимальным периметром. H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 75.

4203. К векторному анализу на поверхностях. Штрубеккер (Zur Verktoranalysis auf Flächen. Strubecker Karl), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 123—127 (нем.)

Рассматриваются ориентированная связная дважды непрерывно дифференцируемая поверхность $r = r(u, v)$ с нормалью $\mathfrak{N}$ и заданная на ней скалярная непрерывно дифференцируемая функция $\varphi = \varphi(u, v)$. Если $P(u, v)$ — внутренняя точка области $\mathfrak{B}$ на поверхности, ограниченной произвольной гладкой простой замкнутой кривой с нормалью $\mathfrak{n}$, и $O(\mathfrak{B})$ — площадь области $\mathfrak{B}$, то имеет место предельная формула

$$\lim_{\mathfrak{B}\to P}\frac{\oint_{\mathfrak{B}}\varphi\,d\mathfrak{n}}{O(\mathfrak{B})} = \operatorname{grad}\varphi + 2\varphi H\cdot\mathfrak{N},$$

где $\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\varphi, r)$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами и H — средняя кривизна поверхности в точке P.

Вывод формулы основан на использовании интегральной формулы Грина и известных выражениях для дифференциальных параметров Бельтрами на поверхности. Приводится механическая интерпретация полученной формулы. П. М. Олоничев

4204. Теоремы о разложении и отделении для многогранных выпуклых множеств. Голдман (Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets. Goldman A. J.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 41—51 (англ.)

Рассматривается в векторной форме вопрос о характере решения системы m линейных неравенств с n неизвестными. Многогранным выпуклым множеством S в n-мерном пространстве автор называет множество векторов $X=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $AX \leqslant B$ (A— прямоугольная матрица, имеющая строками m векторов $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, B — вектор-столбец с элементами $b_1, \ldots, b_m$); S является пересечением m полупространств $A_iX \leqslant b_i$; S выпукло: наряду с X_1 и X_2, пространство S содержит $t_1X_1 + t_2X_2$ ($t_1, t_2 \geqslant 0$, $t_1 + t_2 = 1$). При $B = 0$ (система неравенств однородна) множество $\{X/AX \leqslant 0\}$ — многогранный выпуклый конус (наряду с X, содержит все векторы tX, $t \geqslant 0$); его можно рассматривать как выпуклую коническую оболочку $Q^<$ конечной совокупности векторов:

$$Q^< = \{X \mid X = v_1Q_1 + \ldots + v_qQ_q;\ v_j \geqslant 0\}. \qquad (1)$$

Ограниченный выпуклый многогранник P^Δ есть ограниченная выпуклая оболочка конечной совокупности векторов:

$$P^\Delta = \{X \mid X = u_1P_1 + \ldots + u_pP_p;\ u_i \geqslant 0,\ \Sigma u_i = 1\} \qquad (2)$$

базис $(P_1, \ldots, P_p)$ будет минимальным, если векторы P_i экстремальные, т. е. не являются средними арифметическими никаких двух векторов из $P^<$.

Доказывается, что непустое многогранное выпуклое множество S может быть представлено как векторная сумма ограниченного выпуклого многогранника и многогранного выпуклого конуса:

$$S = \{X \mid X = X_1 + X_2,\ X_1 \in P^\Delta,\ X_2 \in Q^<\}.$$

Обратно: непустое множество вида $P^\Delta + Q^<$ есть выпуклое многогранное множество. Если многогранное выпуклое множество ограничено, то оно является многогранником; это имеет место в том только случае, когда $Q^<$ сводится к нуль-вектору.

Если многогранник P^Δ и конус $Q^<$ не пересекаются, то существует гиперплоскость, отделяющая P^Δ и $Q^<$: P^Δ лежит в одном из полупространств (открытом), а $Q^<$ — в другом (замкнутом).

В статье использованы результаты помещенной в этом же номере журнала работы о многогранных конусах (Goldman A. J., Tucker A. W., Polyhedral convex cones). Вопрос о том, когда S непусто (система неравенств совместна), в статье не рассматривается. А. Г. Школьник

4205 К. Качественные вопросы теории деформации поверхности. Ефимов (Frächenverbiegung im Grossen. Efimow N. W., Übers. aus dem Russ. Berlin, Akad.-Verl., 1957, 233 S., ill.) (нем.)

Реферируемая книга представляет собой перевод известной обзорной статьи Н. В. Ефимова „Качественные вопросы теории деформации поверхности" (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 2). Во второй части книги помещено обширное дополнение (объемом 120 стр.), Э. Рембса и К. П. Гротенмейера. Это дополнение содержит главным образом результаты, полученные по вопросам изгибаний поверхностей после написания работы Н. Е. Ефимова до 1957 г. В нем нашли отражение некоторые результаты более раннего периода, частично взятые из известной статьи Кон-Фоссена (Успехи матем. наук, 1936, вып. 1). Таким образом, в реферируемой монографии нашел свое отражение полный круг идей, которые применялись при исследовании глобальных вопросов теории изгибаний поверхностей. Изложение добавлений, в противоположность основному тексту имеет большей частью конспективный характер. Именно поэтому авторы имели возможность охватить такой широкий круг вопросов. И в основном тексте монографии, и в дополнениях имеется большой набор нерешенных вопросов и интересных постановок. Б. Боярский

4206 К. Выпуклые фигуры. Яглом, Болтянский (Konvexe Figuren. Jaglom I. M., Boltjanski W. G. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 257 S., ill.) (нем.)

Книга является переводом с русского (Гостехиздат, 1951 г.). Она написана в форме сборника задач с решениями, что дает возможность читателю не только ознакомиться с фактами и методами теории, но и испытать свои силы в применении и развитии этих методов. Книга вполне доступна для обладающих надлежащим мате-

матическим развитием и склонностью к исследовательской работе учащихся, 8 — 10 классов средней школы и тем более для студентов-математиков. В то же время она несомненно научна.

Немецкое издание (переводчик Иоахим Элербах) просмотрено авторами, внесшими в него некоторые уточнения. Перевод хорош, в полиграфическом отношении он лучше оригинала.

Содержание книги: предисловие издателя (Ринова), предисловие авторов к русскому изданию и краткое предисловие к немецкому, указания к пользованию книгой.

§ 1. Общие свойства выпуклых фигур. Сообщаются определения выпуклости, пересечения, ограниченности, внутренней и граничной точек, опорной прямой и др., а также доказательства ряда фактов теории. В качестве задач (12) формулируются утверждения о совпадении диаметра выпуклой фигуры с наибольшим расстоянием между ее параллельными опорными прямыми; о выпуклости многоугольника, вписанного в ограниченную выпуклую фигуру, и др.

§ 2. Теорема Хелли и ее приложения (задачи 13-26). В качестве задач формулируются теоремы Хелли (о существовании общей точки у n выпуклых фигур), Юнга (n точек, попарное расстояние между которыми не превышает 1, содержится в круге радиуса $1/\sqrt{3}$), Бляшке (ограниченная выпуклая фигура ширины 1 содержит круг радиуса $1/3$), М. Я. Красносельского (необходимое и достаточное условие звездчатости многоугольника) и др.

§ 3. Одно свойство непрерывных функций. Вводится понятие непрерывной функции и сообщается теорема о промежуточных значениях, формулируются предложения (задачи 27—36), вытекающие из этой теоремы: усиленная теорема Юнга (плоская фигура диаметра 1 содержится в правильном шестиугольнике со стороной $1/\sqrt{3}$), теорема С. С. Ковнера (внутри выпуклой фигуры Ф можно поместить центрально-симметричную выпуклую фигуру, площадь которой не меньше 2/3 площади фигуры Ф) и др.

§ 4. Сложение выпуклых фигур и кривых (задачи 37—54). Вводятся понятия о сложении, расстоянии между выпуклыми кривыми, пределе последовательности выпуклых кривых. Отметим задачи 42) о площади ограниченной кривой $K + O$, где K — выпуклый многоугольник, O— окружность и 50) внутренняя кривая, ограничивающая r-окрестность выпуклой кривой, сама является выпуклой кривой.

§ 5. Изопериметрическая задача (задачи 55—66). Изопериметрическое свойство круга, задача Дидоны и др.

§ 6. Разные задачи на максимум и минимум (задачи 67—77). Описанная и вписанная окружности выпуклой фигуры; частный случай теоремы Минковского (и приложения) и ряд других задач; указано несколько нерешенных вопросов.

§ 7. Кривые постоянной ширины (задачи 78—97). Треугольник Релло, теорема Барбье, теорема об аппроксимации произвольной кривой постоянной ширины кривой постоянной ширины, составленной из дуг окружностей.

§ 8. Кривые, вращающиеся в равностороннем треугольнике (Δ-кривые и родственные им кривые) (задачи 98—116). Вводится понятие Δ-кривой (кривая, которая может свободно вращаться в равностороннем треугольнике, соприкасаясь с его сторонами), доказывается аппроксимационная теорема, аналогичная теореме § 7. Отметим задачи 110—111, из которых вытекает, что Δ-кривые можно определить как те, которые в сумме с полученными из них поворотами на 120° и 240° дают окружности.

Дополнение I. Принцип предельной кривой. Теорема о компактности ограниченного множества выпуклых кривых и некоторые следствия. Дополнение II. О понятии выпуклой и невыпуклой фигур. Решения. Им посвящена большая часть книги (стр. 92—252). Библ. (ее нет в русском издании) 20 назв. Именной и предметный указатель (его тоже нет в русском издании).

Г. И. Дринфельд

4207 К. Старое и новое о выпуклых телах. Хадвигер (Altes und Neues über konvexe Körper. Hadwiger H. Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1955, 116 S., 13.50 S. fr.) (нем.)

Выпуклое тело A, B, ..., в смысле этой книги является ограниченным замкнутым выпуклым подмножеством трехмерного евклидова пространства. Отправляясь от немногих необходимых понятий, настоящая книга сосредоточивает внимание на развитии теории объема V поверхности F и интеграла средней кривизны тела A. Кроме последней главы, методы большей частью являются прямыми.

Первая глава на 16 страницах вводит основные понятия, например: сложение Минковского $A \times B$, внутренних и внешних параллельных тел A_ρ ($\rho \geqslant r.r$ — радиус внутренней сферы), действительные функционалы $X(A)$. Пространство $\mathfrak{K}$ тел A метризовано, и его локальная компактность доказана (теорема Бляшке о выборе).

Любое тело A можно аппроксимировать выпуклыми полиэдрами P. Каждая симметризация Штейнера S есть непрерывное отображение $\mathfrak{K}$ в себя. Аналогично, $A \times B$ непрерывно зависит от A и B. Пусть A фиксировано. Тогда замыкания в $\mathfrak{K}$ множества σ всех B, полученных из A конечным числом, симметрично S, и множества всех конечных сумм Минковского $k^{-1}A^{\delta_1} \times k^{-1}A^{\delta_2} \times \ldots \times \times k^{-1}A^{\delta k}$ содержат сферы (δ_i обозначают вращения вокруг начала (гл. II, 7 стр.)). Функционалы $V(A)$, $F(A)$, $M(A)$ знакоопределенны ($V(A) \geqslant 0$,...), монотонны (из $B \subset A$ следует $V(B) \leqslant V(A)$,...) и однородны ($V(\lambda A)/V(A)$ и т. д. будут степенями $\lambda > 0$). Формула Штейнера и все эти свойства сначала доказаны для P, затем обобщаются для A. Множество $\mathfrak{M}$ [$\mathfrak{N}$] всех линейных комбинаций

$$X(A) = \alpha_0 + \alpha_1 M(A) + \alpha_2 F(A) + \alpha_3 V(A) \ldots \qquad (1)$$

с действительными (неотрицательными) коэффициентами состоит из всех непрерывных (всех монотонных) $X(A)$, которые удовлетворяют условиям: 1) $X(A) = X(B)$, если A и B конгруэнтны, 2) $X(A \cup B) + X(A \cap B) = X(A) + X(B)$, если выпуклое тело $A \cup B$ делится плоскостью на A и B. $V(A)$ описывается аналогично. В качестве приложения доказываются интегральные формулы Коши (гл. III, 20 стр.).

В гл. IV (33 стр.) рассматриваются неравенства для V, F, M. Из приведенной теоремы о множестве σ следует

$$V(A \times B)^{1/3} \geqslant V(A)^{1/3} + V(B)^{1/3}.$$

Отсюда получается теорема Брунна-Минковского, которая позволяет получить неравенства Минковского

$$F^2 \geqslant 3MV \ldots \qquad (2)$$

$$M^2 \geqslant 4\pi F \ldots \qquad (3)$$

Из этих неравенств выводится изопериметрическое неравенство

$$F^3 \geqslant 36\pi V^2 \ldots \qquad (4)$$

Исключая неравенство (2), по поводу которого читателя отсылают к оригинальной статье Бола (Bol), автор исследует условия, при которых выполняются равенства. Неравенство (3) доказывается при помощи интегральной геометрии.

Теорема Брунна-Минковского обобщается на вогнутые семейства выпуклых тел и доказывается, что семейство всех A_ρ [$-r \leqslant \rho < \infty$] является вогнутым.

Для любого $\rho \geqslant -r$ имеет место $dV(A_\rho)/d\rho = F(A_\rho)$. Исследование внутренних параллельных тел приводит к простому улучшению неравенства (4).

При помощи некоторых нормированных тел доказываются улучшения неравенств (3) и (4), полученные Болом и Кнотом (Knothe).

Следуя Голдбергу (M. Goldberg), неравенство (4) улучшается для P. Эта глава заканчивается детальным исследованием диаграммы Бляшке как для $\mathfrak{K}$, так и для некоторых подмножеств $\mathfrak{K}$.

Последняя глава является введением в интегральную геометрию выпуклых тел (20 стр.). Доказываются различные результаты следующего типа: пусть $A[A_0]$ является переменным (фиксированным). Если Φ принадлежит соответствующему классу функционалов, то $\int \Phi(AA_0)d*$ или $\int \Phi(A)\,d*$, распространенные над соответствующими группами движений, будет функционалом $X(A) \subset \mathfrak{M}$. Следовательно, здесь (1) применимо, ибо α_i зависят только от Φ. Большое число специальных результатов включают формулы Крофтона (Crofton) и Коши, а также главные кинематические формулы Бляшке и Сантало (Santaló). Субъективный выбор материала отражает интересы автора и его достижения. Если читатель с этим согласен, то он будет только восхищаться мастерским изложением материала. Референт находит, что книга легко читается и стимулирует дальнейшие исследования.

Каждая глава заканчивается библиографическими заметками. В конце книги на 13 страницах приводится библиография. P. Scherk

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 401.

См. также: 3641

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

4208. Задача нахождения собственных значений системы дифференциальных уравнений методом итераций. Лаасонен (Ein Problem bei der iterativen Bestimmung der Eigenwerte simultaner Differentialgleichungen. Laasonen Pentti. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 195, 13 S.) (нем.)

Исследуются вопросы, связанные с решением задачи о собственных значениях для системы

$$\frac{d}{dx}u(x) = [F(x) + \lambda G(x)]\,u(x)$$

с граничным условием

$$Au(a) + Bu(b) = 0$$

(F, G, A и B — заданные матрицы) при помощи следующего итерационного метода:

$$\frac{d}{dx}v_i(x) = F(x)v_i(x) + G(x)v_{i-1}(x),$$

$$Av_i(a) + Bv_i(b) = 0.$$

В. К. Саульев

4209. Одновременное нахождение многих собственных значений посредством частичной итерации. Лаасонен (Simultane Bestimmung mehrerer Eigenwerte mittels gebrochener Iteration. Laasonen Pentti. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. AI, № 217, 8 S.) (нем.)

Рассматриваются вопросы решения системы дифференциальных уравнений (реф. 4208) при помощи частичной (gebrochen) итерации:

$$\frac{d}{dx}v_\mu^{(i)} = (F + \bar{\lambda}_\mu G)\,v_\mu^{(i)} + G v_\mu^{(i-1)} \qquad (1)$$

$$Av_\mu^{(i)}(a) + Bv_\mu^{(i)}(b) = 0, \qquad \mu = 1,2,\ldots,m, \qquad i = 1,2,\ldots$$

Здесь $\bar{\lambda}_\mu$ — предполагаемые приближения (которые при помощи (1) улучшаются) искомых собственных значений λ_μ. В. К. Саульев

4210. Замечание об итеративном решении задачи на собственные значения для векторного дифференциального уравнения. Лаасонен (Bemerkung zur iterativen Lösung der Eigenwertaufgabe einer Vektordifferentialgleichung. Laasonen Pentti. Suomalais. tideakat. toimituks., 1956, Sar. AI, № 230, 8 S., ill.) (нем.)

Продолжение работ того же автора (реф. 4208, 4209) по приближенным методам определения собственных значений и собственных функций определенно-самосопряженной задачи, связанной с системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dx}u(x) = (F(x) + \lambda G(x))u(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad (1)$$

и краевыми условиями

$$Au(a) + Bu(b) = 0. \qquad (2)$$

Строится итеративный процесс, позволяющий определять одновременно несколько первых (наименьших по абсолютной величине) собственных значений и соответствующих им собственных векторов. Метод обосновывается путем сведения системы (1) с условиями (2) к системе интегральных уравнений с симметризуемым ядром.

Формальная схема метода заключается в следующем: пусть A — самосопряженный вполне непрерывный оператор и $v_1,\ldots,v_m$ — произвольные линейно независимые элементы. Обозначим через Q_k матрицу с элементами $(v_i, A^k v_j)$, $i,j = 1,\ldots,m$. Собственные значения задачи $(Q_k - \mu Q_{k-1})\,t = 0$ сходятся при $k \to \infty$ к наименьшим по модулю собственным значениям задачи $(1 - \lambda A)x = 0$, и линейные комбинации элементов $v_1,\ldots,v_m$, коэффициенты которых являются компонентами векторов t, сходятся к соответствующим собственным элементам.

Л. Д. Фаддеев

4211. Применение исчисления конечных разностей к задаче о собственных крутильных колебаниях. Янатка (Řešení vlastních torsních kmitů diferenčním počtem. Janatka Jaroslav), Aplikace matematiky, 1956, **1**, № 4, 245—275 (чешск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается вычисление собственных колебаний крутильной системы с несколькими степенями свободы с моделью вала с одинаковыми дисками. Решение осуществляется при помощи метода конечных разностей. Автор находит соответствующее разностное уравнение и решает его подробно при различных краевых условиях, которые выражают самые важные случаи технической практики. Показан также простой метод практического вычисления собственных колебаний и обращается внимание на выгоды применения разностных уравнений к решению задач подобного характера.

I. Babuška

4212. О сходимости некоторых конечноразностных процессов для уравнений $y'=f(x, y)$ и $y'(x)=f(x, y(x))$, $y(x-\tau(x))$. **Горбунов А. Д., Будак Б. М.,** Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 4, 644—647

Исследуется сходимость некоторых конечноразностных процессов решения задачи Коши для указанных в заголовке уравнений и устанавливаются некоторые оценки.

Дифференциальную задачу

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0,\ (x_0,y_0)\in G, \qquad (1)$$

где $f(x,y)$ непрерывна в G плоскости (x,y), заменим конечноразностной задачей

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i y_{k-i}=h\sum_{i=0}^{n}\beta_i f_{k+l-i},\quad f_i=f(x_i,y_i), \qquad (2)$$

$$y_i=g(x_i),\quad i=0,-1,\ldots,-(p-q-1),\quad g(x_0)=y_0,$$

где приближенные значения y_i ординат $y(x_i)$ точного решения $y=y(x)$ ищутся в точках $x_i=x_0+ih$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$; $h>0$, а m и n — заданные целые числа, α_i и β_i — определенные действительные числа, $m>0$, $n\geqslant 0$, α_0, α_m, β_0, β_m отличны от нуля; $g(x)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая на $[x^*,x_0]$ начальная функция, причем $[x^*,x_0]$ составляет часть проекции пересечения прямой $y=y_0$ с G на ось x; $p=\max(k,k+l)$, $q=\min(k-m,\ k+l-n)$.

Определив понятие сходимости конечноразностного процесса задачи (2), авторы формулируют теорему 1: Если конечноразностный процесс, определяемый уравнением (2), сходится, то выполнены условия

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i=0,\quad \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}\alpha_j=\sum_{i=0}^{n}\beta_i\neq 0. \qquad (3)$$

При выполнении соответствующих условий справедлива теорема 2, дающая необходимые и достаточные условия равномерной сходимости конечноразностного процесса, определяемого уравнением (2). Рассмотрены некоторые частные случаи и найдены оценки для $|\widetilde{y_h}(x)-y(x)|$.

Данные в работе определения, предложения и оценки распространяются с небольшими изменениями на конечноразностный метод решения уравнений с запаздывающим аргументом

$$y'(x)=f(x,y(x),y(x-\tau(x))),\quad y(x)=\varphi(x)$$

при $\widetilde{x}\leqslant x\leqslant x_0$,

где $\widetilde{x}=\lim\limits_{x_0\ x\ \widetilde{x}}[x-\tau(x)]$, $\varphi(x)$ — заданная непрерывная функция.

Ю. Ф. Харкеевич

4213. Применение метода осциллирующих функций к приближенному решению начальных и краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Шаркова Н. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 251—255

Дается приближенное решение уравнения

$$y''=f(x,y,y') \qquad (1)$$

с начальными условиями $y(0)=a$, $y'(0)=b$ методом осциллирующих функций. Решение разыскивается в виде

$$y_N=\frac{a_k}{2}(x-x_k)^2+b_k(x-x_k)+c_k,$$

где $x_k\leqslant x<x_{k+1}$; $k=0,1,\ldots,N-1$; a_k, b_k и c_k — постоянные. Постоянные b_k и c_k определяются из начальных условий и условий непрерывности y_N и y'_N, а постоянные a_k — из условий осциллируемости „невязки" y_N, т. е. из уравнений

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[a_k-f(x,y_N,y'_N)\right]dx=0\quad (k=0,1,\ldots,N-1). \qquad (2)$$

Система (2) будет разрешима при условии, что

$$\max\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right|\cdot h+\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot\frac{h^2}{2}<1,$$

где $h=\max(x_{k+1}-x_k)$. Показывается, что погрешность приближенного решения пропорциональна h^2.

Далее рассматривается краевая задача для уравнения (1) с условиями $y(0)=y(1)=0$ в определенных предположениях, обеспечивающих существование и единственность решения. Автор заменяет решение краевой задачи решением двух задач с начальными условиями

$$y_1(0)=0,\ y'_1(0)=b_1;\quad y_2(0)=0,\ y'_2(0)=b_2,$$

где числа b_1 и b_2 выбираются таким образом, что искомое решение $y(x)$ будет заключаться между $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Приближенные решения y_{1N} и y_{2N} для y_1 и y_2 строятся указанным выше методом и принимаются за приближенные решения краевой задачи. Дается оценка погрешности.

Б. Н. Бабкин

4214. Математические методы, используемые для приближенного вычисления интегралов и систем дифференциальных уравнений при помощи электронных вычислителей. Саблие (Méthodes mathématiques utilisées pour résoudre numériquement les intégrales et les systèmes d'équations différentielles à l'aide des ordinateurs électroniques. Sabliet S.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1957, **64**, № 7-8, 223—227 (франц.)

Рассматриваются приближенные методы вычисления интегралов и интегрирования дифференциальных уравнений (методы конечных приращений, трапеций и Симпсона) с точки зрения выгодности их применения на электронных вычислителях в зависимости от поведения кривой. Проводятся сравнение погрешности рассматриваемых методов. Отмечается, что при интегрировании дифференциального уравнения иногда бывает выгодным поменять ролями функцию и независимую переменную. В заключение рассматривается система дифференциальных уравнений.

Д. Ф. Давиденко

4215. Применение матричного исчисления к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих некоторые проблемы теории упругости. Сабо (A mátrixelmélet alkalmazása egyes szilárdságtani problémákat leíró parciális differenciálegyenletek közelitö megoldásánál. Szabó János), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), **1**, № 4, 623—631 (венг.; рез. русск., нем.)

Излагается матричный метод решения разностных уравнений, аппроксимирующих краевые задачи для линейных эллиптических дифференциальных уравнений любого порядка. В качестве примера рассматривается применение этого метода к бигармоническому уравнению.

А. Ф. Филиппов

4216. Неограниченная применимость теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к решению первой краевой задачи для линейных уравнений эллиптического типа. Загайнов Л. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 96—98

Доказывается справедливость теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах в случае первой краевой задачи для уравнений

$$L(u)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=$$
$$=f(x_1,\ldots,x_n)\quad (c\leqslant 0),$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\geqslant 0\right),$$

имеющих в ограниченной области G дважды непрерывно дифференцируемые решения. Предполагается, что $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k\geqslant 0$ в области G. Доказательство теоремы опирается на лемму: Если всюду в области G $L(u)>0$ (<0), то u не может иметь внутри G неотрицательных максимумов (неположительных минимумов).

Б. Н. Бабкин

4217. О приближенном решении уравнений эллиптического типа. Майоров И. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 160—162

Рассматривается метод приближенного решения первой краевой задачи для уравнения

$$L(z)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0,\qquad (1)$$

опирающийся на теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Коэффициенты уравнения $a(x,\ y)$, $b(x,\ y)$ и $c(x,\ y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции в области G, ограниченной простой кривой Жордана, и $c(x,\ y)\leqslant 0$.

Автор строит последовательность функций $v_n(x)$ ($n=0,\ 1,\ \ldots$), монотонно сходящуюся (снизу) к решению $z(x,\ y)$. Построение начинается с функции $v_0(x,\ y)$, удовлетворяющей неравенству $L(v_0)>0$, и проводится методом Пикара (или некоторым видоизменением его в зависимости от соотношения между $L(v_0)$ и $|L(v_1)-L(v_0)|$).

Б. Н. Бабкин

4218. О «лучшем» пятиточечном разностном аналоге уравнения Лапласа. Гринспан (On a «best» five-point difference analogue of Laplace's equation. Greenspan Donald), J. Franklin Inst., 1958, **266**, № 1, 39—45 (англ.)

Выводится разностное уравнение

$$-4u(x,y)+\frac{2}{1+p^2}[u(x+h,y)+u(x-h,\ y)]+$$

$$+\frac{2p^2}{1+p^2}[u(x,\ y+d)+u(x,\ y-d)]=0\ (p=h/d),\qquad (1)$$

соответствующее уравнению Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$, для которого доказывается, что оно является „лучшим" в том случае, что: 1) не существует пятиточечных разностных уравнений, имеющих больший порядок погрешности аппроксимации, чем уравнение (1), и 2) любое другое разностное уравнение, имеющее тот же порядок погрешности, что и уравнение (1), отличается от уравнения (1) только на постоянный множитель.

В. К. Саульев

4219. О сходимости алгорифма последовательных приближений для бигармонических разностных уравнений. Бондаренко (Про збіжність алгорифма послідовних наближень для бігармонічних різницевих рівнянь. Бондаренко П. С.), Наук. щорічник Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956, Київ, 1957, 528 (укр.)

Краткое сообщение о работе, выполненной автором в Киевском университете в 1956 г. В этой работе рассматриваются два способа решения системы линейных алгебраических уравнений, порождаемой разностным бигармоническим оператором: способ обычной итерации и способ Зейделя. Установлено, что, вообще говоря, способ обычной итерации расходится.

Доказана теорема: Найденная по формулам

$$U_i^{(n+1)}=\frac{1}{20}\Big[8\,(U_a^{(n)}+U_b^{(n+1)}+U_c^{(n+1)}+U_d^{(n)})-$$
$$-2\,(U_e^{(n)}+U_f^{(n+1)}+U_g^{(n+1)}+U_h^{(n)})-$$
$$-\,(U_p^{(n)}+U_q^{(n+1)}+U_r^{(n+1)}+U_s^{(n)})\Big]$$

последовательность чисел $\{U_i^{(n)}\}$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$) сходится к решению системы

$$20U_i-8\,(U_a+U_b+U_c+U_d)+2\,(U_e+U_f+U_g+U_h)+$$
$$+\,(U_p+U_q+U_r+U_s)=0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

при любых начальных значениях U_i^0.

Г. И. Бирюк

4220. Решение некоторых задач напряженного состояния в многосвязных плоских конструкциях при помощи метода сеток. Клапетек (Riešenie niektorých problémov napätosti viacnásobne súvislých rovinných telies pomocou metódy sietí. Klapetek František), Steyebn. časop., 1958, **6**, № 3, 165—182 (словацк.; рез. русск., нем.)

Краевая задача для бигармонического уравнения решается при помощи метода конечных разностей.

4221. Решение задач чисто пластического кручения с растяжением призматических стержней методом упругих решений в конечных разностях. Иванов С. И., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1958, вып. 4, 59—67

Соответствующая система дифференциальных уравнений в частных производных решается методом последовательных приближений (метод упругих решений); при этом для решения каждой итерации (краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка) применяется обычный метод конечных разностей. Доказательства сходимости метода не приведено. Имеется один числовой пример.

В. К. Саульев

4222. Приложение релаксационного метода для решения дифференциальных уравнений в трехмерном пространстве. III. Трехмерный анализ напряжений. Аллен, Деннис (The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions. III. Three-dimensional stress analysis. Allen D. N. de G., Dennis S. C. R.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 2, 172—184 (англ.)

Статья является продолжением работы тех же авторов (Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, **4**, 199—208).

Для решения задачи определения напряженного состояния тела методом релаксации авторы считают наиболее удобным максвелловское представления компонент тензора напряжения через функции напряжения χ, φ, ψ:

$$\widehat{xx}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \widehat{yy}=\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \widehat{zz}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},$$

$$\widehat{yz}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial z},\quad \widehat{zx}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x},\quad \widehat{xy}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}.$$

Кроме того, вводится функция $\theta=\widehat{xx}+\widehat{yy}+\widehat{zz}$, удовлетворяющая уравнению $\nabla^2\theta=0$. Из условий совместности выводятся уравнения для функций χ, φ, ψ. В силу неоднозначности определения функций напряжений, последние могут быть выбраны так, чтобы определяющая их система уравнений имела вид:

$$\nabla^2\chi=\frac{\theta}{1+\sigma},\quad \nabla^2\varphi=\frac{\theta}{1+\sigma},\quad \nabla^2\psi=\frac{\theta}{1+\sigma},\quad \nabla^2\theta=0.$$

Затем выписываются граничные условия в случае прямоугольного параллелипипеда. Решение системы, удовлетворяющее полученным граничным условиям, ищется следующим образом: в точках пересечения релаксационной решетки с поверхностью задаются значения θ, затем,

решая краевую задачу, определяют значения θ во внутренних точках. Затем определяют значения функций φ, ψ, χ во всех внутренних и граничных точках, удовлетворяющих системе уравнений и некоторым граничным условиям при заданном θ, после чего, пользуясь остальными граничными условиями и полученными значениями функций φ, ψ, χ, вновь определяют значения функции θ в граничных точках и цикл повторяется. Приводится численный расчет напряженного состояния куба, к двум параллельным сторонам которого приложены равные по величине и направленные к центру силы.

Я. М. Каждан

4223. **О контроле численных интегрирований. Дюнген** (Sur le contrôle des intégrations numériques. Dungen F. H. van den), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 103—110 (франц.)

Автор предлагает ряд соотношений, которым удовлетворяют ошибки, допускаемые при решении конечноразностным методом волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$. При этом имеется в виду простейшая разностная схема при условии $\Delta x = c\Delta t$. Эти соотношения могут использоваться для контроля численного интегрирования уравнения (1). Так, например, в силу одного из приведенных соотношений сумма значений u на k-м слое должна равняться сумме значений u в начальный момент, умноженной на $(1-k)$.

Для доказательства указанных соотношений вводится понятие интегральной варианты. Это функция вида $V_n = \int_{x_1-ct}^{x_2+ct} x^n u dx$, представляющая собой полином относительно t, при некоторых предположениях относительно функции u и ее производных в интервале (x_1, x_2). Интегральные варианты могут быть определены разложением

$$F(t) = \sum \frac{(ip)^n}{n!} V_n, \qquad (2)$$

где $F(t)$ — преобразование Фурье функции u, удовлетворяющее уравнению $d^2F/dt^2 = -c^2p^2F$. Разлагая решение этого уравнения, подставляя его в (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ip, можно найти полиномы V_n. Варианты удовлетворяют также инвариантному соотношению $d^2V_n/dt^2 = c^2n(n-1)V_{n-2}$. Таким образом, бесконечная последовательность вариант определяет $F(t)$, а следовательно, и функцию u. Применяя приведенные рассуждения к уравнению в конечных разностях, заменяющему (1), автор получает соответствующие этому уравнению соотношения для ошибок.

Построена последовательность интегральных вариант V_n также для двумерного случая. При этом V_n являются коэффициентами разложения решения u в ряд по собственным функциям.

Приводятся также приближенные формулы, которыми можно пользоваться для решения проблемы Коши, не прибегая к разностному уравнению. Вывод этих формул основан на том обстоятельстве, что приближенные варианты соответствуют приближенному решению проблемы. Для этого случая также приводятся соотношения для ошибок. Интегральные варианты могут, следовательно, использоваться как для контроля интегрирования, так и для построения непосредственно приближенного решения.

Г. И. Бирюк

4224. **Применение теории электрических цепей для определения устойчивости конечноразностных уравнений. Карплус** (An electric circuit theory approach to finite difference stability. Karplus Walter J.), Commun. and Electronics, 1958, № 36, 210—213 (англ.)

При помощи теории электрических цепей (в частности, использования закона Кирхгофа) устанавливается следующий способ для определения достаточного условия устойчивости разностных уравнений.

1. Данное разностное уравнение записывается (если возможно) в виде

$$(w_{i+1,k} - w_{i,k}) + a(w_{i-1,k} - w_{i,k}) + b(w_{i+2,k} - w_{i,k}) + \ldots + c(w_{i,k+1} - w_{i,k}) + d(w_{i,k-1} - w_{i,k}) + e(w_{i,k+2} - w_{i,k}) + \ldots = 0$$

и исследуются коэффициенты a, b, c, d, ...

2. Если все эти коэффициенты положительны, то данное разностное уравнение устойчиво.

3. Если некоторые из этих коэффициентов отрицательны, то для устойчивости достаточно, чтобы алгебраическая сумма всех коэффициентов была отрицательной.

На примерах простейших явного и неявного разностных уравнений, соответствующих уравнениям теплопроводности и волновому, показывается, что условия устойчивости, полученные описанным выше путем, совпадают с соответствующими известными условиями устойчивости.

В. К. Саульев

4225. **Численное интегрирование уравнения теплопроводности. Лоткин** (The numerical integration of heat conduction equations. Lotkin Mark), J. Math. and Phys., 1958, 37, № 2, 178—187 (англ.)

Методом сеток решается нелинейное уравнение с разрывными коэффициентами

$$c^{(m)}\rho^{(m)}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k^{(m)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ в } a_{m-1} \leqslant x \leqslant a_m \quad (m = 1, 2;\ a_0 = 0) \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$-k^{(1)}\frac{\partial u}{\partial x} = g(t) \text{ при } x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = a_2; \qquad (2)$$

начальными условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad a_0 \leqslant x \leqslant a_2,$$

и условием „сшивки“ в точке разрыва коэффициентов $x = a_1$

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2. \qquad (3)$$

Здесь $k^{(m)}$, $\rho^{(m)}$ и $c^{(m)}$ — известные положительные функции от температуры u. Предполагается, что $k^{(m)}$ имеет ограниченную вторую производную, а $c^{(m)}$ и $\rho^{(m)}$ имеют ограниченные первые производные. Далее, предполагается, что в области $a_0 \leqslant x < a_1$, $a_1 < x \leqslant a_2$, $0 \leqslant t \leqslant t_f$ решение данной задачи обладает ограниченными производными u_{tt} и u_{xxxx}.

Уравнения (1) — (3) заменяются разностными уравнениями, которые, например, для уравнения (1) имеют вид:

$$-r^{(m)}T_{i-1,k+1} + (1 + 2r^{(m)})T_{i,k+1} - r^{(m)}T_{i+1,k+1} = T_{ik} + r^{(m)}(k^{(m)\prime}/4k^{(m)})(T_{i+1,k} - T_{i-1,k})^2,$$

где $r^{(m)} = (k^{(m)}/\rho^{(m)}\ c^{(m)})\Delta t/(\Delta_m x)^2$.

Методом, близким к методу Дугласа (РЖМат, 1957, 4379), устанавливается сходимость со скоростью $O(\Delta t + \Delta x)$ рассматриваемого метода сеток.

В. К. Саульев

4226. Методы релаксации и распространение тепла. Часть 1. Лангтон (Relaxation methods and heat transfer. Part 1. Langton N. H.), Industr. Chemist, 1958, **32**, № 380, 414—420 (англ.)

Подробное описание (с приведением единичных и блочных релаксационных диаграмм) метода релаксации Саусвелла (Southwell R. V., Relaxation methods in engineering science, Oxford Univ. Press, 1940) применительно к решению обычных разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение Лапласа. В частности, рассматривается релаксационная техника перехода к более мелкой сетке. В. К. Саульев

4227. Методы релаксации и распространение тепла. Часть II. Лангтон (Relaxation methods and heat transfer. Part 2. Langton N. H.), Industr. Chemist, 1956, **32**, № 381, 480—484 (англ.)

См. реф. 4226.

4228. Метод Ивона для пластин. Зиринг, Шифф (Yvon's method for slabs. Ziering S., Schiff D.), Nucl. Sci. and Engng, 1958, **3**, № 6, 635—647 (англ.)

Излагается применение метода Ивона для приближенного решения стационарного односкоростного уравнения переноса нейтронов с изотропным рассеянием в плоской геометрии

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Phi(\mu, x)}{l} = \frac{c}{2e} \int_{-1}^{1} \Phi(\mu', x)\, d\mu' + S(\mu, x) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\Phi(\mu, 0) = 0, \ \mu > 0, \quad (2a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(\mu, b) = 0, \ \mu < 0, \text{ если } 0 < b < +\infty; \\ \Phi(\mu, b) \text{ — конечно, если } b = +\infty \end{array}\right\}. \quad (2б)$$

Метод Ивона в $P_n^{\pm}$-аппроксимации состоит в том, что решение задачи (1) — (2) отдельно для промежутков [— 1, 0] и [0, 1] ищется в виде суммы $n+1$ членов разложения функции Ф по полиномам Лежандра:

$$\Phi^{\pm}(\mu, x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n+1} (2i+1)\, B_i^{\pm}(x)\, P_i^{\pm}(\mu),$$

где

$$\Phi^{+} = \Phi, \ 0 \leqslant \mu \leqslant 1; \ \Phi^{-} = \Phi, \ -1 \leqslant \mu \leqslant 0; \ P_i^{\pm}(\mu) = P_i(2\mu \mp 1);$$

P_i — полиномы Лежандра. Для определения неизвестных функций $B_i^{\pm}(x)$ уравнение (1) умножается на $P_j^{\pm}(\mu)$ и интегрируется по μ соответственно в пределах: $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$. Полученная система $2n+2$ дифференциальных уравнений вместе с соответствующими граничными условиями приближенно решает задачу (1) — (2). Этот метод, в его простейшей форме, — $P_0^{\pm}$-аппроксимации, — был применен еще Шустером (1905 г.) и Шварцшильдом (1906 г.) в связи с задачами о рассеянии света в атмосфере.

Метод Ивона имеет более быструю сходимость по сравнению с методом сферических гармоник [см., например, Марчук Г. И., Численные методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, 1958, гл. XIII], согласно которому решение ищется в виде суммы $n+1$ членов разложения по полиномам Лежандра на всем интервале изменения μ (P_n-аппроксимация). Но известно, что на границе раздела двух сред или на внешней границе решение задачи (1) — (2) имеет скачок в точке $\mu = 0$. Наличие этого скачка по существу и учитывается в методе Ивона.

Дается сравнение точности метода Ивона с методом сферических гармоник и методом дискретных ординат Чандрасекхара [Чандрасекхар С. Перенос лучистой энергии, Изд-во ин. лит., 1953]. Так, например, приближенное асимптотическое значение плотности, полученное из $P_1^{\pm}$-приближения для задачи Милна ($c = 1$), имеет погрешность 0,1%, в то время как P_5-аппроксимация метода сферических гармоник дает погрешность 0,4%. В. С. Владимиров

4229. Метод Нистрёма—Гаусса в применении к задачам изгиба пластинок с разрывными краевыми условиями. Кацнер (Metoda Nyströma—Gaussa w zastosowaniu do zagadnień zginania plyt o nieciagiych warunkach brzegowych. Kacner Artur), Arch. inż-ii ladow., 1958, **4**, № 1, 55—73 (польск.; рез. русск., англ.)

Эффективность метода Нистрёма — Гаусса существенно зависит от наличия особенностей у ядра и свободного члена интегрального уравнения.

В рассмотренном примере полубесконечной полосы — пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$, свободно опертой на полубесконечных краях и на участке короткого края, а на остальном участке этого края — упруго заделанной, оказалось возможным выделить особую точку логарифмического типа у ядра интегрального уравнения.

Абсциссы и коэффициенты Гаусса были применены для приведения интегрального уравнения к приближенно эквивалентной системе алгебраических линейных уравнений, а также для вычисления некоторых определенных интегралов, являющихся коэффициентами, расположенными на главной диагонали матрицы системы. При вычислении значений этих определенных интегралов также была выделена особенность подынтегральной функции.

Пример был решен для трех значений ω винклерового коэффициента упругой заделки участка края пластинки. При первом приближении были применены всего три точки Гаусса, при втором — семь точек. Было показано, что при $\omega \gg 0$ увеличение количества уравнений с трех до семи не меняет существенно степени точности решения.

При ω, близких к нулю, значение функции момента упругой заделки в точке, отделяющей участок упругой заделки от участка свободного опирания, неограниченно возрастает и точность, с которой можно вычислить значения момента около этой точки, даже при применении большого числа абсцисс и коэффициентов Гаусса, значительно уменьшается. Из резюме автора

4230. Замечание к решению нелинейных интегральных уравнений способом механических квадратур. Линь Цюнь (Lin Chün), Шусюэ цзиньхжань, 1958, **4**, № 1, 139—142 (кит.)

Задано нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) - \int_0^1 f(s, t, x(t))\, dt = 0, \quad (1)$$

где $f(s, t, u)$ непрерывна по каждому переменному $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, $|u| \leqslant r$.

Рассматривается соответствующая ему конечная система нелинейных уравнений

$$\bar{x}_i - \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_i, t_k, \bar{x}_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (2)$$

где $t_k = \dfrac{k-1}{n}$, $A_k = \dfrac{1}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Теорема 1. Если система (2) имеет решение $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \ldots, \bar{x}_n^*)$, причем $\max |\bar{x}_i^*| \leqslant r$, то функция $\bar{x}^*(s) \equiv \sum_{k=1}^{n} A_k f(s, t_k, \bar{x}_k^*)$ является приближенным решением уравнения (1) в том смысле, что

$$\max_s \left| \bar{x}^*(s) - \int_0^1 f(s, t, \bar{x}^*(t))\, dt \right| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{n}, \omega_f^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\omega_f(\delta, \gamma_1)$ (соответственно $\omega_f^{(s)}(\delta)$, $\omega_f^{(t)}(\delta)$) — модуль непрерывности функции $f(s, t, u)$ относительно переменных t и u (соответственно относительно переменных s и t).

Теорема 2. Если $f(s, t, u)$ удовлетворяет условию

$$| f(s, t, u') - f(s, t, u'') | < \alpha | u' - u'' |, \quad 0 \leqslant s, t \leqslant 1, \quad | u' |, \ | u'' | \leqslant r,$$

где

$$\alpha < 1, \ r > \frac{M}{1-\alpha}, \ M = \max_{s,t} | f(s, t, 0) |,$$

то из принципа сжатых отображений вытекает существование решения уравнения (1) и системы (2). Кроме того, имеют место оценки

$$\max_s \left| \bar{x}^*(s) - x^*(s) \right| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left\{ \omega_f^{(t)}\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha\omega_f^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$\max_s \left| x^*_{(s)} - \sum_{k=1}^{n} A_k f(s, t_k, \bar{x}_k^{(m)}) \right| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left\{ \omega_f^{(t)}\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha\omega_f^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)\right\} + \frac{M}{1-\alpha}\alpha^{m+1},$$

где $x^*(s)$ — точное решение (1), $\{\bar{x}_k^{(m)}\}$ — приближенное решение системы (2) итерационным методом.

Если вместо системы (2) рассматривается система $\bar{x}(s) - \sum_{k=1}^{n} A_k f(s, t_k, \bar{x}(t_k)) = 0$, можно получить подобные результаты.

Ши Чжун-цы

4231. Об оценке ошибки, возникающей при решении неоднородного интегрального уравнения способом замены ядра на близкое. Мысовских И. П., Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1958, № 1, 63—73 (кит.; рез. русск.)

При решении интегрального уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s) \qquad (1)$$

методом замены ядра на близкое за приближенное решение уравнения (1) принимается решение $\tilde{\varphi}(s)$ интегрального уравнения

$$\tilde{\varphi}(s) = \lambda \int_a^b M(s, t)\, \tilde{\varphi}(t)\, dt + f(s),$$

ядро которого $M(s, t)$ близко в каком-либо смысле к $K(s, t)$.

Пусть $P(s, t)$ — комплекснозначная функция вещественных переменных s, t, заданная в квадрате $[a, b; a, b]$ и такая, что указываемые ниже интегралы существуют. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$P(s) = \left\{\int_a^b \left| P(s, t)\right|^2 dt\right\}^{1/2}, \quad P = \left\{\int_a^b\int_a^b |P(s, t)|^2 ds, dt\right\}^{1/2}$$

и обозначим резольвенту ядра $M(s, t)$ через $R_M(s, t, \lambda)$.

В статье приводится доказательство оценки

$$| \varphi(s) - \tilde{\varphi}(s) | \leqslant \frac{|\lambda| B}{1 - |\lambda| NB}\left[N(s) + |\lambda| N R_M(s)\right] \|f\|,$$

где $B = 1 + |\lambda| R_M$, $N(s, t) = K(s, t) - M(s, t)$.

Из резюме автора

4232. Применение смешанного приближенного метода решения интегральных уравнений к задачам строительной механики. Воронцов Г. В., Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1958, № 78/92, 3—10

Приближенное решение уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b \delta(x, \xi)\, D[y(\xi), y'(\xi), \ldots]\, d\xi + f(x)$$

ищется в виде $y(x) \approx \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x)$, где $\varphi_j(x)$ — некоторая, подходящим образом выбираемая система функций. Приведены четыре числовых примера.

В. К. Саульев

4233. Приближенное решение некоторых видов нелинейных интегральных уравнений. Бельтюков Б. А., Уч. зап. Благовещ. гос. пед. ин-та, 1956, 7, 51—56

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$F[x, u(x)] = \lambda \int_a^b \Gamma[x, s, u(s)]\, ds \qquad (1)$$

в случаях когда: 1) подынтегральная функция является вырожденной

$$\Gamma[x, s, u(s)] = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x)\, \psi_i[s, u(s)],$$

2) $\Gamma[x, s, u(s)]$ — функция произвольной структуры, но разлагающаяся в ряд Маклорена по степеням x:

$$\Gamma[x, s, u(s)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma_x^{(i)}[x = 0, s, u(s)]}{i!} x^i. \qquad (2)$$

В случае 1) первое приближение находится численно-графически с применением квадратурной формулы Гаусса, а затем уточняется методом последовательных приближений В. П. Ветчинкина (Тр. ЦАГИ, 1934, вып. 192). В случае 2), беря первые n членов ряда (2), автор составляет для уравнения (1) аппроксимирующее уравнение

$$F[x, u(x)] = \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma_x^{(i)}[x = 0, s, u(s)]}{i!} x^i,$$

которое затем решается приемом, как в случае 1).

В качестве примера решается уравнение

$$u(x) - x^2 + e^{-\frac{x}{20}} = \int_1^2 e^{\frac{x}{40s}\left[s + \sqrt{u(s)}\right]} ds.$$

К. Н. Юрчук

4234. Метод спуска в проблеме релаксации. Лу Вэнь, Гуань Чжао-чжи (Loo Win, Kwan Chao-Chih), Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 5, № 4, 497—504 (кит.; рез. франц.)

Рассматривается метод решения системы линейных уравнений в пространстве Гильберта, представляющий собой комбинирование метода спуска и метода релаксации. Суть предлагаемого метода состоит в том, что направление скорейшего спуска ищется не во всем пространстве, а в некотором конечном подпространстве H_n, которое можно выбрать таким образом, чтобы исчезли все компоненты вектора невязок, соответствующие данному подпространству. Выбор H_n должен гарантировать исчезновение преобладающих компонент вектора невязок c_n. Другими словами, на каждом этапе приближения H_n выбираются так, чтобы для нормы проекции $P_n c_n$ вектора c_n на H_n выполнялось условие

$$\| P_n c_n \|^2 \geqslant \varkappa \| c_n \|^2,$$

где $\varkappa$ — фиксированное число, $0 < \varkappa < 1$.

Доказана сходимость предлагаемого метода и установлено, что скорость сходимости такая же, как скорость сходимости геометрической прогрессии. Проводится сравнение рассматриваемого метода с некоторыми известными методами. Г. И. Бирюк

4235. О квадратурной формуле Харди. Коциу (Asupra formulei de cuadratură a lui Hardy. Cotiu A.), Gáz. mat. si fiz., 1958, **A 10**, № 7, 404—412 (рум.; рез. франц., русск.)

Автор, следуя основным идеям Д. В. Ионеску, выводит квадратурную формулу Харди

$$\int_{a-3h}^{a+3h} f(x)\,dx = h\{2{,}20f(a) + 1{,}62[f(a-2h)+f(a+2h)] + 0{,}28[f(a-3h)+f(a+3h)]\} + R$$

и оценивает погрешность:

$$|R| < 0{,}019912\ldots h^7 \max|f^{(6)}(x)|.$$

В. К. Саульев

4236. Обобщение некоторых формул интерполирования для функций нескольких переменных. Станку (Generalizarea unor polinoame de interpolare pentru functiile de mai multe variabile. Stancu D. D.), Bul. Inst. politehn. Iasi, 1957, **3**, № 1-2, 31—38 (рум.; рез. русск., англ.)

Автор обобщает интерполяционную формулу Стеффенсона, считая, что значения ординат $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m_i+1}$ зависят от натурального числа i:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m_i+1}(x-x_i)\ldots(x-x_{i-1})(y-y_{i,1})\ldots(y-y_{i,j-1})\times \times\begin{bmatrix} x_1,\ldots,x_i \\ y_{i,1},\ldots,y_{i,j}\end{bmatrix}; f\Big] + R_2(x,y),$$

где

$$R_2(x,y) = (x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})[x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] + \sum_{i=1}^{n+1}(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(y-y_{i,1})\ldots(y-y_{i,m_i+1})\times \times\begin{bmatrix} x_1,x_2,\ldots,x_i \\ y,y_{i,1},\ldots,y_{i,m_i+1}\end{bmatrix}; f\Big].$$

Устанавливается интерполяционная формула для случая трех независимых переменных, из которой в случае, если ординаты $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m_i+1}$ и аппликаты $z_{i,j,1}, z_{i,j,2}, \ldots, z_{i,j,p_{i,j}+1}$ не зависят от i и j, получается интерполяционная формула Ньютона. Рассматриваются и другие частные случаи. В одном частном случае выводится выражение для остаточного члена.

В. К. Саульев

4237. Вычисление двуцентровых интегралов. Таубер (Evaluation of two-center exchange integrals. Tauber G. E.), J. Chem. Phys., 1958, **29**, № 2, 300—310 (англ.)

Интегралы вида

$$\iint \chi_a(1)\chi_b'(1)(1/r_{12})\tilde{\chi}_a(2)\tilde{\chi}_b(2)dV_1dV_2 \qquad (1)$$

(a и b — центры; 1 и 2 — электроны; χ — приближенная атомная волновая функция) вычисляются путем сведения к решению некоторого уравнения Пуассона. Интегралы (1) также выражаются через интегралы, которые вычисляются аналитически. В. К. Саульев

4238. Использование различных способов выборки в методах Монте-Карло. Кан (Use of different Monte Carlo sampling techniques. Kahn Herman), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 146—190 (англ.)

Подробно рассматривается назначение и применение шести способов уменьшения дисперсии, используемых в методах Монте-Карло: 1) метод целесообразных выборов (importance sampling); 2) метод рулетки и расщепления (roulette and splitting); 3) метод использования ожидаемых значений (use of expected values); 4) метод корреляции (correlation); 5) метод систематизированных выборок (systematic sampling) и 6) метод наслаивающихся выборок (stratified sampling).

Для иллюстрации этих методов рассматриваются пример на определение вероятности появления трех очков при броске двух шестигранных игральных костей и пример на вычисление определенного интеграла

$$\iint_S z(x,y)f(x,y)\,dx\,dy = \overline{z(x,y)} = \bar{z}, \qquad (1)$$

где $f(x,y) \geqslant 0$ на S и $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = 1$, при помощи случайных выборок.

Обычно $\bar{z}$ определяется по формуле $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z(x_i, y_i)$, где величины x_i, y_i выбираются случайно при помощи функции плотности вероятности $f(x,y)$.

В методе целесообразных выборок выборка величин x_i, y_i производится из функции плотности вероятности $f^*(x,y)$, для которой

$$\bar{z} = \iint_S z(x,y)\frac{f(x,y)}{f^*(x,y)}f^*(x,y)dx\,dy,$$

причем функция $f^*(x,y)$ выбирается так, чтобы ее использование уменьшало дисперсию. Величина $\bar{z}$ тогда определяется по формуле

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z(x_i, y_i)\frac{f(x_i, y_i)}{f^*(x_i, y_i)}.$$

Приводятся два пути для использования этого способа: метод целесообразных выборок только в пространстве x и метод целесообразных выборок при помощи параметра.

Метод рулетки и расщепления — это метод последовательной выборки, применяемый, когда выборка делается по этапам, т. е. когда сначала выбирается x, а затем выбирается y.

В методе использования ожидаемых значений вычисление интеграла (1) заменяется вычислением интеграла

$$\int z(x,y)\frac{f(x,y)}{f(x)}dx$$

при помощи метода Монте-Карло.

В методе корреляции вместо интеграла (1) вычисляется методом Монте-Карло интеграл $\iint v(r,s)\,g(r,s)\,dr\,ds$.

Для вычисления этого интеграла используются те же самые случайные числа, которые использовались бы для вычисления интеграла (1). Тогда вместо вычисления среднего значения функции $z(x,y)$ вычисляется среднее значение функции $u(x,y,r,s) = z(x,y) - \alpha[v(r,s) - \bar{v}]$. Математическое ожидание для u равно математическому ожиданию для z, а их дисперсии различны. Минимальная дисперсия получается для определенного значения α, которое определяется из условия минимума дисперсии функции $u(x,y,r,s)$.

Метод систематизированных выборок состоит в том, что вместо случайной выборки N чисел R_1, которые необходимы для получения x_i из уравнения $\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx=R_1$ (где R_i – независимые случайные числа, однородно распределенные между нулем и единицей), используются N чисел вида $\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{N}$, где $i=1, 2, 3, \ldots, N$. Аналогично можно сделать выборки и в пространстве переменной y.

Метод наслаивающихся выборок является комбинацией метода систематизированных выборок и метода целесообразных выборок, т. е. значения x_i выбираются из условия $\int_{-\infty}^{x_i} f^*(x)\,dx = \frac{1}{N}\left(i-\frac{1}{2}\right)$, а значения y_i выбираются случайно из $f(x_i, y)/f(x_i)$, так что

$$\frac{1}{N}\sum z(x_i, y_i)\frac{f(x_i)}{f^*(x_i)}.$$

При рассмотрении каждого из шести методов авторы вычисляют дисперсию и сравнивают между собой достоинства и недостатки различных методов. Числовых примеров для иллюстрации изложенных методов не приводится. В. Я. Евфанов

4239. Квадратурные формулы для кратных интегралов, имеющие по возможности высшую степень точности. Микеладзе Ш. Е., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, 18, № 1, 3—10

Рассматривается n-кратный интеграл частного вида, взятый от точки $A=a+Ht_\alpha$ до точки $B=aHt_\beta$:

$$I=\int_A^B\int_A^z\cdots\int_A^z f(z)\,d\,z^n=\frac{H^n}{(n-1)!}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}f(a+Ht)\,dt. \qquad (1)$$

Для его вычисления предлагается построить формулу механических квадратур с m узлами

$$I=\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu f(a+Ht_\nu), \qquad (2)$$

имеющую наивысшую алгебраическую степень точности. Указывается также на известную возможность задать заранее в формуле (2) некоторые из узлов t_ν и коэффициентов A_ν, а остальные находить из требования достижения формулой возможно высокой степени точности. Отдельно рассматривается однократный интеграл ($n=1$). Всегда можно считать $t_\alpha=-1$, $t_\beta=1$ и $I=\int_{-1}^{1} f(a+Ht)\,dt$. Строятся формулы вида (2) гуассова типа, у которых заданы два узла $t_1=i$ и $t_m=-i$.

Примечание референта. Заменой $t=t_\alpha+u(t_\beta-t_\alpha)$ $(0\le u\le 1)$ (1) приводится к интегралу $I_1=\int_0^1(1-u)^{n-1}f(a+Ht)\,du$ с весовой функцией $(1-u)^{n-1}$. Если предположить, что квадратурная формула вида (2) для него точна всякий раз, когда f есть многочлен степени не выше $2m-1$, то получится формула Гаусса-Кристоффеля частного вида. Общая теория таких формул для случая неотрицательных весовых функций хорошо известна. Если же требовать, чтобы формула была точной для многочленов степени s $(m-1<s<2m-1)$, то $m-s$ абсцисс в квадратурной формуле можно задавать произвольно. Такие формулы ранее рассматривались Н. Я. Сониным и А. А. Марковым (см., например, Марков А. А., Исчисление конечных разностей, Mathesis, Одесса, 1910, гл. VII). В. И. Крылов

4240. Два новых метода приближенного вычисления кратных интегралов. Сюй Ли-чжи, Линь Лунвэй (Two new methods concerning the approximate calculation of multiple integrals. Hsu L. C., Lin L. W.), Sci. Rec., 1958, 2, № 7, 215—219 (англ.)

Рассмотрены два вопроса в проблеме приведения многократного интеграла к однократному.

I. Функция $f(x_1, \ldots x_m)$ предполагается 2π-периодической по каждому аргументу и имеющей непрерывные производные порядка p. $\omega_p(\rho)$ есть верхняя огибающая модулей непрерывности производных порядка p.

Теорема. Пусть q есть целое положительное число и

$$\varphi(t)=f(\gamma_1 t, \ldots \gamma_m t),\ \gamma_i=R^{q-i}\ (i=1, \ldots m),\quad M=R^{p+m-q}.$$

Тогда для больших R будет

$$\left|(2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(x_1, \ldots x_m)\,dx_1\ldots dx_m-\frac{1}{M}\int_0^M\varphi(t)\,dt\right|\le$$

$$\le 2\sigma^*(R)\,R^{-p}+O\left[R^{-p}\,\omega_p(R^{-p})\right].$$

Здесь $\sigma^*(R)$ есть некоторая функция R, вычисляемая по коэффициентам Фурье функции f.

При помощи применения к интегралу $\int_0^M\varphi(t)\,dt$ формулы Симпсона авторы дают правило приближенного вычисления многократного интеграла по значениям f и приводят оценку погрешности.

II. Запись $<a>$ означает дробную часть числа a. Функция $f(x,y)$ считается непрерывной в квадрате $0\le x, y\le 1$

и $$\bar f(x, y)=\frac{1}{2}[f(x, y)+f(x, 1-y)].$$

Доказывается следующий аналог теоремы Эйлера-Маклорена: если $f(x, y)$ имеет частные производные по x до порядка $2p+1$, то

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\,dxdy=\int_0^1\bar f(x, <Nx>)\,dx-$$

$$-\sum_{r=1}^{p}\frac{1}{(2r)!}N^{-2r}\int\left(\frac{\partial^{2r-1}f}{\partial x^{2r-1}}\right)_{x=0}^{x=1}B_{2r}(y)\,dy+R_{p+1}.$$

Здесь $R_{p+1}=O(N^{-2p-2})$ для больших N, $B_{2r}(y)$ есть многочлен Бернулли степени $2r$ и $(F(x, y))_{x=0}^{x=1}=F(1, y)-F(0, y)$. Когда $f(x, y)$ имеет производные по x всех порядков и

$$\left|\left(\frac{\partial^{2r-1}f}{\partial x^{2r-1}}\right)_{x=0}^{x=1}\right|\le C_r,\ r=1, 2, \ldots,$$

верна оценка

$$\left|R_{p+1}\right| \leq 6\left(1+\frac{1}{2p}\right)\sum_{r=p+1}^{\infty}\frac{C_r}{(2\pi N)^{2r}}.$$

Указывается на возможность построения аналогичных равенств для функций большего числа аргументов.

В. И. Крылов

4241. Об одной задаче в теории механических квадратур. Дейвис (On a problem in the theory of mechanical quadratures. Davis Philip), Pacif. J. Math., 1955, **5**, Suppl. № 1, 669—674 (англ.)

Рассматривается сходимость квадратурного процесса

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_{nk} f(\lambda_{nk}) = Q_n(f) \qquad (1)$$

в классах аналитических функций. Пусть B есть область комплексной плоскости $z = x + iy$, содержащая внутри себя $[-1, 1]$. Под $L^2(B)$ понимается класс функций, регулярных в B и таких, что $\iint_B |f|^2 dxdy < \infty$. Скалярное произведение и норма определяются как обычно:

$$(f, g) = \iint_B f\bar{g}\,dx\,dy, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Квадратурный процесс называется равномерно сходящимся в $L^2(B)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любой $f \in L^2(B)$ и $n > n_0$ будет

$$|E_n(f)| = \left|\int_{-1}^{1} f\,dx - Q_n(f)\right| \leq \varepsilon \|f\|.$$

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости квадратурного процесса в $L^2(B)$ есть $\lim_{n\to\infty} \|E_n\| = 0$.

Пусть ε_ρ есть эллипс с фокусами в $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и полуосями $a = (\rho + 1)/2\sqrt{\rho}$, $b = (\rho - 1)/2\sqrt{\rho}$ и $(\rho > 1)$ и

$$U_n(z) = (1 - z^2)^{-1/2} \sin[(n + 1) \arccos z].$$

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости квадратурного процесса в $L^2(\varepsilon_\rho)$ есть:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)\,|E_n(U_n)|^2/(\rho^{k+1} - \rho^{-k-1}) = 0.$$

Приведены две теоремы, дающие достаточные условия для сходимости интерполяционных квадратурных процессов. Обозначим $M_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}|$.

Теорема 3. Если $\lim_{n\to\infty} M_n n^{3/2} \rho^{-n/2} = 0$, то интерполяционный квадратурный процесс равномерно сходится в $L^2(\varepsilon_\rho)$.

Теорема 4. Процесс Ньютона-Котеса равномерно сходится в $L^2(\varepsilon_\rho)$, если $\rho > 4$.

Примечание референта. Наименьшая область, в которой регулярная функция f гарантирует сходимость интерполирования по равноотстоящим узлам, найдена Рунге (Z. Math. and phys., 1901, **46**). Она будет совпадать с наименьшей областью, гарантирующей сходимость процесса Ньютона-Котеса, как показал Р. О. Кузьмин (Изв. Ленинг. политехн. ин-т., 1931, **33**). Область, указанная в теореме 4 статьи, значительно превосходит ее по размерам. В. И. Крылов

4242. Вычисление молекулярных интегралов на вычислительной машине. Ротхан (Evaluation of molecular integrals by digital computer. Roothaan C. C.), J. Chem. Phys., 1958, **28**, № 5, 982—983 (англ.)

Общие замечания о вычислении на электронных вычислительных машинах интегралов, встречающихся в квантовой механике.

4243. Формула для аппроксимации определенного интеграла функции нормального распределения. Харт (A formula for the approximation of definite integrals of the normal distribution function. Hart Roger G.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 60, 265 (англ.)

Предлагается следующая приближенная формула:

$$\int_{X}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \approx \frac{e^{-X^2/2}}{X + 0{,}82^{-0{,}4X}} \quad (X \geq 0).$$

4244. Итерационный процесс для численного решения системы линейных уравнений. Гастинель (Procédé itératif pour la résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Gastinel Noël), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 18, 2571—2574 (франц.)

Излагается метод последовательных приближений для решения системы линейных уравнений, которая в векторной форме записывается как $Ax + b = 0$. Последовательные приближения берутся так, чтобы x_n было ортогональной проекцией x_{n-1} на плоскость, проходящую через точку x^*, являющуюся решением системы, и параллельную той грани некоторого полиэдра с центром симметрии в точке x^*, которая содержит x_{n-1}. Выводится следующая оценка:

$$\|x^* - x_n\| \leq \|x^* - x_0\| \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{n\lambda_1}}\right)^n,$$

где λ_1 и λ_n — наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы A^TA (A^T — матрица, транспонированная к матрице системы A). На электронной машине решались системы 4-го, 6-го, 8-го и 12-го порядков.

Предлагается провести экспериментальные вычисления с системами более высокого порядка. Л. М. Голубева

4245. Решение системы линейных уравнений. Реджини (Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Reggini Horacio C.), Cienc. y técn., 1958, **125**, № 628, 158—167 (исп., рез. англ.)

Описан модифицированный метод Гаусса для решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Из резюме автора

4246. Удобный способ решения линейных задач в области комплексных чисел. Шмидтмайер, Майер (Výhodné řešení lineárních problémů v oboru komplexních čísel. Schmidtmayer Josef, Mayer Daniel), Slaboproudý obzor, 1958, **19**, № 7, 472—477 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Описан метод, позволяющий избежать действий с комплексными числами при решении систем линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, при расчете матрицы, обратной к матрице с комплексными коэффициентами, и при расчете значения определителя с комплексными элементами. Сущность метода заключается в изображении комплексного числа при помощи квадратной матрицы. Этим изображением, например, переходит система с комплексными коэффициентами в матричное уравнение с действительными числами. Приведен пример числового решения линейной электрической цепи этим методом. Резюме авторов

4247. Применение некоторых понятий линейной алгебры в теории уравнительных вычислений. Крастинь А. Ф., Изв. высш. учебн. заведений. Геод. и аэрофотосъемка, 1958, № 2, 43—55

Затрагиваются вопросы об употребляемой символике и для примера излагается алгебраическая теория группового уравнивания условных измерений с оценкой точности уравновешенных элементов и их функций.

Из введения статьи

4248. Формулы для машинного вычисления обратных матриц. Мункельт (Formeln zur maschinellen Berechnung von Kehrmatrizen. Munkelt Karl), Dtsch. hydrogr. Z., 1956, **9**, № 3, 143—146 (нем.; рез. англ., франц.)

Для вычисления обратных матриц предлагаются формулы, которые в силу своей симметрии особенно пригодны для машинных вычислений. Резюме автора

4249. Метод расчета возмущения первого порядка конечной матрицы, с приложениями к теории молекулярных орбит. Браун, Бассетт (A method for calculating the first order perturbation of an eigenvector of a finite matrix, with applications to molecular-orbital theory. Brown R. D., Bassett I. M.), Proc. Phys. Soc., 1958, **71**, № 5, 724—732 (англ.)

Симметрическая матрица $H(t)$ зависит от параметра t. При $t = t_0$ H имеет простое собственное число λ с собственным вектором $c(|c| = 1)$. Тогда $\lambda = \lambda(t)$, $c = c(t)$ в окрестности t_0, $\lambda' = (H'c, c)$, $(H - \lambda I)c' = -(H' - \lambda' I)c$ (штрих означает дифференцирование); из этого условия c' определяется однозначно (хотя определитель системы равен нулю), если учесть, что $(c', c) = 0$.

Ставится вопрос об условиях применимости аналогичного метода расчета в случае кратного собственного числа λ с собственными векторами $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Вопреки утверждению Шредингера (Schrödinger E., Ann. phys., 1926, 80, 437), не всегда справедливо

$$(c'_i, c_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p), \qquad (1)$$

где $c_i(t)$ — собственные векторы возмущенной матрицы, $c_i = c_i(t_0)$ — их пределы при $t \to t_0$. Например, для матрицы $\left\| \begin{matrix} t & t^2 \\ t^2 & 0 \end{matrix} \right\|$ при $t_0 = 0$ (1) не имеет места. Если варьируются только диагональные члены, (1) заведомо справедливо.

В случае симметрии $H(t)$ относительно некоторых гиперплоскостей расчет может быть упрощен; в частности, это относится к расчету молекулярных орбит.

М. Л. Бродский

4250. Об обобщении метода Рута. Фам (Sur la généralisation d'un procédé de E. J. Routh. Pham Daniel Tinh Quat), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 13, 1958—1960 (франц.)

Метод Рута для определения остатка от деления двух полиномов становится неприменимым, если в процессе деления получаются два последовательных полинома, степени которых отличаются по крайней мере на две единицы. Автор обобщает метод Рута на случай произвольных полиномов с числовыми коэффициентами. Обобщение основано на многократном применении так называемого умножения накрест, введенного Рутом.

Приводится удобная схема для вычисления на практике по методу автора коэффициентов частного и остатка от деления двух полиномов. Г. И. Бирюк

4251. Практическое использование исключительного случая в способе Греффе. Хиршлебер (Praktische Auswertung von Ausnahmefällen beim Graeffeschen Verfahren. Hirschleber A.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 257—259 (нем.)

Исключительным автор называет случай, когда способ Лобачевского — Греффе применяется к многочленам, которые либо сами делятся без остатка на $z^s + a$ ($s = 3, 5, 7 \ldots$), либо после нескольких преобразований Лобачевского — Греффе приводят к многочлену, обладающему этим свойством.

Если коэффициенты многочлена удовлетворяют хотя бы приблизительно условиям, отвечающим исключительному случаю, то целесообразно сразу выделить соответствующий двучлен, так как при дальнейших преобразованиях Лобачевского — Греффе ошибки округлений могут привести к резкому нарушению этих условий. Приведен иллюстративный пример. А. П. Доморяд

4252. Вычисление действительных и комплексных корней многочленов любой степени. Хильшер (Die Berechnung der reellen und komplexen Wurzeln von Polynomen beliebig hohen Grades. Hilscher Kurt), Industriebetrieb, 1957, **5**, № 8, Messen — Steuern — Regeln, 97—99 (нем.)

Пусть при делении $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на $\varphi(x) = x^2 + Ax + B$ получается частное $q(x) = \sum_{k=2}^{n} b_k x^{k-2}$ и остаток $b_1 x + b_0$, а при делении $q(x)$ на $\varphi(x)$ — остаток $c_3 x + c_2$.

Пренебрегая при делении $f(x)$ на $x^2 + (A + \alpha)x + B + \beta$ членами второго и высших порядков относительно α и β и приравнивая коэффициенты остатка нулю, можно получить:

$$\alpha = \frac{b_0 c_3 - b_1 c_2}{d_1 c_3 - d_2 c_2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{d_1 b_1 - d_2 b_0}{d_1 c_3 - d_2 c_2},$$

где $d_2 = c_2 - Ac_3$ и $d_1 = -Bc_3$.

Приведен иллюстративный пример.

А. П. Доморяд

4253. Применение метода итерации к балке, покоящейся на рессорах. Чярхольм (A method of iteration applied to beams resting on springs. Kärrholm Gunnar. Chalmers Tekn. högskol. handl., 1958, № 199, 50 pp., ill.) (англ.)

4254. Относительные достоинства различных методов извлечения корней и решения уравнений (Relative merits of alternative methods of extracting roods and solving equations. Computer.), Electronic and Radio Engr, 1958, **35**, № 5, 173—175 (англ.)

Автор считает, что для нахождения корней уравнения $F(y) = 0$, не являющихся кратными, удобно пользоваться итерационной формулой Жордана (Jordan W. R, Math Tables and Other Aids Comput., 1951, **5**, 183)

$$y_2 = y_1 - \frac{2F(y_1)F'(y_1)}{2\{F'(y_1)\}^2 - F(y_1)F''(y_1)}$$

и приводит числовые примеры, на которых иллюстрирует результаты применения различных методов.

Я. М. Каждан

4255. О принципе математической итерации и ее применении к вычислению химического состояния равновесия. Лансner (On the mathematical iteration principle and its application to chemical equilibrium calculations. Lansner A. E.), Acta chem. scand., 1958, **12**, № 5, 1136—1142 (англ.)

Подробно обсуждается условие сходимости

$$|f'(x)| \leqslant c < 1$$

метода итераций $x_{n+1} = f(x_n)$ для решения уравнения $x = f(x)$. Приведены числовые примеры из области химических расчетов. В. К. Саульев

4256. Некоторые замечания о методе итерации. Фридман А. А. (III), Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1958, **15**, 45—54

Для приближенного нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ (f' и f'' в малой окрестности корня непрерывны или $f_1(x) = f_2(x)$ ($|b'_1| > |b'_2|$) предлагается следующий метод „улучшенной итерации“:

$$f_1(x_k) = f_2(x_{k-1}), \qquad \overline{x}_k = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{1 - m};$$

где $m = f'_2(x_{k-1})/f'_1(x_k)$.

Сравнивая данный метод с методом Ньютона, автор утверждает, что „результаты, получаемые обоими методами, будут тождественны, когда $b_1(x)$ — линейная функция; новый метод безусловно сильнее в ряде частных случаев, как, например, если $f_1(x)$ нелинейна, $f''_1(x)$ постоянного знака, а $f_2(x)$ линейная" в окрестности корня.

Приведенный числовой пример показывает, что двукратное применение процесса (1) эквивалентно шести обычным итерациям или трем итерациям по методу Ньютона. Рассматриваются различные видоизменения метода (1) (в частности, применение m по формуле $m = f'_2(x_k)/f'_1(x_k)$ или многократное применение одного и того же m) и обобщение его на системы уравнений.

В. К. Саульев

4257. Вычисление логарифмов с помощью повторных квадратов. Браун (Computation of common logarithms by repeated squarings. Brown O. E.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 2, 118—120 (англ.)

Автор представляет десятичный логарифм числа в виде двоичной дроби. Эта идея не является новой (см., например., РЖМат). Однако заслугой автора является весьма элементарная реализация этой идеи, вполне доступная пониманию учащихся средней школы; базируется она на следующей теореме: Пусть $N_1, N_2, \ldots$ и $a_1, a_2, \ldots$ — две последовательности неотрицательных чисел, $1 \leqslant N_i < 10$, $a_l = 0$ или 1; пусть из $N_i^2 < 10$ следует, что $N_{i+1} = N_i^2$, $a_i = 0$, а из $N_i^2 \geqslant 10$ следует, что $N_{i+1} = N_i^2/10$, $a_i = 1$. Тогда $\log_{10} N_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots$

Этот метод легко поддается программированию на современных счетных машинах; приводится соответствующая блок-схема. Законченной оценки точности метода нет.

З. Х. Рафальсон

4258. Практическое применение методов пространственной экстраполяции. Лап (Praktische toepassingen van driedimensionale extrapolatie. Lap A. J. W.), Schip en werf, 1958, **25**, № 14, 422—427 (гол.)

4259. Обоснование и построение общей теории висячих мостов с помощью теории матриц. Эгервари (A függőhidak általános elméletének megalapozása és felépítése mátrixszazámítás segítségével. Egerváry Jenő), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1957, **2**, № 1-2, 3—32 (венг.; рез. русск., нем.)

Аппроксимируя производные соответствующими разностными отношениями и непрерывно распределенные нагрузки — концентрическими силами, автор строит теорию висячих мостов с помощью теории матриц. В качестве основного уравнения цепных мостов получается матричное уравнение, в котором неизвестным является матрица прогибания укрепляющей опоры. Для решения этого матричного уравнения необходимо лишь обращение матриц типа

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & & ba \end{pmatrix}$$

В. К. Саульев

4260. О некоторых методах решения проблем при помощи размерного анализа. Столбов Б. М., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, **33—34**, 81—90

При помощи „размерного анализа" находится вид функции φ, для которой уравнение

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые физические величины) получается из опыта. Решение подобных задач сводится к решению систем уравнений (в частности, по терминологии автора, „неполных" и „сверхполных") первой степени. Автор рассматривает вопросы компактной записи таких систем уравнений. Имеются примеры.

В. К. Саульев

4261. Об одном методе линеаризации дифференциальных уравнений типа маятника. Рыбарский (Über eine gemisse Linearisationsmethode der Differentialgleichungen vom Pendeltypus. Rybarski A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 3, 175—179, XIV (нем.; рез. русск.)

Дан метод построения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, являющегося в некотором смысле наилучшим приближением данного дифференциального уравнения типа маятника. Этот метод основывается на следующей теореме „о сравнении": Если функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ удовлетворяют для $0 \leqslant t \leqslant T$ уравнениям $\ddot{y}_1 = f_1(y_1(t))$, $\ddot{y}_2 = f_2(y_2(t))$ и если они равны друг другу в точках $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = T$, тогда имеет место неравенство

$$\| y_1 - y_2 \| \leqslant \frac{w}{w^2 - N} \left\| f_2(y_1(t)) - f_1(y_1(t)) \right\|,$$

где

$$N = -\inf_t \frac{f_2(y_1(t)) - f_2(y_2(t))}{y_1(t) - y_2(t)}, \quad w = \frac{\pi}{\max_k |t_{k+1} - t_k|},$$

причем предполагается, что $0 \leqslant N < w^2$; $y_1(t)$, $y_2(t) \in C_2(0,T)$; $f_2(y_1(t)) \in C(0,T)$, быть может, за исключением точек t_k.

Резюме автора

4262. Дробное число раз итерированная показательная функция на вещественной оси. Шёбе (Gebrochen-iterierte Exponentialfunktion im Reellen. Schöbe Waldemar), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 5-6, 190—194 (нем.)

Предположим, что построена возрастающая непрерывная функция $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющая функциональному уравнению Абеля

$$F(e^x) - F(x) = 1. \tag{1}$$

Тогда, если $e^s(x)$ есть s-кратная итерация e^x, то

$$F(e^s(x)) - F(x) = s. \tag{2}$$

Для нецелых значений s можно тогда принять (2) за определение $e^s(x)$ (однозначное ввиду свойств $F(x)$).

Обозначим $L(x) = \ln(1 + x)$. Пусть $L^m(x)$ — m-кратная итерация $L(x)$. Тогда функция

$$F(x) = C_0 + \lim_{n \to \infty} (n - {}^1/_3 \ln n + {}^2/_{L^{2n}}[e^n(x)])$$

обладает указанными выше свойствами. Константа C_0 выбирается так, что $F(e) = 1$; тогда в силу (1)

$$-2 < F(x) < \infty \ (-\infty < x < \infty).$$

Выбранная функция $F(x)$ не единственна, ибо например, $F_1(x) = F(x) + G[F(x)]$ тоже удовлетворяет уравнению (1), если $G(z)$ — произвольная функция с периодом 1. В классе решений функционального уравнения Абеля (1) функция $F(x)$, построенная в работе, удовлетворяет нечетко сформулированному условию: „быть как можно менее произвольной".

Приведены методы вычисления $F(x)$ и обратной к ней функции, составлена таблица $x = F(y)$, $x = -1(0{,}05)0, y$, с точностью до 10^{-5}.

Определением $e^s(x)$ при $s = {}^1/_2$ занимались Кнезер (Kneser H., J. reine und angew. Math., 1949, **187**, 56—57), Коллатц (РЖМат, 1956, 1685).

М. Л. Бродский

4263. О методах ускорения сходимости рядов. Сибуя Масааки, Нихон буцури гаккайси, Buturi, 1958, **13**, № 4, 243—247 (японск.)

4264. О локализации собственных частот разветвленных электрических цепей. Пародн (Sur la localisation des fréquences propres des réseaux électriques maillés. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 14, 1903—1905 (франц.)

Приведено уравнение для определения собственных частот разветвленной электрической цепи, содержащей омические, емкостные и индуктивные сопротивления. Корни этого уравнения расположены, как известно, в левой части комплексной полуплоскости. Автором выведено несколько оценок для уточнения положения корней. Р. Д. Бачелис

4265. Можно ли правильно рассчитать погашение долгов в промышленности? Олланье (Peut-on calculer rationnellement l'amortissement industriel? Ollagnier P.), Ann. mines, 1958, mars, 161—172 (франц.)

Автор пытается установить, в чем состоит некорректность классического правила погашения долгов равными аннуитетами (взносами с уплатой долга и процентов). Он показывает, каким образом можно применить математические законы к износу материалов. Построенные автором номограммы позволяют по известной долговечности оборудования и таксе процентов составить более рациональную формулу погашения долгов, чем классическую. Р. Д. Бачелис

4266. О быстром и общем способе составления формул для утечки и о введении краковского квадратного корня в эту теорию. Калвар (Note sur un procédé d'établissement rapide et général des formules de pertes et sur l'introduction de la racine cracovienne dans cette théorie. Calvaer A.), Revue E, 1958, **2**, № 6, 167—179 (франц.; рез. флам.)

Автор отмечает, что существующие общие способы определения утечки электричества в цепях высокого напряжения (эффект Жюля) весьма трудоемки. Предложен новый метод, простой и легко реализуемый на машине, основанный на матричных преобразованиях. При этом изложена теория так называемого краковского квадратного корня. Приведен конкретный пример расчета цепи. Р. Д. Бачелис

4267. Об оценке погрешности приближенной теории неоднородных линий. Орлов С. И., Радиотехника, 1958, **13**, № 10, 9—13

Получены простые выражения для оценки предельной погрешности расчета коэффициента отражения на входе неоднородной линии без потерь. Из резюме автора

4268. Приближенные формулы для определения центра тяжести. Эберг (Approximativa tyngdpunktsformler. Öberg Tore), Elementa, 1958, **41**, № 2, 128—130 (шведск.)

4269. Исследование разложений в тригонометрические ряды выражений вида $(1-2h\cos z+h^2)^{-n/2}$, в которых n — нечетное число. Баженов Г. М., Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР, 1955, **6**, № 1, 8—24

Устанавливаются тесные границы для величин коэффициентов рассматриваемых тригонометрических рядов, предлагается рациональная схема для вычисления этих коэффициентов и оценивается верхняя граница остаточного члена рассматриваемых рядов. Кроме того, результаты исследования применены к одной конкретной задаче небесной механики. Резюме автора

4270. Определение параметров функции $y=a+bf(x,\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ на основе метода наименьших квадратов. Применение к случаю экспоненциальной функции. Домманже (Détermination des paramètres de la fonction: $y=a+bf(x,\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ sur la base du principe des moindres carrés. Application au cas de la fonction exponentielle. Dommanget J.), Publs scient. et techn. Ministère air, 1955, N. T., № 52, 9—28 (франц.)

Рассматривается приближение по методу наименьших квадратов функций вида

$$y=a+bf(x,\alpha,\beta,\gamma,\ldots) \qquad (1)$$

Все рассуждения проводятся в основном относительно упрощенной функции вида

$$y=a+bf(x,\alpha). \qquad (2)$$

Определение a,b и α по методу наименьших квадратов приводит к системе трех нормальных уравнений. Условие совместности этой системы дает уравнение для определения α. После определения α параметры a и b легко находятся из каких-нибудь двух уравнений системы. На практике предлагается сделать замену $y_i=Y_i+\frac{1}{n}\sum y_i$ (n — число рассматриваемых точек), упрощающую систему, так как $\sum Y_i=0$. При этом условие совместности системы нормальных уравнений сводится к определению экстремума функции

$$F^2{}_y(\alpha)=\frac{R^2}{nQ-P^2}=\text{extremum}, \qquad (3)$$

где $P=\sum f(x_i,\alpha)$, $Q=\sum f^2(x_i,\alpha)$, $R=\sum Y_i f(x_i,\alpha)$.

Показано, что эта функция положительна и что речь идет об определении ее максимума. Коэффициенты $A=a-\frac{1}{n}\sum y_i$ и b определяются по формулам

$$A=-PF^2{}_y/R,\quad b=nF^2{}_y/R, \qquad (4)$$

где $F^2{}_y=\max F^2{}_y(\alpha)$.

В случае функции (1) предыдущие рассуждения обобщаются автоматически: функция $\frac{R^2}{nQ-P^2}$ должна давать максимум для каждого из параметров $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ отдельно. Коэффициенты A и b в этом случае определяются снова по формулам (4).

Получено соотношение, связывающее средние квадратические отклонения E_y с экстремумом функции $F^2{}_y(\alpha)$: $E^2{}_y=\sigma^2{}_y-F^2{}_y$. Здесь σ_y — дисперсия y_i.

Рассматриваются отдельно частные случаи, когда один из параметров a,b или параметры $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ известны. Если известны $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, то a, b определяются либо по (4), либо по методу наименьших квадратов, как коэффициенты прямой, если положить $f(x_i,\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=X_i$. В случае, когда известно a или b, параметры $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ находятся из условия совместности, а параметры a или b — из одного из уравнений системы. Если известны оба параметра a и b, то α определяется из условия $F^2{}_y(\alpha)=2R-Q=\max$, и в общем случае $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ определяются из условия $F^2{}_y(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=\max$.

Дается применение метода к частному случаю экспоненциальной функции. При этом, если абсциссы заданы точно, а ординаты — наблюдениями, уравнение (1) имеет вид $y=a+be^{\alpha x}$, где a,b и α определяются по формулам (3), (4). Если же ординаты известны точно, а абсциссы получены наблюдениями, то (1) приводится к виду $x=\beta+\gamma\log(y-a)$, $\beta=-\frac{1}{\alpha}\log b$, $\gamma=\frac{1}{\alpha}$, где β,γ и a (а следовательно, b и α) определяются по формулам

$$F^2_x(a)=\frac{R^2}{nQ-P^2}=\max,\quad B=-\frac{F^2_x P}{R},$$

$$\gamma=\frac{nF^2_x}{R},\quad \beta=B+\frac{1}{n}\sum x_i.$$

Приводятся формулы для вычисления ошибок в коэффициентах в случае экспоненциальной функции. Рассматривается числовой пример.

В заключение приводится список некоторых уравнений, которые могут быть преобразованы к уравнению вида (2). Г. И. Бирюк

4271. По поводу приближенных формул. Данги (A propos de formules approchées. Danguy L.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 150—151 (франц.)

Указан способ составления различных приближенных формул. Рассматривается функция $f(x, \alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, разложимая на данном интервале в равномерно сходящийся ряд по степеням x или какой-либо функции x. Параметры подбираются из условия обращения в нуль нескольких членов ряда. Если последний при этом сходится достаточно быстро, то ограничиваются одним или несколькими членами, не обратившимися в нуль. Так получена, например, формула

$$(2 + \cos x)(2 + \operatorname{ch} x) \cong 9.$$

При $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ ошибка не превышает 10^{-4}.

Р. Д. Бачелис

4272. О приближении функций в свете новой вычислительной техники. Постоева Н. И., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1958, вып. 35, 222—230

Краткий обзор статей (РЖМат, 1956, 6882; 1958, 9138; 1959, 889). В. К. Саульев

4273. Графическое определение интегралов Стилтьеса. Пленво (Calcul graphique des intégrales de Stieltjes. Plainevaux J. E.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 3, 217—229 (франц.)

Изложенный метод заключается в преобразовании графика подынтегральной функции, с тем, чтобы площадь, ограниченная преобразованной кривой, оказалась равна искомому интегралу. Метод легко применим и к разрывным функциям. Приведены примеры: вычисление моментов инерции для плоской фигуры, определение коэффициентов Фурье, коэффициентов для разложения в ряд по полиномам Лежандра, вычисление площади на карте в проекции Меркатора, интегрирование произведения двух функций. Р. Д. Бачелис

4274. Об одном графическом способе решения уравнений 3-й степени. Бельтюков Б. А., Уч. зап. Благовещ. гос. пед. ин-та, 1956, **7**, 45—50

Действительные корни уравнения 3-й степени, предварительно приведенного к виду $x^3 - px - q = 0$, рекомендуется находить известным способом пересечения параболы $y_1 = x^3$ с прямою $y_2 = px + q$.

В случае одного действительного корня x_1 и пары комплексно-сопряженных корней $x_{2,3} = a \pm b \cdot i$, первый определяется указанным способом; для нахождения же x_2 и x_3 строится прямоугольный треугольник OPQ с одним катетом $OP = \frac{1}{2}x_1 = -a$ и гипотенузой $PQ = \sqrt{q/x_1}$. При этом второй катет $OQ = b$, ибо $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = q/x_1$ и $x_1(OP^2 + OQ^2) = q = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, а $x_1 \cdot 2OP = x_1 + 2a = 0 = x_1 + x_2 + x_3$ в соответствии с формулами Виета.

Если парабола $y_1 = x^3$ вычерчивается на миллиметровке, а прямые $y_2 = px + q$ — на кальке, то один график параболы может служить для решения разных уравнений. Рассмотрен пример. А. Б. Штыкан

4275. Учебное пособие для графического решения уравнений. Глушков (Наочний посібник для графічного розв'язування рівнянь. Глушков П. М. Наук. зап. Черніг. держ. пед. ін-т, 1958, **4**, № 1, 21 стор., іл) (укр.)

4276. Приближенное представление номограммы из выравненных точек семейства кривых, полученного опытным путем. Урселай (Representación aproximada, por un nomograma de alineación, de un ábaco obtenido empíricamente. Urcelay José María), Rev. cienc. apl., 1957, **11**, № 5, 419—428 (исп.)

Зависимость из семейства кривых, полученных из опыта представляется номограммой с двумя параллельными и одной криволинейной шкалами. Э. Апарисио

4277. Приближенное представление номограммы из выравненных точек семейства кривых, полученного опытным путем. II. Урселай (Representación aproximada por un nomograma de alineación de un abaco obtenido empíricamente. II. Urcelay José María), Rev. cienc. apl., 1957, **11**, № 4, 306—319 (исп.)

Изучается случай трех прямолинейных шкал. Получается абак из трех семейств прямых путем проективного преобразования номограммы из выравненных точек с тремя параллельными шкалами. Э. Апарисио

4278. Некоторые виды локальных номограмм. Сморкачев Е. Т., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 880—883

Рассматриваются вопросы о номографировании функции $z = f(x, y)$ с точностью до малых 6-го порядка номограммой с одной прямолинейной шкалой и о номографировании с точностью до малых 6-го порядка номограммой Кларка.

4279. Номограммы для кубических решеток. Черногорский (Nomogramy pro kubické mřížky. Černohorský Martin), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1958, **30**, № 4, 131—153 (чешск.; рез. русск., англ.)

Приведены номограммы, дающие расположение дифракционных линий на рентгенограммах. Они охватывают область кубических решеток для $N = h^2 + k^2 + l^2 \leqslant 144$. Из резюме автора

4280. Номографический способ графического дифференцирования. Еремеев Н. В., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 6, 3—6

Предлагается применять транспарантную номограмму для построения графика производной функции. На неподвижной плоскости строится график самой функции, на транспаранте—совокупность показательных функций, для которых $|dy/dx| = |y(x)|$. Между плоскостями осуществляется контакт касания. С. М. Головина

4281. Графо-численный метод построения номограмм из выравненных точек и номограмм из выравненных точек с бинарными полями. Пал (Grafikus-numerikus módszer pontsoros és pontmezős nomogramok tervezésére. Pál Sándor), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 223—272 (венг.; рез. русск., нем.)

Даются типовые номограммы как основа для построения различных номограмм. При помощи проективного преобразования достигаются условия для возможной точности работы с номограммой. Для аналитического определения проективного преобразования используется метод Соро. В виде иллюстрации автор строит номограмму неполного уравнения 3-й степени.

В приложении к работе (автор Я. Ципсер) определяются свойства выпуклой оболочки точечного множества. С. М. Головина

4282. Номографическое представление функций комплексного переменного. Рёйттер (Nomographische Darstellung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Reutter F.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 258—260 (нем.)

Для аналитической функции $w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ строится номограмма, состоящая из двух прямолинейных шкал для зависимых переменных u и v и двух семейств кривых для независимых переменных x и y. Выводятся достаточные и необходимые условия номографического представления функции w. С. М. Головина

4283. **О единственности номографических представлений уравнений. Николаев П. В.**, Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 1, 31—34

Доказана теорема: „Если аналитическое невырожденное уравнение

$$F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; \ t_2, \tau_2; \ t_3, \tau_3) = 0 \qquad (1)$$

допускает непроективные анаморфозы вида

$$\Phi(t, \tau) = \psi(t, \tau) F(t, \tau) = | f_{i1}(t_i, \tau_i); \ f_{i2}(t_i, \tau_i); \ f_{i3}(t_i, \tau_i) |,$$

то все бинарные поля (t_i, τ_i) вырождаются в бинарные шкалы на алгебраических кривых; сумма порядков различных кривых в каждой анаморфозе равна трем. Если такое уравнение алгебраизуемо хотя бы по одной из переменных, то оно подобно уравнению третьего N-порядка и, следовательно, допускает анаморфозы всех трех жанров; в его номограммах третьего жанра общим базисом служит уникурсальная кривая третьего порядка. Если же уравнение (1) не алгебраизуемо, то оно допускает лишь номограммы третьего жанра с общим базисом на эллиптической кривой третьего порядка". В. К. Саульев

См. также: 4021.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агаев Г. Н. 3825, 3935
Агранович М. С. 3829
Айзенштат А. Я. 3570, 3571
Александров А. Д. 3796
Альанчиһ С. 3912
Арнольд В. И. 3420
Артюхов М. М. 3457
Арутюнян Г. А. 3910
Ахиезер Н. И. 3856
Ацудзии 3617, 3618

Б

Багодзін С. 3379
Баженов Г. М. 4269
Базилевич И. Е. 3700
Бакельман И. Я. 3797, 4186, 4195
Барбашин Е. А. 3864
Белоусов В. Д. 3572
Белый Б. Н. 3402
Бельтюков Б. А. 4233, 4274
Берман С. Д. 3529
Бернштейн А. М. 3402
Бесов О. В. 3807
Беспамятных Н. Д. 3381
Боголюбов Н. Н. 3786 К
Бокштейн М. 3632
Болотин А. С. 3830
Больсен Е. М. 3388
Бондаренко П. С. 4219
Брадистилов Г. 3770, 3771
Будак Б. М. 4212
Буданцев П. А. 3398, 3399
Буренин Н. Д. 4073
Бурнат М. 3840
Бычков В. П. 3385

В

Вайнберг М. М. 3869
Вайсборд Э. М. 3789 Д
Ван Хун-шэн 3707
Васильев В. В. 3859
Вахания Н. Н. 3848 Д
Вашарин А. А. 3664
Виленкин Н. Я. (Ред.) 3667 К
Виноградов А. 3476
Воронцов Г. В. 4232
Вострокнутов С. П. 4080
Вулих Б. З. 3972

Г

Габиб-заде А. Ш. 3712
Галонен Л. М. 3794
Ганин М. П. 3711
Гапошкин В. Ф. 3668 Д
Гасанов К. Г. 3935
Гёц А. 3974
Глушков П. М. 4275
Голуб А. М. 3397
Гольдина Н. П. 3548
Горбунов А. Д. 4212
Гохман Э. Х. 3666 К
Граціанська Л. М. 3387
Гробов В. А. 3776
Гуань Чжао-чжи 4234
Гудиев А. Х. 3575
Гун Шэн 4173
Гу Чао-хао 4171

Д

Давыдова В. К. 3533
Данилюк П. М. 4086
Делоне Б. 3476
Дёч Г. 3926 К, 3927 К
Дицман А. П. 3546
Долапчиев Бл. 3424 К
Драгилев М. М. 3692
Дробот С. 3930
Дуань И-ши 4163
Дундученко Л. Е. 3708
Дюбюк П. Е. 3530

Е

Егорова И. А. 3783 К
Еремеев Н. В. 4280
Еругин А. 3887

Ж

Журбас М. А. 3404

З

Загайнов Л. С. 4216
Загорський Т. Я. 3836
Заикина Н. Г. 3462, 3463
Затворников С. В. 4143
Зверев А. В. 3914 К
Золотарев Г. Н. 3839, 3846 Д
Зуховицький С. І. 3947

И

Иванов С. И. 4221
Ильин В. А. 3811
Ильяшенко А. А. 4013
Исакова Е. К. 3819
Ицкович И. А. 3888

К

Каменский Г. А. 3760
Каменский Н. П. 4138
Карамышкин В. В. 3757
Кац Г. И. 3611
Качмаж С. 3667 К
Кемхадзе Ш. С. 3510 К
Кислицын С. Г. 3765
Кобылин А. И. 4098
Когония П. Г. 3477
Коробков С. А. 4091
Костомаров Д. П. 3773
Костюк А. І. 4130, 4131
Кошелев А. И. 3847 Д
Крамар Ф. Д. 3383
Крастинь А. Ф. 4247
Кузмак Г. Е. 3747, 3772
Куклес И. С. 3766
Куницкая Е. С. 3894 К
Кушков Н. Н. 3788 Д

Л

Ладыженская О. А. 3798, 3817
Лангенбах А. 3868
Ландис Е. М. 3768
Ландо Ю. К. 3858, 3862
Лапин А. И. 3580
Лебедев Н. Н. 3934
Леонтьев А. Ф. 3690
Лепин А. Я. 3656
Либерман Л. Х. 3865
Лившин Г. Л. 3830
Линь Цюнь 4230
Ломадзе Г. А. 3454
Лопухин В. М. 3851
Лу Вэнь 4234
Лузин Н. Н. 3900 К
Лю Ли-цюань 3702
Лю Цзюнь-сянь 3705
Ляпин Е. С. 3563

М

Майоров И. В. 4217
Майстров Л. Е. 3899 К
Макарова Н. М. 4128, 4129
Марков А. А. 3427
Мацусака 3675
Мачульский А. А. 3547
Мецхваришвили Я. Г. 3723
Микеладзе Ш. Е. 4239
Микусинский Я. 3930
Минков Н. 3367
Миронов В. Т. 3722
Митропольский Ю. А. 3786 К
Мищенко Е. Ф. 3790 Д
Мрувка С. 3615
Мысовских И. П. 4231
Мышкис А. Д. 3656

Н

Наджафов К. А. 3866
Намазов Г. К. 3825
Несис Е. И. 3514
Никитин Б. Д. 3898 К
Николаев П. В. 4283
Никольский С. М. 3806

О

Оловянишников В. М. 3657
Орлов С. И. 4267

П

Петров А. З. 4143
Петров П. И. 4141, 4146
Петровский И. Г. 3768
Пикус А. Л. 4117
Плоткин Б. И. 3545
Понизовский И. С. 3520
Постников А. Г. 3471, 3472, 3994
Постоева Н. И. 4272
Прилепко А. И. 3688
Пулькин С. П. 3826
Пятецкий И. И. 3472

Р

Разумихин Б. С. 3759
Райков Д. А. 3937
Расулов М. Л. 3761
Реймерс Э. Г. 3915 Д
Розет Т. А. 3958

Розовский М. И. 3861
Рыбин П. П. 3855
Рябов Ю. А. 3843 К

С

Салахитдинов М. 3792, 3845 Д
Салимов Р. Б. 3714
Самедова С. А. 3860
Саргсян И. С. 3808, 3809
Сарымсаков Т. А. 4014
Се Хуэй-чунь 3699
Сибуя М. 4263
Сикорский Р. 3442
Скальская И. П. 3934
Сморкачев Е. Т. 4278
Соболев С. Л. 3791
Соломонов М. С. 3362
Столбов Б. М. 4260
Столяр А. А. 3403
Студнев Ю. П. 3923
Суворов Г. Д. 3688
Ся До-шин 3949

Т

Темкин А. Г. 3863
Теуш В. Л. 3426 К
Топоногов В. А. 4147
Трохимчук Ю. Ю. 3696
Турковский В. А. 3871

У

Уфельман А. Ф. 3932
У Цун-синь 3651

Ф

Фаге М. К. 3795
Федоров Ф. И. 4183
Фещенко С. Ф. 3755
Филиппов Б. В. 3713
Филиппович Е. И. 3724
Флексер М. Ш. 3813
Фридман А. А. (III) 4256
Фукс Д. 3476

Х

Хавин В. П. 3706
Хань Цзянь-шу 3651
Хион Я. В. 3597
Холодовский Е. П. 3600
Хуан Чжэн-чжун 4142
Худавердиев К. И. 3935
Ху Хэ-шэн 4152

Ц

Цзян Цзэ-пей 4020
Цветков Ц. 3424 К

Ч

Чандиров Г. И. 3849 Д
Черский Ю. И. 3850
Чертков И. Я. 3397
Тетковић С. 3658
Чибрикова Л. И. 3827
Чобанов Ив. 3424 К
Чувиков Н. Т. 4135 К
Чунихин С. А. 3531

Ш

Шапиро А. П. 3527 Д
Шаркова Н. В. 4213
Ширшов А. И. 3593
Шкіль М. І. 3755
Шмидт В. 3710
Штейнгауз Г. 3667 К
Штелик В. Н. 3787 Д
Шутов Э. Г. 3562, 3564

Э

Эйдельман С. Д. 3837
Энгельсон Я. Л. 3869

Ю

Юрченко А. К. 3708

Я

Яглом И. М. 4155 4206 К
Якубов С. Я. 3935

A

Aczél J. 3893
Adad H. 4097
Adhikari B. P. 4000
Adler G. 3824
Agarwala S. P. 4040
Agnew R. P. 3993
Aharoni J. 3978
Aizerman M. A. 3780
Akutowicz E. J. 3922
Alaci V. 3814
Albada P. J. van 3596
Albuquerque A. T. 3895 K
Albuquerque L. M. de 3948, 3957
Al—Dhahir M. W. 4157
Alexiewicz A. 3943
Alfieri L. 4083
Algunaid A. R. 4126
Allen D. N. de G. 4222
Amitsur S. A. 3592
Ammann A. 4170
Anderson O. 3372 Ж
Aragnol A. 3640
Archbold J. W. 3511 K
Arghiriade E. 4140
Armitage P. 4063
Arsove M. G. 3693, 3694
Atsuji M. 3617, 3618
Auslander L. 3589
Auslander M. 3594
Avery A. J. L. 4092

B

Baer R. 3544, 3556
Bagemihl F. 3676
Bager A. 4105
Bakos T. 3406
Barra J.—R. 3996
Bassett I. M. 4249
Basu D. 3986
Bateman P. T. 3466
Battaglia A. 3489
Beesack P. R. 3886
Behmann H. 3443
Benard A. 4056—4058
Bennett J. 3980
Benz W. 4184
Bernays P. 3447
Berndt G. D. 4041
Bertotti B. 3997
Besicovitch A. S. 4180
Bessaga C. 3944
Beth E. W. 3433, 4070
Beurling A. 3941
Bianchi L. 3391
Bizadse A. W. 3844 K
Blackburn N. 3542
Blackwell D. 4015
Blanchard R. 4106, 4111
Blanchfield R. C. 3599
Blaschke W. 4084
Blij F. van der 3908
Bliss C. I. 4028
Boas R. P., Jr 3716
Bockstein M. 3633, 3634
Boltjanski W. G. 4206 K
Bonnor W. B. 4165
Bosanquet L. S. 3389
Bošek B. 3931
Boyadjiev G. 3770
Bradistilov G. 3770, 3771
Brass W. 4032
Brauner H. 4132, 4133
Bredon G. E. 3644
Brisac R. 4188
Brooks S. H. 4052
Browder F. 3812
Brown O. E. 4257
Brown R. D. 4249
Buchdahl H. A. 4161, 4164
Buchner P. 3984
Büke A. 3588
Burgers W. A. 3876
Burkill H. 3660
Buschman R. G. 3920
Busemann H. 4178
Butzer P. L. 3966

C

Calabi E. 4174
Calero G. 3624
Calvaer A. 4266
Caracosta G. 3659
Carlitz L. 3916
Černohorský M. 4279
Cesari L. 3663, 4193
Cestari R. 3488
Chako N. 3929
Chakraborty P. N. 4040
Chaundy T. W. 3890
Cherubino S. 3515
Choksi J. R. 3973
Choquet G. 3605
Chow C. K. 4018
Chowla S. 3481
Christian U. 3743, 3744
Chung K. L. 4010
Cîmpan F. 3380
Cinquini S. 3793
Cinquini Cibrario M. 3793
Clifford A. H. 3569
Coales J. F. 3998
Cohn P. M. 3524 K
Comment P. 3484
Conkling R. M. 3751
Conner P. E. 3635, 3646
Conte L. 3376
Conti R. 3748, 3749
Copi I. M. 3434
Copson E. T. 3815
Cordes H. O. 3804
Corduneanu C. 3767, 3778
Corput J. G. van der 3465
Cotiu A. 4235
Court N. A. 4095
Couty R. 4149
Crozes Y. 3366
Cuesta N. 3439
Čulík K. 3491
Curtis M. L. 3639

D

Dal Soglio L. 3636
Danguy L. 4271
Davidson W. 4081
Davis P. 4241
DeGroot M. H. 4065
Deheuvels R. 3650
Delange H. 3467, 3468, 3884
Dennis S. C. R. 4222
Deny J. 3941
Dieudonné J. 3552, 3555
Dixmier J. 3964, 3965
Dlab V. 3536
Doetsch G. 3926 K
Dommanget J. 4270
Doob J. L. 3799
Doss R. 3659
Dragos L. 3857
Dubnow J. S. 4079 K
Dugué D. 3665 K
Dungen F. H. van den 4223
Duparc H. J. A. 3501
Duval 3395
Dvoretzky A. 3992
Dwass M. 3987, 4025
Dyson F. J. 3928

E

Edrei A. 3721
Edwards R. E. 3936, 3953
Eeden C. van 4056—4058
Efimow N. W. 4205 K
Egerváry J. 3513, 4259
Eggleston H. G. 4196
Ehrenfeucht A. 3438
Ehrhart E. 3492, 3493
Ehrmann H. 3769
Eiss N. S. 3764
Elandt R. 4060
Elliott H. M. 3416
Emersleben O. 3460
Erdös J. 3521, 3537
Erdös P. 3490, 3669

F

Facciotti G. 4122
Faulkner F. D. 3870
Fearn W. J. 4092
Fehr H. 4075
Fiedler M. 3516
FitzPatrick P. J. 3382
Flett T. M. 3678, 3679
Foias C. 3960
Foster F. G. 4011
Fraissé R. 3450 K
Frame J. S. 3499
Freud G. 3805, 3823
Freudenthal H. 4072
Friedman A. 3820, 3832, 3838

Fuchs A. 3995
Fung Kang 3925

G

Gantmacher F. R. 3780
Garrett J. R. 3577
Gastinel N. 4244
Geister K. 3503
Gentile G. 3504
Gentry F. C. 4119
Gesztelyi E. 3883
Ghurye S. G. 4064
Gillman L. 3590
Ginsburg S. 3631
Gjeddebaek N. F. 4029
Glass R. C. 3422 K
Golab S. 4137
Golbderg M. 4085
Goldman A. J. 4204
Coluběv V. A. 3495
Goormaghtigh R. 4113
Gopalakrishna J. 3905
Grabiel F. 3946
Gran Olsson R. 4090
Grauert H. 4175
Greenspan D. 4218
Gregor J. 3752
Griffith J. L. 3924
Grimshaw M. E. 3390
Groot J. de 3619
Grosswald E. 3466
Grzegorczyk A. 3428
Guelfi J. 3421 K
Guggenheimer H. 3448
Gumbel E. J. 4027
Gundlach K.—B. 3742
Günter N. M. 3842 K

H

Hadwiger H. 4207 K
Hajnal A. 3671
Halberstam H. 3467
Halmos P. R. 3525 K
Hanai S. 3627
Hannan E. J. 4051
Hano J. 4166
Hanxleden E. von 3425 K
Harish—Chandra 3550
Hart R. G. 4243
Hartman P. 3775
Hartman S. 3553
Hartung M. L. 3407
Havel V. 3595
Heading J. 3526 K
Heider L. J. 3971
Heins M. 3729
Hellwig G. 3833
Henriksen M. 4189
Hentze R. 3425 K
Hilscher K. 4252
Hintikka K. 3436
Hiraguchi T. 3673
Hirschleber A. 4251
Hirzebruch F. 3649 K
Hodges J. H. 3485, 3519
Hofmann L. 4125
Hofmann O. 4077
Hooke R. 4021
Hopf H. 3638
Hori S. 3565
Hosszú M. 3680, 3889
Howard P. R. 3933
Hsu L. C. 4240
Huckemann F. 3737
Hu Hoo-sung 4152
Hulanicki A. 3553
Huppert B. 3532
Hwang Cheng-chung 4142

I

Içen O. S. 3473
Ilieff L. 3683
Iséki K. 3612, 3613, 3614, 3630
Ishii T. 3604
Ivan J. 3558

J

Jaakko J. 3436
Jacobson N. 3508 K
Jacoby R. 3554
Jaffard P. 3579
Jaglom I. M. 4155, 4206 K
Janatka J. 4211
Janowski W. 3703
Jauch J. M. 3976
Jones A. M. 3417
Jones A. W. 3411
Jones B. W. 3574
Jones F. B. 3616
Jones P. S. 3415
Jowett G. H. 4055
Jurkat W. B. 3907

K

Kacner A. 4229
Kahn H. 4238
Kalin R. 3419
Kalmár L. 3430, 3671
Karplus W. J. 4224
Kärrholm G. 4253
Karzel H. 4121
Kasahara S. 3606, 3607
Kashiwabara S. 4168
Kawata T. 4004
Kennedy P. B. 3677, 3911
Kiefer J. 4059
Kimme E. G. 3999
Kimura N. 3567, 3568
Kirsch A. 3401, 3528
Kitagawa T. 4044
Klapetek F. 4220
Kleene S. C. 3429
Knapowski S. 3456
Kobayashi S. 3641
Kober H. 3653, 3880
Kohls C. W. 3591
Kolchin E. R. 3582
Komatu Y. 3801
Kondo K. 4068
Köthe G. M. 3939
Koopmans L. 4015
Krafft M. 3384
Krygowska A. Z. 3400
Kucharzewski M. 4137
Kung Sun 4173
Kuramochi Z. 3734
Kurepa D. 3598
Kurepa G. 3672
Kwan Chao-Chih 4234

L

Laasonen P. 4208—4210
Ladrière J. 3451 K
Laha R. G. 4053
Lakshmana-Rao S. K. 3917
Lamprecht E. 3459
Langton N. H. 4226, 4227
Lansner A. E. 4255
Lap A. J. W. 4258
Lashof R. 3639
Laugwitz D. 3879
Le Cam L. 4067
Ledermann W. 3573 K
Lehner J. 3691
Lenz H. 4127, 4159
Leveque W. J. 3470
Levine N. 3626
Lévy P. 4007
Lewandowski Z. 3701
Lewin L. 3885
Lin L. W. 4240
Lin Chün 4230
Lin Hung-sun 3872
Lins M. 3445
Lions J. L. 3802
Liou Tsyun Hyen 3705
Liu Li-chuan 3702
Loo Win 4234
Lorenzen P. 3365
Łoś J. 3535
Lotkin M. 4225
Loud W. S. 3777
Lüders G. 3977
Lugowski H. 3509 K
Łukasiewicz J. 3444
Luxemburg W. A. J. 3945

M

McCarthy J. 4017
McDougle P. 3628
Machátová J. 3393
McLeod J. B. 3890
Magnus W. 3774
Mahowald M. 3954
Manara C. F. 3576
Mandan S. R. 4103
Mandelbrojt S. 3715
Mandini A. 3375
Mangeron D. 3800
Maravall Casesnoves D. 4110
March N. H. 3873
Marchionna Tibiletti C. 3543
Marcus S. 3669
Marić V. 3831
Martin N. M. 3449
Martinot-Lagarde A. 4046
Maruyama G. 4008, 4012
Maruyama T. 4134
Masotti Biggiogero G. 4200, 4201
Masuyama M. 4033
Maurice P. 3687
Maurin K. 3938
Maxwell E. A. 4099, 4100, 4115
Mayer D. 4246
Mazkewitsch D. 4093
Menger K. 3896 K, 3897 K
Michler L. 3534
Mientka W. E. 3481
Mihoc G. 4016
Mirguet J. 4179, 4194
Mišík L. 3654
Miyazaki K. 3745
Mondini A. 3375
Monjàllon A. 3523 K
Montgomery D. 3643
Moór A. 4153
Mordell L. J. 3453, 3507
Moriya M. 3581
Motchane L. 3601, 3602
Mrówka S. 3610
Müller F. 3369 K
Munkelt K. 4248
Murai Y. 4162
Murthy P. 3517
Mutô Y. 4198
Mycielski J. 3670
Myrberg L. 3731—3733
Myrberg P. J. 3738—3740
Musselman J. R. 4098

N

Nadler J. 4065
Nagata J. 3623
Nagata M. 3584—3587
Nanjundiah T. S. 3909
Narain R. 3921
Nasr S. K. 3991
Nasu Y. 4185, 4187
Nehari Z. 3681
Nelson E. 3959
Nicolescu C. 4102
Nicolescu M. 3818
Norden A. P. 4078 K
Nožička F. 4150
Nygaard P. H. 3498

O

Obata M. 4144, 4172, 4176
Öberg T. 4268
Ohmann D. 4192
Olkin I. 4035
Ollagnier P. 4265
Osborn H. 3682
Osserman R. 3735
Ostle B. 3878
Ostrow E. H. 3652
Owen A. R. G. 4028
Ozeki H. 4166
Ozeki N. 3487, 3502

P

Pachares J. 4037
Pachner J. 3874
Packer L. S. 3764
Padmanabhan K. S. 3689
Pál S. 4281
Palmer D. S. 4003
Parameswaran S. 3881
Parodi M. 3512, 3687 4264
Parzen E. 4061
Patil V. T. 4009
Paulauskas V. 3661
Pedersen F. P. 4178
Pelczyński A. 3944
Perez A. 4019
Perez-Cacho L. 3506
Pervin W. J. 3626
Pham D. T. Q. 4250
Phillips M. A. 3422 K
Píč J. 3394
Piccard S. 3549
Pickert G. 4118
Pickett H. 4074
Pinl M. 4139
Pinney E. 3746, 3785 K
Piranian G. 3695
Pitcher T. S. 4034
Plackett R. L. 4030
Plainevaux J. E. 4273
Pogorzelski W. 3821, 3835
Politano M. L. 3377
Popoviciu T. 3891
Porte J. 3435
Post K. A. 3566
Poveda Ramos G. 3892
Pratt J. W. 4035
Price J. J. 3952
Price P. J. 3852, 4050
Primrose E. J. F. 4109
Prior A. N. 3432
Protter M. H. 3816
Pursell L. E. 3950, 3951

Q

Quine W. V. 3437

R

Ráb M. 3756
Rabin M. O. 3440
Rademacher H. 3455
Rahman Q. I. 3717
Rajagopal C. T. 3906
Raleigh J. 3464
Rao C. R. 3905
Rao M. M. 4066
Rees D. 3583
Reeve J. E. 3482
Reggini H. C. 4245

Reichmann W. J. 3505
Reidemeister K. 3364
Reiner I. 3540
Remmert R. 4175
Rényi A. 3469, 4026
Reuter G. E. H. 3784 K
Reutter F. 4282
Richter H. 3990
Rieger G. J. 3461
Riney T. D. 3725
Robbins H. 4031
Roberts J. B. 3496
Robertson M. S. 3704
Robinson G. de B. 3538
Roelcke W. 3741
Rooney P. G. 3709, 3919
Roothaan C. C. 4242
Rootselaar B. van 3431
Rosenbaum E. P. 3410
Rosenberg H. 3413
Rosenstiehl P. 3989
Ross A. E. 4076
Rothe R. 3423 K
Rybarski A. 4261
Rychlík K. 3386

S

Sabliet S. 4023, 4214
Sack R. A. 3979
Sagan H. 3762
Saito T. 3565
Sales Vallés F. de A. 4006
Salkowski E. 4136 K
Sampei Y. 3441
Sandor S. 3655
San Roman J. S. de 4191
Sarantopoulos S. 3753
Sardi U. 4094
Sauter F. 3841 K
Schaefer H. 3969
Schäffer J. J. 4202
Scheja G. 3649 K
Schiff D. 4228
Schiffer M. 3853
Schinzel A. 3483
Schmidt W. 3479
Schmidtmayer J. 4246
Schmieden C. 3879
Schneidt M. 3494
Schöbe W. 4262
Schönhuber A. 3901 K
Schopp J. 4197
Schouten J. A. 4177
Schröder J. 3968
Schützenberger M. P. 3560
Schwartzman S. 3648
Searle S. R. 4045
Sears D. B. 3956
Sederman V. G. 4112
Seeger R. J. 3408
Seiden E. 4047, 4048
Sekar C. C. 4040
Shah S. M. 3718
Shanks E. B. 3902
Shibata T. 4160
Shieh Hui-chun 3699
Sierpiński W. 3480
Signorini A. 4082
Sikorski R. 3625
Sims W. T. 3918
Singer I. M. 3963
Singh S. K. 3718, 3730
Snow D. O. 3942
Sommerfeld A. 3841 K
Soós G. 4153
Sornito J. E. 4107
Sós V. T. 3478
Špaček A. 4005
Spear J. 3418
Specht W. 3685
Specker E. 3674
Spînu C. 3500
Sponsler G. C. 3985
Sprott D. A. 3982, 4036
Stamate I. 3882
Stancu D. D. 4236
Stanton R. G. 4049
Stein E. M. 3652, 3662
Steinberg R. 4190
Steinfeld O. 3561
Sternberg R. L. 3754
Sternberg S. 4181
Steyn H. S. 3983
Stiegler K. 4089
Stoilow S. 3736
Strubecker K. 4203
Stubban J. O. 4071
Su Buchin 4154
Suzuki S. 4167
Suzuki Y. 3502
Swanson C. A. 3763
Swinnerton-Dyer H. P. F. 3867
Szabó J. 4215
Szép J. 3559
Szmydt Z. 3834
Szüsz P. 3904

T

Taam Choy—tak 3758
Takács L. 4001
Takano K. 4182
Tamura T. 3557
Tanaka N. 4169
Tao J. 3647
Tarski A. 4070
Tashiro Y. 4158
Tauber G. E. 4237
Taussky O. 3518
Taylor A. E. 3940
Teicher H. 3987
Terwilliger H. L. 3878
Thébault V. 4096, 4104
Timman R. 3405
Titchmarsh E. C. 3782 K, 3810
Tol M. G. van 3877
Tominaga A. 3622
Tonolo A. 4145
Toupin R. A. 4069
Tournarie M. 4002
Trasi M. S. 4116
Truesdell C. 4088
Tsuji K. 3955
Tsurumi S. 3975
Turán P. 3458, 3469
Turner L. H. 3663

U

Uchiyama S. 3522
Umebara T. 3903
Urabe M. 3750
Urcelay J. M. 4276, 4277

V

Vaccaro G. 4156
Vaidyanathaswamy R. 3486
Vailati G. 4120
Valiron G. 3728
Valle Flores E. 3620
Van der Waerden B. L. 3374
Van Engen H. 3409
Vaona G. 4151
Veloso P. D. 3913 K
Venkatachaliengar K. 3917
Vidav I. 3551
Villari G. 3539
Visa E. 4114
Voss K. 4199
Vredenduin P. G. J. 3875
Vries H. de 3619
Vythoulkas D. P. 3686

W

Wagner F. J. 3608, 3609
Wagner R. 3698
Wallace E. W. 4148
Ward L. E., Jr 3621
Wasow W. 3781
Watanabe Y. 3720
Watson G. L. 3474
Weier J. 3637
Weiner L. M. 4108
Weinert J. 3509 K
Weinstein A. 3828
Whittle P. 4062
Whyburn G. T. 3603, 3629
Widom H. 3961
Wielandt H. 3532
Wilkinson G. N. 4043, 4054
Winkler W. 3372 K
Wintner A. 3684, 3719, 3775, 3803, 3988
Wishart J. 4042
Wittenberg A. 3446
Wittich H. 3726, 3727
Wolfowitz J. 4059
Wood S. 4024
Woods L. C. 3697
Wright M. 3414
Wrighton R. F. 3981
Wunderlich W. 4087
Wylie C. R., Jr 4124

Y

Yamada M. 3567
Yamamuro S. 3970
Yang C. T. 3642, 3643
Yano K. 4177
Yates F. 4038, 4039
Yen Ti 3962
Yien Sze-chien 3541
Yoshioka T. 3645
Young W. H. 3873

Z

Zabek S. 3497
Zawrotsky A. 3412
Ziering S. 4228
Zierler N. 3578
Zimmer H.—G. 4123
Zumino B. 3977

Технический редактор *Т. А. Переверзева*